YYÜ.Fen Bilimleri Enstitüsü
1(2),(1992),1-9

# DOGUM VE ÖLÜM SURECLERININ TEK KANAL DURUMU*

İnan CINAR

Hüsnü BARUTOGLU

## ÖZET

Doğum ve ölüm süreçleri bir poisson sürecidir. Yani bu süreçler durum uzayı kesikli ve parametresi sürekli olan markov sürecidir.

Bu calısmada ilk olarak doğum ve ölüm süreçlerinin tanımı verilerek doğum ve ölüm denklemleri ele alınmıştır.

Bu denklemlerde $\mu_n=0$ ise denklemler kendilerinin poinson dağılımına esit olurlar. Eğer $\lambda_n=\lambda$ ve $\mu_n=\mu$ ise denklemler bir tek kanallı kuyruğu olusştururlar.

İşte burada tek kanallı kuyruk durumu ve bunların çözümleri ele alınarak incelenmistir.

## SUMMARY

Birth and Death procesess are a poisson procesess, that is these procesesses are a markov processes Whose state spaces is discontinuous and parameters are cantinuose in this study first, identifying the Birth and Death procesesses the equations of Birth and Death procesesses are considered.

In this equations if $\mu_n=0$ the equations equal to their own poisson distributions if $\lambda_n=\lambda$ and $\mu_n=\mu$ the equations cause a single channel queue.

In this study considering the single channeled queue state, its solutions are studied.

## GIRIŞ

Doğum ve ölüm süreçleri bir poisson sürecidir. Poisson süreci, durum uzayı kesikli ve parametresi sürekli olan bir markov sürecidir.

Bir kente baska bir kentten gelen telefon konusmaları, arabaların bir benzin istasyonuna gelmeleri Poisson süreci

* III. Ulusal Matematik Sempozyumunda bildiri olarak sunulmuştur.

için bir örnektir. Bu olaylara dikkat edildiğinde bazı sonuçlar ortaya çıkar. Bunlar,

1°) Verilen bir zaman aralığında ortaya çıkan olayların sayısı yalnızca zaman aralığının uzunluğuna bağlıdır.

2°) Olayların ortaya çıkısı birbirinden bağımsızdır. Verilen bir zaman aralığında ortaya çıkan olaylar, bu aralıkta ortak noktası olmayan baska bir aralıkta çıkan olayları etkilemezler.

3°) Çok küçük bir $\Delta t$ zaman aralığında iki yada daha cok olayın ortaya çıkması olasılığı, tek olayın ortaya çıkması olasılığından cok daha küçüktür.

Bu varsayımlar altında $\{X_t,\ t\geq 0\}$ stokastik süreci, poisson süreci olarak tanımlanır. [1]

**Doğum-Ölüm Süreçleri:**

Durum uzayı $\{0,1,2,\ldots\}$ olan bir $\{X_t, t\geq 0\}$ Morkov zincirini göz önüne alalım. $X_t$ nin bir evrenin t zamanındaki büyüklüğünü gösterdiği bu zincirde geçis olasılığı

$$P_{ij}(t)=P(X_{s+t}=j/X_s=i)$$

olsun ve $P_{ij}(t)$, aşağıdaki özellikleri sağlasın.

1°) $P_{i\,i+1}\ (\Delta t)=\lambda_i\ t+o(\Delta t)$ $\qquad i\geq 0$ icin
2°) $P_{i\,i-1}\ (\Delta t)=\ \mu_i\ t+0(\Delta t)$ $\qquad i\geq 1$ icin
3°) $P_{i\,i}\ (\Delta t)=1-(\lambda_i+\mu_i)\ t+0\ (\Delta t)$ $\qquad i\geq 0$ icin
4°) $P_{ij}\ (\Delta t)=0(\Delta t)$ $\qquad j=i-1,i,i+1$

