EURASIAN JOURNAL OF TEACHER EDUCATION

Year: 2022 Volume:3 Number:1 Pages:39-54

Secondary Mathematics Teacher Candidates' Geometric Proof Process: A Case Study

Mesut Öztürk[1], Abdullah Kaplan[2]

[1] Bayburt Üniversitesi, Türkiye, mesutozturk@live.com, ORCID: 0000-0002-2163-3769

[2] Atatürk Üniversitesi, Türkiye, kaplan5866@hotmail.com, ORCID: 0000-0002-1860-852X

To cite this article: Öztürk, M. & Kaplan, A. (2022). Secondary mathematics teacher candidates' geometric proof process: A case study. *Eurasian Journal of Teacher Education, 3*(1), 39-54.

Received: 09.13.2021 Accepted: 02.07.2022

Abstract

This study was carried out in order to examine the geometry proof process of secondary school mathematics teacher candidates. Eight Turkish secondary school mathematics teacher candidates participated in this research, in which the case study model, one of the qualitative research methods, was used. Activities cards and think-aloud protocols were used to collect the data of the study. Two different activity cards were used in the study. The first activity card prepared includes the geometry proposition. Content analysis method was used in the analysis of the data of the study. In the analysis of the data, the data was first analyzed and coded. Then, the acquired skills were categorized according to the common features of the codes. While most of the results reached in the study were supported by the literature, some important and original findings were also reached. One of the most important results reached in this study is that the participants see drawing figures and performing algebraic operations as a necessity while proving geometry.

Keywords: Activity card, Algebraic operation, Drawing shape, Reading proposition, Think aloud protocol

Article Type:

Original article

Acknowledge:

It is derived from PhD dissertation of Mesut Öztürk conducted under the supervision of Abdullah Kaplan.

Ethics Declaration:

In this study, all the rules stated to be followed within the scope of "Higher Education Institutions Scientific Research and Publication Ethics Directive" were followed. None of the actions specified under the title of "Actions Contrary to Scientific Research and Publication Ethics", which is the second part of the directive, were not carried out.

The data of the study were collected before 2020 and there is no ethics committee permission document. However, a special permit was obtained from the Ministry of National Education.

Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Geometrik İspat Yapma Süreci: Bir Durum Çalışması

Öz

Bu çalışma ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının geometrik ispat yapma sürecini incelemek amacıyla yürütülmüştür. Nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması modelinin kullanıldığı bu araştırmaya sekiz ortaöğretim matematik öğretmeni adayı katılmıştır. Çalışmanın verilerinin toplanmasında etkinlik kartları ve sesli düşünme protokolleri kullanılmıştır. Çalışmada iki farklı etkinlik kartı kullanılmıştır. Hazırlanan ilk etkinlik kartı geometri önermesini içermektedir. Çalışmanın verilerinin analizinde içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. Verilerin analizinde ilk olarak veriler çözümlenerek kodlanmıştır. Ardından kodların ortak özelliklerine göre elde edilen beceriler kategorilendirilmiştir. Çalışmada ulaşılan sonuçların birçoğu alan yazınla desteklenirken, bazı önemli ve özgün bulgulara da ulaşılmıştır. Bu çalışmada ulaşılan en önemli sonuçlardan biri katılımcıların geometrik ispat yaparken ispat yapmada şekil çizmeyi ve cebirsel işlem yapmayı bir zorunluluk olarak görmeleridir.

Anahtar Kelimeler: Cebirsel işlem, Etkinlik kartı, Önermeyi okuma, Sesli düşünme protokolü, Şekil çizme

