Cilt 11, Sayı 4, Sayfa 148-154, 2022

Volume 11, Issue 4, Page 148-154, 2022

Araştırma Makalesi https://doi.org/10.46810/tdfd.994281 Research Article

Türk Doğa ve Fen Dergisi
Turkish Journal of Nature and Science
www.dergipark.gov.tr/tdfd

Localization of the Eigenvalues of Doubly Cyclic Z^+ Matrices

Murat SARDUVAN[1*], Hande NEZİROĞLU[2]

[1]Sakarya University, Faculty of Arts end Sciences, Department of Mathematics, Sakarya, Türkiye
[2]Sakarya University, Institute of Natural Sciences, Sakarya, Türkiye
Murat SARDUVAN ORCID No: 0000-0001-7049-8922
Hande NEZİROĞLU ORCID No: 0000-0003-1948-3068

Corresponding author: msarduvan@sakarya.edu.tr

(Received: 12.09.2021, Accepted: 18.12.2022, Online Publication: 28.12.2022)

Keywords
Doubly cyclic Z^+ matrix, Localization of the Eigenvalues, Zeros of a polynomial

Abstract: In this study, the results that determine the localization of the eigenvalues of $n\times n$ doubly cyclic Z^+ matrices with negative determinants are presented when $n\leq 4$, n $\mathbb{Z}$. While establishing these results, the fact that any eigenvalue of a matrix is a continuous function of entries of the matrix is used.

Çift Devirli Z^+ Matrislerin Özdeğerlerinin Yerleri

Anahtar Kelimeler
Çift devirli Z^+ matris, Özdeğerlerin yerleri, Bir polinomun sıfırları

Öz: Bu çalışmada $n\leq 4$, Z^+ olmak üzere, negatif determinantlı $n\times n$ boyutlu çift devirli Z^+ matrislerin özdeğerlerinin yerlerini belirleyen sonuçlar ortaya konulmuştur. Bu sonuçlar ortaya konulurken özdeğerlerin matris elemanlarının sürekli fonksiyonu olması gerçeği kullanılmıştır.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ ve C sembolleri, sırasıyla reel sayılar kümesini, pozitif reel sayılar kümesini ve kompleks sayılar kümesini göstermektedir. $M_n(F)$ ile elemanları F cisminin elemanları olan n boyutlu kare matrisler kümesi gösterilmektedir. $\det(A)$ ve $p(A)$ ile bir A kare matrisinin determinantı ve karakteristik polinomu işaret edilecektir. Bir $A\in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin (j,j), $j=1,2,\ldots,n$, ve $(j,j+1)$, $j=1,2,\ldots,n-1$, indisli elemanlarının bulunduğu köşegenlere, sırasıyla, A matrisinin esas köşegeni ve süper köşegeni denir. Eğer $A\in M_n(\mathbb{R})$ matrisinin; esas köşegendeki, süper köşegendeki ve $(n,1)$ indisli elemanları tamamı ile sıfırdan farklı ve diğer elemanları sıfır ise A matrisine bir çift devirli matris (doubly cyclic matrix) veya kısaca DC matris denir [12]. Eğer bir $A\in M_n(\mathbb{R})$ matrisinin özdeğerlerinin reel kısmı pozitif ise matrise pozitif kararlı (positive stable) matris denir [8]. Eğer $A\in M_n(\mathbb{R})$ matrisinin esas köşegen üzerinde olmayan elemanları pozitif değilse, matrise Z matris, buna ek olarak eğer esas köşegen elemanları pozitifse, matrise Z^+ matris denir. Bir $A\in M_n(\mathbb{R})$ matrisi hem DC matris hem de Z^+ matris olma özelliğini sağlıyorsa bu matrise çift devirli Z^+ matris kısaca DCZ^+ matris denir. O halde her $j=1,2,\ldots,n$, için $a_j, b_j>0$ olmak üzere, DCZ^+ matrisler,

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & & a_{n-1} & -b_{n-1} \\ -b_n & 0 & & & & 0 & a_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

biçimindedir. $a=\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\right)^{\frac{1}{n}}$ ve $b=\left(b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n\right)^{\frac{1}{n}}$ olmak üzere (1) tipli matrisler kümesi $DC(a,b)$ ile gösterilecektir. Ayrıca, $DC(a,b)$ kümesindeki matrislerin negatif determinantlı olanlarının da kümesi $DC\_(a,b)$ ile gösterilecektir. Eğer bir $A\in M_n(\mathbb{R})$ matrisi Z matris olup aynı zamanda pozitif kararlı ise ona M matris denir [12]. Bir $A\in M_n(\mathbb{C})$ matrisi için öz değerlerinin reel kısmı; pozitif olanların sayısı $s_+(A)$, negatif olanların sayısı $s_-(A)$ ve sıfır olanların sayısı $s_0(A)$ ile gösterilecektir. Bu üç sayı ile oluşan $s(A)=(s_+(A),\ s_-(A),\ s_0(A))$ üçlüsüne A matrisinin eylemsizliği (inertia) denir [12]. Burada bu sayılar belirlenirken özdeğerler katlı olduğunda katlılık sayısı da hesaba katılır. Bir $A\in M_n(\mathbb{C})$ matrisi için