Burada $0(\Delta t)$, her durumda i'ye bağlıdır. $\lambda_i$: doğum $\mu_i$: ölüm oranını göstermektedir. Yukarıdaki varsayımları sağlayan $\{X_t, t\geq 0\}$ markov zinciri bir doğum-ölüm süreci adını alır.[2]

**Doğum-Ölüm Denklemleri**

İleri doğru doğum-ölüm denklemleri.

$$P'_{in}\ (t)=\frac{dP_{in}(t)}{dt}=-\ (\lambda+\mu)\ P_{in}(t)+\lambda_{n-1}\ P_{i,n-1}(t) +\mu P_{i,n+1}\ (t)$$

$t\geq 0,\ n\geq 0,\ i=0,1,2,\ldots$

n=0 i=1,2,... için — (1)

$$P'_{io}(t)=\frac{dP_{io}(t)}{dt}=-\lambda P_{io}(t)+\mu P_{i,1}\ (t)$$

ile verilir. Bu denklemler.

$$A=\begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \text{---} \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \text{---} \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3\cdots \end{bmatrix} \quad \text{—(2)}$$

matrisi ile P geçis olasılıkları matrisinin çarpılmasından olusur.[3]

$$P_{in}(0)=\delta_{in}=\begin{cases}0 & i\neq n\\ 1 & i=n\end{cases} \qquad —— (3)$$

olduğuna dikkat etmek gerekir.

Bu teori. kuyruk teorisine uygulandığında verilen bir zaman sistemi içinde n tane birim varsa sistem $E_n$ durumundadır denir.$(t,t+\Delta t)$ zaman aralığında $E_n$ durum uzayından $E_{n+1}$ durum uzayına bir geçis olasılığı $\lambda_n(\Delta t)+0(\Delta t)$ ile verilir. Aynı aralıkta $E_n$ durum uzayından $E_{n-1}$ durum uzayına geçis olasılığı ise, $\mu_n\Delta t+0(\Delta t)$ seklinde verilir.

Bu denklemlerden $\mu_n=0$ ise denklemler kendilerinin poisson dağılımına esit olur. Eğer $\lambda n=\lambda$ , $\mu_n=\mu$ ise denklemler bir tek kanallı kuyruğu olusturur.

İleri doğru denklemler ile geri doğru denklemlerin birlestirilmesi.

$$P'_{in}(t)=\frac{dP_{in}(t)}{dt}=-(\lambda i+\mu_i)\ P_{in}(t)+\lambda i\ P_{i+1,n}(t)+\mu_i P_{i-1,n}(t)$$

$n>0 \qquad t\geq0$

$$P'_{on}(t)=-\lambda o\ P_{on}\ (t)\ +\mu_o\ P_{1,n}\ (t) \quad \_\_ \quad (4)$$

ile verilir. İleri doğru denklemlerinin bir çözümü geri doğru denklemlerinide sağlar.

Tek Kanal Durumu ve Çözümü

Yukarıdaki doğum ve ölüm denklemlerinde notasyonu basitleştirmek için i indisi yazılmayıp $\lambda_n=\lambda$ ve $\mu_n=\mu$ değerleri konarak asağıdaki basit tek kanal poisson girisi elde edilir. t zamanında sistemdeki n tane parçanın olma olasılığını veren üstel zaman denklemleri, t=0 zamanında sistem içindeki i tane parçayıda verir [4].

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=-(\lambda+\mu)\ P_n(t)\ +\lambda P_{n-1}(t)+\mu P_{n+1}(t) \qquad n\geq1$$

$$\frac{dP_o(t)}{dt}=-\lambda P_o(t)+\mu P(t) \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_ \quad (5)$$

$P_n(t)$ nin olasılık çıkardan fonksiyonu $|z|=1$ birim çemberde

$$P(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n(t)\ z^n$$

ile tanımlanır.