Giriş

Geometri matematiğin nokta, doğru, düzlem gibi kavramlarını ve bu kavramların birbiriyle olan ilişkilerini inceleyen; uzunluk, açı, alan gibi ölçüleri konu edinen dalıdır (Baykul, 2009). Geometrinin gelişiminin temelinde birbirini izleyen önermeler yatmaktadır. Yani önce bir önermenin doğruluğu gösterilip sonra bu önermeye dayalı yeni bilgilerin doğruluğu gösterilir (Altun, 2015; Hızarcı, Kaplan, İpek, Işık & Elmas, 2009). Geometrinin temellerini atan Öklid, geometrik kavramların doğruluğunu ispatlama yoluna gitmiştir. Öklid bunu yaparken ilk olarak doğruluğu sezgisel olarak anlaşılabilen; ancak matematiksel olarak ispatlanamayan kavramları var olarak kabul etmiştir. Bu kavramları aksiyom ve postulat olarak isimlendirmiştir (Burton, 2006). Öklid; geometrideki teoremleri, bu aksiyom ve postulatlara dayandırarak oluşturmuştur (Doğan, 2013). Aksiyomların ve postulatların ispatlanan kavramlar değil kabul edilen kavramlar olması, ilerleyen dönemde üzerine yapılan tartışmaları yoğunlaştırmıştır. Çünkü ispat matematiksel bilgi üretmenin temel yoludur (Yıldırım, 2000). İspat, matematikte kurallı akıl yürütmenin yollarından biridir (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). İspat, matematiksel kavramların oluşturulmasında, bilginin organize edilmesinde önemli role sahiptir (Herbst, 2002; Uğurel vd., 2016). Pek çok matematik öğretim programı da ispat yapmaya yer vererek ispatın önemini vurgulamıştır (Herbst, 2002). Bu vurgunun nedeni ispatın matematik öğretimi için önemli bir kavram olmasıdır. İspat sürecindeki bilişsel durumları ortaya koymak, ispat öğretiminde izlenecek yollar için de belirleyici faktör olacaktır (Harel & Sowder, 2007). Güler (2013) de ispatın doğasını anlamak için ispat sürecini incelemenin gerekli olduğunu belirtmiştir. Matematik öğretmenlerine ve matematik öğretmeni adaylarına daha iyi eğitim verilerek, öğretimin kalitesinin arttırılması ve ispatın doğasının daha detaylı açıklanabilmesi için ispat yapma süreçlerinin bilişsel boyutuyla derinlemesine incelenmesi gerekmektedir. Bu araştırmada geometrik ispat yapma süreci incelenmiş olup elde edilen sonuçların matematik öğretmeni yetiştirme sürecine katkıda bulunması beklenmektedir.

Kuramsal Çerçeve

Bu araştırmada matematiksel ispat yapma süreci sosyal bilişsel kuram çerçevesinde ele alınmıştır. Özyeterlik ve özdüzenleme sosyal bilişsel kuramın temel kavramlarından ikisidir. Matematiksel ispat yapmaya yönelik özyeterlik, matematiksel ispat yapmak için gerekli eylemleri organize etme ve yürütme konusunda bireyin kendi yeteneklerine olan inancı olarak tanımlanır (Regier & Savic, 2020). Özdüzenleme ise bireyin kendi bilişsel süreçlerinin farkında olup düzenlemesi biçiminde tanımlanabilir (Zimmerman, 2000). Matematiksel ispat yapma süreci için bu iki kavram oldukça önemlidir. Çünkü matematiksel ispat yapma sürecinde bireyin kendisine güvenmesi, ispat yapabileceğine inanması ve ispat yapmak için gerekli becerileri düzenleyebilmesi bireyin ispat yapmada başarılı olmasına kaynaklık edebilir (Demircioğlu & Polat, 2016; Shongwe & Mudaly, 2021; Viholainen, Tossavainen, Viitala & Johansson, 2019). Bununla birlikte sosyal bilişsel kuramda önemli olan unsurlardan biri de sosyal destektir (Zimmerman, 2000). Alqassab, Strijbos ve Ufer (2018) özellikle akran geribildiriminin (sosyal destek) öğrencilerin ispat yapması için önemli olduğunu vurgulamıştır. Alqassab ve diğerleri (2018) ispat geribildiriminin öğrencilerin düşünmesini ve kendini değerlendirmesini sağladığını ifade etmiştir. Bu bağlamda bu çalışmada ispat yapma becerisi sosyal bilişsel kuram çerçevesinde ele alınmıştır.

Matematiksel İspat ve İspatlama

İspat kavramı matematik, adalet, istatistik, fen bilimleri, ekonomi ve matematik eğitimi gibi pek çok alanda kullanılmaktadır. İspat matematikte aritmetikten sonra ortaya çıkmış ve matematiğin merkezi haline gelmiştir. Temeli aksiyomlara dayandırılan ispat kavramı matematikte başarının en üst noktası olarak görülmektedir (Hašek, 2019; Öztürk & Kaplan, 2019). Genel olarak bir yargının doğruluğunu gösterme olarak kullanılan ispat, matematik eğitiminde biraz daha farklı ve derin bir anlama sahiptir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016). İspat matematikte formülleri çıkarmanın bir yolu olarak görülürken, matematik eğitiminde bilgilerin doğruluğunu göstermenin yoludur (Hašek, 2019).

Matematik eğitiminde ispat, doğruluğu daha önceden gösterilmiş olan önermelerin doğruluğuna veya yanlışlığına bireyleri ikna etmedir (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016; Bloch, 2011). Gerstein (2012) ispat kavramını, bir durumun doğruluğunu değerlendirmede kullanılan kurallar bütünü olarak tanımlamıştır. Karpuz ve Atasoy (2020) ispatı; tanım, teorem ve aksiyom gibi verilerden yola çıkarak mantık kuralları çerçevesinde bir önermenin doğruluğunu gösterme şeklinde ifade etmiştir. Matematiksel ispat yapma süreci ispatlama olarak adlandırılmaktadır (Aydoğdu-İskenderoğlu, 2016). Yıldırım (2000) ispatlamayı "Bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu (ya da yanlışlığını) yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabası" biçiminde tanımlamıştır. İspatlama süreci önerme, teorem, aksiyom, postulat ve lemma kavramlarını içermektedir (Öztürk & Kaplan, 2019).