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix},\ k=1,2,\ldots,n,$$

sayısına A matrisinin bir başlıca esas minörü (leading principal minor) denir ve sabitlenmiş bir k değeri için bu sayı A^k_{LPM} ile gösterilecektir.

Hershkowitz ve Schneider [9] Z matrisler ve M matrislerin genelleştirilmiş sıfır uzayları üzerine çalışmışlardır. Bunu yaparken öncelikle bir M matrisin genelleştirilmiş sıfır uzayı için bir öncelikli baz teoremi ortaya koymuş ve ispatlamışlardır. Daha sonra bu teoremi Z matrisler için genişletip genelleştirmişlerdir. Yine Hershkowitz ve Schneider [10] Z matris denklemlerinin çözümleriyle de ilgilenmişlerdir. Şöyle ki; A bir Z matris, b bir negatif olmayan vektör olduğu durumda $Ax=b$ matris denkleminin çözümlerinin varlığı ve doğasını araştırmışlardır.

Kalman ve White [13] düşük dereceli polinomlar ile oluşturulmuş denklemlerin köklerinin o polinomlar ile ilişkili dairesel matrislerin özdeğerleri olduğunu göstermişlerdir.

Chandrashekaran ve arkadaşları [5] güçlü Z matris tanımı yapmışlar, ayrıca tersinir olan güçlü Z matris için Lipschitzian özelliğini sağlayıp sağlamadığını belirlemenin bir yolunu bulmuşlardır.

Jeffries ve arkadaşları [11] 4×4 boyutlu çift devirli matristen türetilebilecek bir matrisin $(1,3,0)$ eylemsizliğine sahip olduğunu ispat etmişlerdir. Bu ispat ettikleri sonucu, bir küçük kanser hücresi dinamikleri modelini analiz etmede kullanmışlardır. Boyut daha büyük olduğunda elde edilebilecek sonuçların da daha büyük modellerin analizinde yararlı olabileceğini belirtilmişlerdir. Dolayısıyla, çift devirli matrislerin biyoloji uygulamalarındaki önemini yaptıkları bu çalışmayla göstermişlerdir.

Bendito ve arkadaşları [2] çalışmalarında simetrik ve tersinir olmayan bir Jacobi M matrisinin Moore-Penrose tersinin ne zaman aynı zamanda bir M matris olduğunu karakterize etme problemini ele almışlardır. Bu problemin çözümünü kare matrislerin boyutu üç ve daha küçük olduğunda çözmüşler fakat boyutun dört ve daha yüksek olduğunda problemin çözümünün daha karmaşık bir hal aldığını görmüşlerdir. Çalışmalarının sonunda, matrislerin üzerine ekstra olarak üçgensellik koşulunu da ekleyip, herhangi n boyut için bir sonuç verebilmişlerdir.

Johnson ve arkadaşları [12] $DC(a,b)$ matrislerin sol yarı düzlemde olan özdeğerlerinin sayısını ele almışlardır. Bu çalışmada bu sonuç Teorem 1.1 olarak hatırlatılmaktadır. Teorem 1.1 ile böyle matrislerin sol yarı düzlemdeki özdeğerlerinin sayısı ile $a\mathrm{I}-bP$ matrisinin özdeğerlerinin sayısının aynı olduğuna dikkat çekmişlerdir. Hatta sonlu boyutlu genel durum için $a<b$ ise böyle matrislerin sol yarı düzlemdeki özdeğer sayısı özel bir aralıktaki tek tam sayı olabileceği açık problemini (bkz. Konjektür 1.2) ortaya atmışlardır. Bu aralık alttan 1 ile ve üstten $a\mathrm{I}-bP$ matrisinin sol yarı düzlemdeki özdeğer sayısı ile sınırlıdır. Daha sonra bu konjektür $a<b$ (yani negatif determinantlı olma) koşulu olmaksızın, dolayısıyla daha genel hali ile, [4]'te ispatlanmış ve burada Teorem 1.3 ile hatırlatılmıştır. Burada ve çalışmanın bundan sonraki kısmında P ile

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi gösterilmektedir.