Bunu

$$P(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\ z^{n+1}$$

$P_n(t)\ Z^{n+1}$ ifadesini acalım.

$$P_n(t)z^{n+1}=z\ P_o(t)+z^2\ P_1(t)+\ldots+z^{n+1}\ P_n(t)$$

$$=z\ [P_o(t)+z\ P_1(t)+\ldots+z^n P_n(t)]$$

$$=z\ P_1(z,t)$$

elde edilir. Türevini alırsak.

$$z.\frac{\partial P}{dt}=z\ [P_o'(t)+z\ P_1'(t)+\ldots+z^n\ P_n'\ (t)]$$

$$=z[-\lambda P_o(t)+\mu P_1(t)+z[-(\lambda+\mu)P_1(t)$$

$$+\ P_o(t)+\mu P_2(t))+z^2\ (-(\lambda+\mu)P_2(t)+\lambda P_1(t)+\mu P_3(t))\ +\ldots]$$

$$=zP_o(t)(-\lambda+z\lambda)+P_1(t)(\mu-z\lambda-z\mu+z^2\lambda)$$

$$+P_2(t)(\mu z-z^2\lambda+z^2\mu+z^3\lambda)+\ldots]$$

$$=z\{P_o\ (t)(-\lambda+z\lambda+P_1(t)[\mu(1-z)-z\lambda(1-z)]$$

$$+P_2(t)(\mu z-z^2\lambda+z^2\mu+z^3\lambda)+\ldots\}$$

$$=[(1-z)(-z\lambda P_o(t)+z\ (\mu-z\lambda)P_1(t)+z(\mu z-\lambda z^2)P_2\ (t)+\ldots]$$

$$-\mu P_o(t)+\mu P_o(t)$$

$$=(1-z)[(\mu-z\lambda)[P_o(t)+z(\mu-z\lambda)\ P_1(t)+z^2(\mu-\lambda z)P_2(t)+\ldots]-\mu P_o(t)$$

$$=(1-z)[(\mu-z\lambda)P(z,t)-\mu P_o(t) \quad \_\_\_\_ \quad (6)$$

elde edilir.

$$P(z,0)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n(0)z^n=P_i(0)\ z^i=z^i$$

$P_i(0)=1$ olduğundan $n=1$ durumu haric $P_n(0)=0$ olacağından baslangıc sartı $P(z,0)=z^i$ seklinde olur.

Elde edilen birinci mertebeden lineer kismi diferansiyel denkleme Laplance dönüsünü uygulıyalım.

$$z\ \frac{\partial P(z,t)}{\partial t}=(1-z)[(\mu-z\lambda)P(z,t)-\mu\ P_o(t)]$$

$$z\ \frac{\partial P(z,t)}{\partial t}+(1-z)\mu\ P_o(t)\ =\ (1-z)\ (\mu-\lambda z)\ P(z,t)$$

$$P(z,t)=\frac{z\dfrac{\partial P}{\partial t}+\mu(1-z)P_0(t)}{(1-z)\ (\mu-\lambda z)}$$

$$P^*(z,t)=\int_0^\infty e^{-st}\ \frac{z\dfrac{dP}{dt}+\mu(1-z)\ P_0(t)}{(1-z)(\mu-\lambda z)}\ dt$$

$$P^*(z,t)=\frac{z}{(1-z)(\mu-\lambda z)}\int_0^\infty e^{-st}\ \frac{dP}{dt}\ dt+\frac{\mu(1-z)}{(1-z)(\mu-\lambda z)}\quad e^{-st}\ P_0(t)dt$$

$$P^*(z,t)=\frac{z}{(1-z)(\mu-\lambda z)}\ (-z^i+sp^*)+\frac{\mu}{\mu-\lambda z}\ P_0^*\ (s)$$

$$P^*(z,t)=\frac{-z^{i+1}+zsp^*}{(1-z)(\mu-\lambda z)}+\frac{\mu}{(\mu-\lambda z)}\ P_0^*(s)$$

$$P^*(z,t)\left[\frac{zs}{(1-z)(\mu-\lambda z)}-1\right]=\frac{z^{i+1}-\mu(z-1)P_0\ \ (s)}{(1-z)(\mu-\lambda z)}$$

$$P^*(z,t)=\frac{z^{i+1}-\mu(z,1)\ \ P_{0(s)}^*}{zs-(1-z)(\mu-\lambda z)}\qquad \text{———}\ (7)$$

bulunur. Burada

$$\int_0^\infty e^{-st}\ \frac{dp}{dt}\ dt$$

$$=e^{-st}\ \ P\Big]_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-st}\ p\ dt=-\ z^i+sp^*$$

$$f^*(s)=\int_0^\infty e^{-st}\ f(t)\ dt\qquad \text{dir.}$$

$P^*(z,t)$, $Re(s)>0$ birim çemberinin üstünü ve içini örttüğü için (7) denkleminin $|z|=1$ çemberi üzerinde ve içindeki sınıfların çözümü sayısal çözüme karşılık gelecek şekilde seçilmelidir. Fakat sınıfın $\alpha_k(s)$ çözümü, sıfıra eşit kümelerden elde edilir.

z içinde quadratik bir çözüm

$$\alpha_k(s)=\frac{\lambda+\mu+s\pm[(\lambda+\mu+s)^2-4\mu]^{1/2}}{2\lambda}\qquad k=1,2,\ldots \qquad \text{— (8)}$$

şeklindedir. Burada karekökün pozitif reel kısımlı değeri alınmıştır.

Yani $\alpha_k(s)$ $Re(s)>0$ 'a sahiptir. $\alpha_1(s)$ nin karekökten önceki değeri pozitif işarete sahiptir.

$f(z)=(\lambda+\mu+s).z$ $\qquad$ $g(z)=-(\lambda z^2+\mu)$

$|f(z)|=|\lambda+\mu+s|>|\lambda+\mu|$

$|g(z)|=|\lambda+\mu|$

olur.

Ayrıca $|z|=1$ üzerinde $|g(z)|<|f(z)|$ olur. Böylece hem f(z) ve hem de g(z), $|z|=1$ üzerinde ve içinde analitik ve f(z) g(z) aynı çözüme sahip olur. Bu çözüm $\alpha_2(s)$ olmalı böylece $|\alpha_2(s)|<|\alpha_1(s)|$ dir. Ve $|z|=1$ üzerinde çözüm yoktur.

$$\alpha_1+\alpha_2=\frac{\lambda+\mu+s}{\lambda},\quad \alpha_1.\alpha_2=\frac{\mu}{\lambda},\quad s=-\lambda(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)$$ olmaktadır.

$z=\alpha_2(s)$ için (7) denkleminin payı sıfır olmalıdır. Ve bu değerler için $P^*(z,t)$ mevcut olmalıdır.

$P_0^*(s)=\alpha_2^{i+1}/\mu\ (1-\alpha_2)$ olarak tanımlandığından bu ifade yerine konursa

$$P^*(z,t)=\frac{z^{i+1}-[\mu(1-z)\alpha_2^{i+1}/\mu\ (1-\alpha_2)]}{-\lambda(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)z-(1-z)(\alpha_1\alpha_2\lambda-\lambda z)}\qquad \text{— (9)}$$

$$=\frac{z^{i+1}(1-\alpha_2)-(1-z)\alpha_2^{i+1}/(1-\alpha_2)}{-\lambda z+\lambda z\alpha_1+\lambda z\alpha_2-\lambda z\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_2\lambda+\lambda z+z\alpha_1\alpha_2-z^2\lambda}$$