Lu ve diğerleri [14] Markov zincirleriyle alakalı Wiener-Hopf problemlerinin incelenmesinde ortaya çıkan tersinir

M matrisli ikinci dereceden matris denkleminin sayısal çözümünü ele almışlardır. Bunu yaparken önce matris denklemini Riccati denklemine çevirip sabit nokta iterasyonu ile bu denklemi çözmüşlerdir.

Amster ve Idels [1] yüksek dereceli gecikmeli otonom olmayan modellerin parametrelerinden yararlanarak onların kararlılık analizlerinde M matrisleri kullanan bir algoritma tanımlamışlardır.

Brandts ve Cihangir [3] simetrik ters M matris problemlerini geometrik açıdan araştırmışlardır.

Guan [7] M matrisli cebirsel Riccati denkleminin sayısal çözümünü ele almıştır. Bu denklemin minumum ve negatif olmayan çözümlerini hesaplamak için değiştirilmiş ve doğrusallaştırılmış kapalı bir iterasyon yöntemi ortaya koymuş ve bu yöntemin etkinliğini göstermiştir.

Aşağıda bu makaleye esin kaynağı olan [12] ve [4] çalışmalarında bulunan bazı teoremler ve bir konjektür hatırlatılmaktadır.

Teorem 1.1. ([12, Theorem 1]) $a,b>0$ iken aşağıdaki ifadeler denktir:

1. $s_-(aI-bP)=1$,
2. $\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)<\dfrac{a}{b}<1$,
3. Tüm $A\in DC(a,b)$ matrisleri için $s_-(A)=1$ 'dir.

Konjektür 1.2. ([12, Conjecture]) $A\in DC\_(a,b)$ olması, $s_-(A)\le s_-(aI-bP)$ olmasını sağlar.

Teorem 1.3. ([4, Theorem 1.1]) $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, $a,b\in\mathbb{R}^+$ ve $A\in DC(a,b)$ olsun. Bu durumda A matrisinin negatif reel kısımlı özdeğerlerinin sayısı $aI-bP$ matrisinin negatif reel kısımlı özdeğerlerinin sayısını geçemez ve $A=aI-bP\in DC(a,b)$ almak $DC(a,b)$ kümesinin tüm elemanları için bir maksimum olarak üst sınır elde edilmesine imkân sağlar.

Teorem 1.1 ve Teorem 1.3'te bulunan A matrisleri (1) ile verilen DCZ^+ matrislerdir. Bu çalışmada örneğin 4 boyut için

$$A=\begin{bmatrix} R_1 & -R_1 & 0 & 0\\ 0 & R_2 & -R_2 & 0\\ 0 & 0 & R_3 & -R_3\\ -2R_4 & 0 & 0 & R_4\end{bmatrix} \tag{2}$$

çift devirli Z^+ matrisini ele alınmaktadır. (2) ile verilen matriste Teorem 1.1 ve Teorem 1.3'te bulunan A matrislerinden farklı olarak (4,1) indisli eleman ekstra 2 katsayısını almakta ve böylece, matrisin negatif determinantlı oluşu garanti altına alınmaktadır. Yine (1) tipli matris için yapılan Teorem 1.1 ve Teorem 1.3'te özdeğerlerin yerleri $aI-bP$ matrisinin özdeğerleri ile ilişkilendirilerek belirlenirken, bu çalışmada bu ilişkilendirme yapılmaksızın (2) matrisi ve onun daha küçük boyutlu halleri için eylemsizlikler direkt olarak ortaya koyulmaktadır.

2. ÖN BİLGİLER

Teorem 2.1. (Gerschgorin Teoremi [15, Theorem 4]) $A=(a_{pq})\in M_n(\mathbb{R})$ olsun.

$$D_p=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-a_{pp}\right|\le\sum_{q\ne p}\left|a_{pq}\right|\right\},\ p=1,\ldots,n,$$

diskleri tanımlansın. Bu durumda

(a) A matrisinin tüm özdeğerleri $\bigcup_{p=1}^{n}D_p$ birleşim kümesinde bulunur.

(b) Eğer $\bigcup_{p=1}^{n}D_p$ kümesi k tane ayrık bağlantılı $E_1,\ldots,E_k$ bölgelerin birleşimi ise ve $D_1,\ldots,D_n$ disklerinin r tanesinin birleşimi E_r bölgesiyse bu durumda E_r bölgesi A matrisinin tam olarak r tane özdeğerini içerir, $r=1,\ldots,k\le n$ [15].