$$=\frac{z^{i+1}-z^{i+1}\alpha_2+\alpha_2^{i+1}z-\alpha_2^{i+1}/(1-\alpha_2)}{-\lambda(\alpha_1\alpha_2+z^2-z\alpha_1-z\alpha_2)}=\frac{(z^{i+1}-\alpha_2^{i+1})-z\alpha_2(z^i-\alpha_2^i)/1-\alpha_2}{-\lambda[z(z-\alpha_2)-\alpha_1(z-\alpha_2)]}$$

$$\frac{(z-\alpha_2)[z^i+z^{i-1}\alpha_2+\ldots+\alpha_2^i]-z\alpha_2(z-\alpha_2)[z^{i-1}+z^{i-2}\alpha_2+\ldots+\alpha_2]+\alpha_2^{i+1}-\alpha_2^{i+1}}{-\lambda(z-\alpha_1)\ (z-\alpha_2)\ \ (1-\alpha_2)}$$

$$= \frac{[z^i+z^{i-1}\alpha_2+\ldots+\alpha_2^i]-\alpha_2[z^i+z^{i-1}\alpha_2+\ldots+z\alpha_2]+\alpha_2^{i+1}-\alpha_2^{i+1}}{\lambda\alpha_1(1-\alpha_1)\ (1-\alpha_2)}$$

$$= \frac{[z^i+z^{i-1}\alpha_2+\ldots+\alpha_2^i]-\alpha_2[z^i+z^{i-1}\alpha_2+\ldots+z\alpha_2^{i-1}+\alpha_2^i]+\alpha_2^{i+1}}{\lambda\alpha_1(1-\frac{z}{\alpha_1})\ (1-\alpha_2)}$$

$$= \frac{(z+z^{i-1}\alpha_2+\ldots+\alpha_2^i)(1-\alpha_2)+\alpha_2^{i+1}}{\lambda\alpha_1(1-\frac{z}{\alpha_1})(1-\alpha_2)}$$

$(1-\frac{z}{\alpha_1})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{z}{\alpha_1})^k$ olduğundan

$$P^*(z,t)=\frac{1}{\lambda\alpha_1}(z^i+\alpha_2\ z^{i-1}+\ldots+\alpha_2^i)\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z}{\alpha_1})^k+\frac{\alpha_2^{i+1}}{\lambda\alpha_2(1-\alpha_2)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\alpha_1}$$

bulunur. $|z/\alpha_1|<1$ dir ——(10)

$P_n^*(s)$,olasılık çıkartan fonksiyonunun Laplance dönüşümü içinde $z^n$ in katsayısıdır.(10) denklemindeki $z^n$ in katsayısının

$$\frac{\alpha_2^{n+1}}{\lambda\alpha_1^{n+1}(1-\alpha_2)} = \frac{\alpha_2^{n+1}}{\lambda\alpha_1^{n+1}}\quad(1+\alpha_2+\alpha_2^2+\ldots)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\ (\mu/\lambda)^{n+1}\sum_{k=n+i+2}^{\infty}(\mu/\lambda)^k\ \frac{1}{\alpha_1^k}$$

olduğu görülür. Burada $|\alpha_2|<1$ ve $\alpha_1.\alpha_2=\frac{\mu}{\lambda}$ olduğu dikkate alınmıştır.

$P^*(z,t)$ nin sol tarafındaki ilk terim serisi içindeki sol çarpan ile z nin uygun kuvvetleri çarpılarak ve $z^n$ in katsayıları toplanarak $z^n$ in geriye kalan kuvvetleri bulunur.

Burada

$$\frac{1}{\lambda\alpha_1} = \frac{\alpha_2^m}{\alpha_1^{n-i+m}} = \frac{1}{\lambda\alpha_1}\ \frac{\alpha_2^m\alpha_1^m}{\alpha_1^{n-i+2m}} = \frac{(\mu/\lambda)^m}{\lambda\alpha^{n-+2m-1}} \quad — (11)$$

şeklindedir. Böylece $n\geq i$ için

$$P^*(s) = \frac{1}{\lambda}\ [\frac{1}{\alpha_1^{n-i+1}}+\frac{\mu/}{\alpha_1^{n-i+3}}+\ldots+\frac{(\mu/\lambda)}{\alpha_1^{n+i+1}}$$

$$+(\lambda/\mu)^{n+1}\sum_{k=n+i+2}^{\infty}(\mu/\lambda)^k\ /\alpha_1^k] \quad —— (12)$$

elde edilir. $P_n(t)$

$$P_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\, P_n^*(s)\, ds$$

ile verilen (12) nin ters laplance dönüşümüdür. Ters dönüşümü elde etmek için önce "$f^*(s)$,$f(t)$ nin bir laplance dönüşümü ise $f^*(s+t)$, $e^{-at}f(t)$ nin bir laplance dönüşümüdür. " teoremi kullanılacaktır.

Aynı zamanda ters dönüşümün $P^*(s)$ nin her bir terimi ile toplanabilir.Yani sol taraf üzerine dağıtılabilir. 18 nolu denklemde $\alpha_1$ de s ye $\lambda+\mu$ ilave edilmiştir. Sonuç olarak (11)deki her terimin ters dönüşümü, fonksiyona uygulanır. Fonksiyon için laplance dönüşümü $(\alpha_1)^{-v}$ seklindedir.

$$(2\lambda)^{v}\ v(2\sqrt{\lambda\mu}\ )^{-v}\ t^{-1}\ I_v(2\sqrt{\lambda\mu}t)$$

$$=v(\sqrt{\lambda/\mu})^{v}\ t^{-1}\ I_v(2\sqrt{\lambda\mu}t) \qquad \text{—— (13)}$$

ifadesinin laplance dönüşümü.

$$[s+\sqrt{s^2 4\lambda\mu}\ /2\lambda]^{-v}$$

şeklindedir.

$$I_v(z)=\sum_{k=o}^{\infty}\frac{(z/2)^{v+2k}}{k!\Gamma(v+k+1)}$$

$$Iv(z)=i^{-v}\ Jv(iz)$$

$$I_v(Z)=\frac{z^{v}}{2^{v}v!}\qquad z\rightarrow o$$

$$I_v(z)=\frac{e^{z}}{\sqrt{2\pi z}} \qquad \text{——(14)}$$

yazılır. Sonuç olarak.

$$P_n(t)=\frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda}\Big[\Big(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\ \Big)^{n-i+1}(n-i+1)t^{-1}I_{n-i+1}(2\sqrt{\lambda\mu}t)$$

$$+\Big(\frac{\mu}{\lambda}\Big)\Big(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\Big)^{n-i+3}\ (n-i+3)t^{-1}\ I_{n-i+3}\ (2\sqrt{\lambda\mu}t)+\ldots$$

$$+\Big(\frac{\mu}{\lambda}\Big)^{i}\ \Big(\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\Big)^{n+i+1}\ (n+i+1)\ t^{-1}\ I_{n+i+1}\ (2\sqrt{\lambda\mu}t)+\ldots$$

$$+\Big(\frac{\lambda}{\mu}\Big)^{n-1}\sum_{k=n+i+2}^{\infty}\Big(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\Big)^{k}\ k\ t^{-1}\ I_k(2\sqrt{\lambda\mu}t)\Big] \qquad \text{——(15)}$$

yazılır.

## KAYNAKLAR


1- Cınlar, E.(1975) : Introduction to stochostik processes, prentice- Hall, Inc.Enqlewood cliffs, New. Jercey

2- İnal,H.C.(1988) : Olasılıksal süreclere giris Hacettepe Univ. yayınları A.I.56, Ankara.

3- Karlin, S., and Taylor, H.(1975):A fırst course in stochastic processes, Academis press, inc. s. 117-166.

4- Saaty, T.L.(1961): Elevents of Quening theory, McGraw-Hill book company, Newyork.