Aşağıda verilenler Teorem 2.1'in direkt sonuçlarıdır.

Sonuç 2.2. $R_1,R_2,R_3,R_4\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere (2) ile verilen A çift devirli Z^+ matrisini ele alalım.

$$\begin{aligned} D_1&=\{z\in\mathbb{C}:|z-R_1|\le R_1\},\\ D_2&=\{z\in\mathbb{C}:|z-R_2|\le R_2\},\\ D_3&=\{z\in\mathbb{C}:|z-R_3|\le R_3\},\\ D_4&=\{z\in\mathbb{C}:|z-R_4|\le 2R_4\}\end{aligned}$$

için A matrisinin tüm özdeğerleri $D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$ kümesinde bulunur.

Sonuç 2.3. $R_1,R_2,R_3\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$A=\begin{bmatrix} R_1 & -R_1 & 0\\ 0 & R_2 & -R_2\\ -2R_3 & 0 & R_3\end{bmatrix} \tag{3}$$

çift devirli Z^+ matrisini ele alalım.

$$\begin{aligned} D_1&=\{z\in\mathbb{C}:|z-R_1|\le R_1\},\\ D_2&=\{z\in\mathbb{C}:|z-R_2|\le R_2\},\end{aligned}$$

$$D_3 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - R_3| \le 2R_3 \}$$

için A matrisinin tüm özdeğerleri $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ kümesinde bulunur.

Sonuç 2.4. $R_1,\ R_2 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$A = \begin{bmatrix} R_1 & -R_1 \\ -2R_2 & R_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

çift devirli Z^+ matrisini ele alalım.

$$D_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - R_1| \le R_1 \},$$
$$D_2 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - R_2| \le 2R_2 \}$$

için A matrisinin tüm özdeğerleri $D = D_1 \cup D_2$ kümesinde bulunur.

Li ve Zhang'ın [15] çalışmalarının ilk sayfasında belirttiği gibi, Gerschgorin [6] çalışmasında, daha sonra Gerschgorin disk teoremi olarak adlandırılan teoremi ortaya koyarken aşağıda ifade edilen gerçeği kullandı. Burada Lemma 2.5 olarak ifade edilen bu gerçek bizim bu çalışmamızdaki ispat yöntemimizin esin kaynağı olacaktır.

Lemma 2.5. Bir matrisin özdeğerleri, karakteristik polinomun kökleridir ve bu kökler matris bileşenlerinin sürekli fonksiyonlarıdır [15].

3. ANA SONUÇLAR

Bir matrisin özdeğerlerin çarpımının o matrisin determinantına eşit olmasını ve önceki bölümde verilenleri kullanarak 4 ve daha küçük boyutlu çift devirli Z^+ matrislerin özdeğerlerinin yerleri için oluşturulan sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.1. $R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, (2) ile verilen A çift devirli Z^+ matrisini ele alalım. Bu durumda $s(A) = (3,1,0)$'dır.

İspat. A matrisinin determinantı,

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} R_1 & -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_3 \\ -2R_4 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix} = -R_1R_2R_3R_4 \tag{5}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, A matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned} &\det(A - x\mathrm{I}) \\ &= x^4 + x^3(-R_1 - R_2 - R_3 - R_4) \\ &+x^2(R_3R_4 + R_2R_4 + R_2R_3 + R_1R_4 + R_1R_3 + R_1R_2) \\ &+x(-R_1R_2R_3 - R_1R_2R_4 - R_1R_3R_4 - R_2R_3R_4) \\ &-R_1R_2R_3R_4 \end{aligned} \tag{6}$$

şeklinde elde edilir. A matrisinin özdeğerlerinin eylemsizliğini belirlemek için, özdeğerlerin alabileceği değerlere göre olası tüm durumlar üzerinden aşağıdaki gibi inceleme yapılabilir.

1) Özdeğerlerin en az biri sıfır olsun. Bu durumda A matrisin özdeğerlerinin çarpımı, dolayısıyla determinantı sıfır olur. Oysaki (5)'ten $\det(A) < 0$ olduğunu biliniyor. Bu ise bir çelişkidir. O halde özdeğerlerin hiçbiri sıfır olamaz.

2) Özdeğerlerin hepsi pür imajiner olsun. Bu durumda $a,\ b \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $x_1 = ai$, $x_2 = -ai$, $x_3 = bi$, $x_4 = -bi$ için, $\det(A) = a^2b^2 > 0$ olur. Oysaki (5)'ten $\det(A) < 0$ olduğunu biliniyor. Bu ise bir çelişkidir. O halde tüm özdeğerler pür imajiner olamaz.

3) Özdeğerlerin iki tanesi pür imajiner iki tanesi pür kompleks olsun. Bu durumda $a,\ b,\ c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $x_1 = a + ib,\ x_2 = a - ib,\ x_3 = ic,\ x_4 = -ic$ için, $\det(A) = (a^2 + b^2)c^2 > 0$ olur. Oysaki (5)'ten $\det(A) < 0$ olduğunu biliniyor. Bu ise bir çelişkidir. O halde özdeğerlerin iki tanesi pür imajiner iki tanesi pür kompleks olamaz.

4) Özdeğerlerin iki tanesi pür imajiner, iki tanesi reel olsun. Bu durumda $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $x_1 = ai,\ x_2 = -ai,\ x_3 = b,\ x_4 = c$ için $\det(A) = a^2bc$ olur. Dolayısıyla (5)'ten b ve c zıt işaretli olmalıdır. O halde genelliği bozmaksızın $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}^+$ için, özdeğerler $a = 1$ iken, $x_1 = i,\ x_2 = -i,\ x_3 = \lambda,\ x_4 = -\mu$ olarak alınabilir. Bu durumda karakteristik polinom,

$$\begin{aligned} p(A) &= (x - \lambda)(x + \mu)(x - i)(x + i) \\ &= x^4 + x^3(-\lambda + \mu) + x^2(1 - \lambda\mu) \\ &+x(-\lambda + \mu) - \lambda\mu \end{aligned} \tag{7}$$

olarak bulunur. (6) ve (7) ifadelerinin her ikisi de A matrisinin karakteristik polinomu olduklarından eşit olmalıdır. Buradan, sırasıyla x^3, x^2, x, x^0 içeren terimlerin eşitliğinden,

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \lambda - \mu, \tag{8}$$

$$R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4 = 1 - \lambda\mu, \tag{9}$$

$$R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4 = \lambda - \mu, \tag{10}$$

$$R_1R_2R_3R_4 = \lambda\mu \tag{11}$$

elde edilir. (8) – (11) denklemlerinin sol yanlarını kısalık olsun diye sırasıyla B, C, D, E ile gösterelim. (9) ve (11)'den; $C + E = 1$ olur. Bu ifade ile birlikte (8) ve (10) denklemlerinin sağ taraflarının eşitliği göz önüne alındığında

$$(C + E)B = D \tag{12}$$

yazılabilir. Bu ifadenin sol tarafındaki CB ifadesi tekrar R_j'ler kullanılarak yazılırsa,

$$\begin{aligned}&(C+E)B\\ &= R_1^2(R_2+R_3+R_4) + R_2^2(R_1+R_3+R_4)\\ &+ R_3^2(R_1+R_2+R_4) + R_4^2(R_1+R_2+R_3)\\ &+ 3D + EB\end{aligned}$$

elde edilir. (12)'de bu ifade kullanılırsa

$$EB = -\begin{bmatrix} 2D + R_1^2(R_2+R_3+R_4) \\ +R_2^2(R_1+R_3+R_4) + R_3^2(R_4+R_1+R_2) \\ +R_4^2(R_1+R_2+R_3) \end{bmatrix}$$

bulunur. $R_j > 0$, $j = 1,2,3,4$ kabulü gereği yukarıdaki ifadede hem eşitliğin sol yanındaki EB çarpımı hem de eşitliğin sağında parantez içindeki ifadeler pozitif olmak zorundadır. Fakat bu durumda pozitif bir sayının negatif bir sayıya eşit olması durumu elde edilir ki bu bir çelişkidir. O halde özdeğerlerin iki tanesi pür imajiner, diğer iki tanesi ise reel olamaz.

Böylece, geometrik bakış açısıyla özdeğerler hiçbir zaman imajiner eksenin üzerinde olamayacaklardır. Çünkü imajiner eksen üzerinde 4×4 boyutlu matrisin pür imajiner özdeğere sahip olma durumlarının tamamı (dört tane pür imajiner özdeğere sahip olma ya da iki tane pür imajiner özdeğere sahip olma) incelenmiş ve bu durumların olamayacağı görülmüştür. Diğer taraftan örneğin, $j = 1,2,3,4$ iken $R_j = 1$ için özdeğerler yaklaşık olarak $-0{,}1892$, $2{,}1892$ ve $1{,}0000 \pm 1{,}1892i$ olur. O halde bu durum için $s(A) = (3,1,0)$ olur. Özdeğerlerin diğer olası durumlarını incelemeksizin Sonuç 2.2 ve Lemma 2.5 göz önüne alınsın. Özdeğerler R_j katsayılarının sürekli fonksiyonları olduğu ve imajiner eksende olamayacakları için R_j sayıları değiştikçe özdeğerlerden imajiner eksenin sağında olanlar sağda solunda olanlar ise eksenin solunda kalmaya devam edecektir. Dolayısıyla $s(A) = (3,1,0)$ olma durumu $R_j \in \mathbb{R}^+$, $j = 1,2,3,4$, sayıları için korunacaktır. Böylece ispat tamamlanır.

Not. Teorem 3.1'in ispatının 4. durumunda $a = 1$ almanın genelliği bozmayacağı ifade edilmiştir. Çünkü a direkt olarak kullanılmış olsaydı (7) denkleminin sağ tarafı

$$x^4 + x^3(-\lambda + \mu) + x^2(a^2 - \lambda\mu) + xa^2(-\lambda + \mu) - a^2\lambda\mu$$

şeklinde olurdu. İspat bu ifadedeki toplanan kısımların işaretlerine dayandığı için gelen bu a^2'li terimler bu kısımların işaretini, dolayısıyla ispatı değiştirmeyecektir.

Teorem 3.2. $R_1, R_2, R_3 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, (5) ile verilen A çift devirli Z^+ matrisini ele alalım. Bu durumda $s(A) = (2,1,0)$'dır.

İspat. A matrisinin determinantı

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} R_1 & -R_1 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_2 \\ -2R_3 & 0 & R_3 \end{bmatrix} = -R_1R_2R_3 \tag{13}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, A matrisinin karakteristik polinomu

$$\begin{aligned}\det(xI - A) &= x^3 + x^2(-R_1 - R_2 - R_3)\\ &+ x(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3) + R_1R_2R_3\end{aligned} \tag{14}$$

şeklinde elde edilir. A matrisinin özdeğerlerinin eylemsizliğini belirlemek için, özdeğerlerin alabileceği değerlere göre olası tüm durumlar üzerinden aşağıdaki gibi inceleme yapılabilir.

1) Özdeğerlerin en az biri sıfır olsun. Bu durumda A matrisinin özdeğerlerinin çarpımı, dolayısıyla determinantı sıfır olur. Oysaki (13)'ten $\det(A) < 0$ olduğu biliniyor. Bu ise bir çelişkidir. O halde özdeğerlerin hiçbiri sıfır olamaz.

2) Özdeğerlerin bir tanesi reel, iki tanesi pür imajiner olsun. Bu durumda, $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $x_1 = ai$, $x_2 = -ai$, $x_3 = b$ için $\det(A) = a^2 b$ olur. Dolayısıyla (13)'ten $b < 0$ olmalıdır. O halde genelliği bozmaksızın $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ için, özdeğerler $x_1 = \mu i$, $x_2 = -\mu i$, $x_3 = -\lambda$ olarak alınabilir. Bu durumda karakteristik polinom

$$
\begin{aligned}
p(A) &= (x-\mu i)(x+\mu i)(x+\lambda) \\
&= x^3 + x^2\lambda + \mu^2 x + \lambda\mu^2
\end{aligned} \tag{15}
$$

olur. (14) ve (15) ifadelerinin her ikisi de A matrisinin karakteristik polinomu olduklarından eşit olmalıdır. Burada x^2 içeren terimlerin eşitliğinden

$$R_1 + R_2 + R_3 = -\lambda \tag{16}$$

elde edilir. Bu ise $R_1,\ R_2,\ R_3 \in \mathbb{R}^+$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ kabulleri ile çelişir. O halde özdeğerlerin biri reel ve ikisi pür imajiner olamaz.

Böylece, geometrik bakış açısıyla özdeğerler hiçbir zaman imajiner eksenin üzerinde olamayacaklardır. Çünkü, imajiner eksen üzerinde 3×3 boyutlu matrisin pür imajiner özdeğere sahip olma durumlarının tamamı (iki tane pür imajiner özdeğere sahip olma) incelenmiş ve bu durumun olamayacağı görülmüştür. Diğer taraftan, örneğin $j=1,2,3$ iken $R_j=1$ için özdeğerler yaklaşık olarak $-0,2599$ ve $1,6300 \pm 1,091i$ bulunur. Yani bu durum için $s(A)=(2,1,0)$ olur. Özdeğerlerin diğer olası durumlarını incelemeksizin Sonuç 2.3 ve Lemma 2.5 göz önüne alınsın. Özdeğerler R_j katsayılarının sürekli fonksiyonları oldukları ve imajiner eksen üzerinde olamayacakları için imajiner eksenin sağında olanlar sağda solunda olanlar ise eksenin solunda kalmaya devam edecektir. Dolayısıyla $s(A)=(2,1,0)$ olması $R_j \in \mathbb{R}^+$, $j=1,2,3$, sayıları için korunacaktır.

Teorem 3.3. $R_1, R_2 \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, (6) ile verilen A çift devirli Z^+ matrisini ele alalım. Bu durumda $s(A)=(1,1,0)$'dır.

İspat. A matrisinin determinantı,

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} R_1 & -R_1 \\ -2R_2 & R_2 \end{bmatrix} = -R_1R_2 \tag{17}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, A matrisini karakteristik polinomu,

$$\det(A - x\mathrm{I}) = x^2 + x(-R_1 - R_2) - R_1R_2 \tag{18}$$

şeklinde elde edilir. A matrisinin özdeğerlerinin eylemsizliğini belirlemek için, özdeğerlerin alabileceği değerlere göre olası tüm durumlar üzerinden aşağıdaki gibi inceleme yapılabilir.

1) Özdeğerlerin en az biri sıfır olsun. Bu durum A matrisinin özdeğerlerinin çarpımı, dolayısıyla determinantı sıfır olur. Oysaki (17)'den $\det(A)<0$ olduğunu biliniyor. Bu ise bir çelişkidir. O halde özdeğerlerin hiçbiri sıfır olamaz.

2) Özdeğerlerin ikisi de pür imajiner olsun. Bu durumda, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $x_1 = ai$, $x_2 = -ai$ için, $\det(A) = a^2$ olur. Oysaki (17)'den $\det(A)<0$ olduğunu biliniyor. Bu ise bir çelişkidir. O halde özdeğerler pür imajiner olamaz.

Böylece, geometrik bakış açısıyla özdeğerler hiçbir zaman imajiner eksenin üzerinde olamayacaklardır. Diğer taraftan, örneğin $j=1,2$ iken $R_j=1$ için özdeğerler yaklaşık olarak $2,4142$ ve $-0,4142$ olarak bulunur. Yani bu durum için $s(A)=(1,1,0)$ olur. Özdeğerlerin diğer olası durumlarını incelemeksizin Sonuç 2.4 ve Lemma 2.5'e dikkat edelim. Buradan özdeğerler R_j katsayılarının sürekli fonksiyonları olduğu ve imajiner eksende olamayacakları için imajiner eksenin sağındakiler sağda solundakiler ise eksenin solunda kalmaya devam edecektir. Dolayısıyla $s(A)=(1,1,0)$ olma durumu $R_j \in \mathbb{R}^+$, $j=1,2$, sayıları için korunacaktır.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bilindiği üzere Teorem 1.1, Konjektür 1.2 ve Teorem 1.3 literatürde ([12] ve [4]) mevcut olan ve bu çalışma yapılırken esinlenilen sonuçlardır. Teorem 1.1 ile (1) tipli $A \in DC(a,b)$ matrisinin, yani bir çift döngülü Z^+ matrisin, sol yarı düzlemdeki özdeğer sayısının 1 olmasının gerek ve yeter koşulunun $aI - bP$ matrisinin sol yarı düzlemdeki özdeğer sayısının 1 olması olduğu gösterilmiştir. Aynı zamanda bu önermelerin her birinin gerek ve yeter koşulunun $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) < \frac{a}{b} < 1$ önermesi olduğu da gösterilmiştir. Bu son koşulun $A \in DC(a,b)$ matrisinin üzerine konulma sebebinin aynı zamanda negatif determinantlı olmayı garanti etmek olduğuna dikkat ediniz. Konjektür 1.2'de ise " $A \in DC\_(a,b)$ olması durumunda (yani Teorem 1.1'deki A matrisinin üzerindeki koşullara, negatif determinantlı olma koşulunu direkt olarak ekleyerek) onun sol yarı düzlemdeki özdeğer sayısının üstten $aI - bP$ matrisinin sol yarı düzlemdeki özdeğer sayısı ile sınırlı olacağı" açık problem olarak bırakılmıştır. [4]'te mevcut olan Teorem 1.3 ise bu açık problemin, negatif determinantlı olma koşulu olmaksızın, dolayısıyla daha genel halinin, tüm $A \in DC(a,b)$ matrisleri için ispatlanmış halidir.

Bu çalışmada $n<5$ iken (2) tipli negatif determinantlı çift döngülü Z^+ matrisler için sol yarı düzlemde yalnızca bir özdeğerin varlığı, diğer özdeğerlerin ise sağ yarı düzlemde olduğu gösterildi. Dolayısıyla, $n<5$ iken Konjektür 1.2 yeniden ispatlandı. Ancak Konjektür 1.2 ve diğer var olan sonuçlardan farklı olarak (1) tipli matris yerine (2), (3) ve (4) tipli matrisler ile çalışıldı. Yani dikkat edilirse çalışılan matrisin köşegen ve süper köşegen elemanlarında değişikliğe gidilmiş ve $(n,1)$ indisli elemanın önüne ekstra 2 katsayısı konulmuştur. Bu katsayının konulma sebebi matrisin negatif determinantlı olmasını garanti etmektir. Buradaki 2 katsayısının yerine 1'den büyük olan herhangi bir reel sayı da alınabilir. Hatta $(n,1)$ indisli elemanın önüne değil süper köşegen üzerindeki herhangi bir elemanın önüne de bu katsayı konulabilir. $(n,1)$ indisli elemanı bu katsayıyı koymak için seçmenin genelliği bozmayacağına dikkat ediniz.

Bu çalışmada verilen ispatlarda kullanılan yöntemin bir avantajı mertebesi 5'ten küçük olan matrisler için Teorem 1.3'ün [4]'te verilen ispatı ile kıyaslanmayacak kadar çok daha az emek gerektirmesidir. Böylece bu çalışmadaki ispat yöntemi kullanılarak boyutu 5'ten küçük olup örneğin negatif olmayan matrisler, çift devirli matrisler, vb. herhangi özel tipli matrisler için özdeğerlerin yerleri problemleri çalışılabilir. Dolayısı ile elde edilen sonuçlar ile herhangi bir boyuttaki matrisler için konjektürler oluşturulabilir. İspat yöntemimizin bir diğer avantajı ise (2) tipli matrisin özdeğerlerinin yerini başka bir matrisin özdeğerlerinin yeri ile ilişkilendirmeksizin direkt olarak belirleyebilmesidir. Zira Teorem 1.1 ve Teorem 1.3'te sonuçlar $aI-bP$ matrisi ile ilişkili olarak verilmiştir. Çalışmamızın bu anlamda başka çalışmalara esin kaynağı olacağını umuyoruz.

KAYNAKLAR

[1] Amster P, Idels L. New applications of M -matrix methods to stability of high-order linear delayed equations. Appl. Math. Lett. 2016;54:1-6.

[2] Bendito E, Carmona A, Encinas AM, Mitjana M. The M -matrix inverse problem for singular and symmetric Jacobi matrices. Linear Algebra Appl. 2012;436:1090-1098.

[3] Brandts J, Cihangir A. Geometric aspects of the symmetric inverse M -matrix problem. Linear Algebra Appl. 2016;506:33-81.

[4] Baker CE, Mityagin BS. Localization of eigenvalues of doubly cyclic matrices. Linear Algebra Appl. 2018;540:160-202.

[5] Chandrashekaran A, Parthasarathy T, Ravindran G. On strong Z -matrices. Linear Algebra Appl. 2010;432:964-969.

[6] Gerschgorin VS. Über die abgrenzung der eigenwerte einer matrix. Bulletin de L'Academie des Sciences de L'URSS. Classe des sciences mathȇmatiques et naturelles. 1931;1:749-754.

[7] Guan J. Modified alternately linearized implicit iteration method for M -matrix algebraic Riccati equations. Appl. Math. Comput. 2019;347:442-448.

[8] Horn RA, Johnson CR. Topics in matrix analysis. Cambridge, Cambridge University Press; 1991.

[9] Hershkowitz D, Schneider H. On the generalized nullspace of M -matrices and Z -matrices. Linear Algebra Appl. 1988;106:5-23.

[10] Hershkowitz D, Schneider H. Solutions of Z -matrix equations. Linear Algebra Appl. 1988;106:25-38.

[11] Jeffries CD, Johnson CR, Zhou T, Simpson DA, Kaufmann WK. A flexible and qualitatively stable model for cell cycle dynamics including DNA damage effects. Gene Regulation and Systems Biology. 2012;1:55-66.

[12] Johnson CR, Price Z, Spitkovsky IM. The distribution of eigenvalues of doubly cyclic Z^+ -matrices. Linear Algebra Appl. 2013;439:3576-3580.

[13] Kalman D, White JE. Polynomial equations and circulant matrices. Amer. Math. Monthly. 2001;108(9):821-840.

[14] Lu L, Ahmed Z, Guan J. Numerical methods for a quadratic matrix equation with a nonsingular M -matrix. Appl. Math. Lett. 2016;52:46-52.

[15] Li CK, Zhang F. Eigenvalue continuity and Gersgorin's Theorem. Electron. J. Linear Algebra. 2019;35:619-625.