Chinnappan, Ekanayake ve Brown (2012) geometri alan bilgisi, genel problem çözme becerisi ve geometri akıl yürütme becerisi becerisinin ispat yapmayı etkileyen üç temel unsur olduğunu ifade etmiştir. Bu unsurlardan en önemlisinin geometri alan bilgisi olduğunu vurgulamıştır. Bu araştırma matematik öğretmeni adaylarının geometri alan bilgisi üzerine odaklanmıştır.

Matematiksel İspat Yapma Süreci

Matematiksel ispat yapma süreci problem çözme süreci ile birçok açıdan benzerlik göstermektedir. Problem çözme sürecinde olduğu gibi ispat sürecinde de problemin okunması ve anlaşılması oldukça önemlidir. Problem çözme ve ispat yapma sürecini inceleyen araştırmalarda öğretmen adaylarının problem çözerken problemi çözemediklerinde problemi tekrar okuyarak kontrol ettikleri (Yimer & Ellerton, 2006), ispatı tamamlayamadığında da önermeyi tekrar okuyarak gözden geçirdiği (Öztürk, 2021) belirtilmiştir. Alan yazında pek çok araştırma katılımcıların problemi anlamak için (Altun & Arslan, 2006; Öztürk, 2021; Schraw & Dennison, 1994; Van Garderen, 2006; Yang, 2012) şekil çizdiğini göstermiştir. Llinares ve Clemente (2019) geometri bilgisinin görselleştirmeyle ilişkili olduğunu ve görselleştirmenin geometri ispatlarını başarıya ulaştırmak için önemli olduğunu ifade etmiştir. Karpuz ve Atasoy (2020) da, geometri ispatlarını yapabilmenin şekil çizme ve şeklin yorumlanması (çizilen veya verilen) yoluyla mümkün olduğunu belirtmiştir.

Yapılan araştırmalar problem çözme veya ispat yapma sürecinde katılımcıların çözüm yolu belirlediklerini ifade etmiştir. Başka bir ifade ile araştırmacılar matematik öğretmeni adaylarının ispat yaparken ve problem çözerken plan yaptıklarını ortaya koymuştur (Öztürk, 2021). Ancak araştırmalar katılımcıların sembolik işlem yapmada zorlandıklarını ve işlemlerini sözel olarak ifade ettiklerini belirtmiştir (Arslan & Yıldız, 2010; Nool, 2012). İspat yapma sürecini etkileyen birçok unsur vardır. Bu unsurlardan belki de en önemlisi ispat önermesini okuma ve anlamadır (Alqassab vd., 2018).

Matematiksel ispat yapma sürecini Yeşilyurt Çetin ve Dikici (2021) detaylı olarak ele alarak ifade etmiştir. Araştırmacılar bu sürecin (1) hipotez ve gerekçelendirmeyi inceleme, (2) ispat yöntemini belirleme, (3) hipotez, tanım ve özellikleri kullanma, (4) kavramsal ve işlemsel bilgileri kullanma, (5) matematiksel notasyonları kullanarak ispatı tamamlama aşamalarından oluştuğunu vurgulamıştır. Matematiksel ispat yapmada bilişsel ve üstbilişsel becerilerin kullanımı önemlidir (Öztürk, Akkan & Kaplan, 2019). Viholainen ve diğerleri (2019) matematiksel ispat yapma için üstbilişsel izleme ve değerlendirmenin gerekli olduğunu ve bu tür üstbilişsel becerileri kullanan bireylerin ispatı daha derinlemesine anlayabileceğini ifade etmiştir.

Alan Yazın Derleme

İspata yönelik çalışmalar incelendiğinde yapılan çalışmaların ispatı anlama, ispat süreçlerini inceleme ve ispat öğretimi olarak üç temada ele alındığı söylenebilir. Bu çalışma ispat sürecini incelemeye yönelik yapılmış olup ilgili alan yazında bu temaya yönelik yapılan çalışmalar; ispatın geçerliğini değerlendirme (Ceylan, 2012; Harel & Sowder, 1998; Varghese, 2011; Zaimoğlu, 2012), ispatı gerekçelendirme (Alcock, 2010; Alcock & Weber, 2005; Komatsu & Jones, 2021; Stylianides & Stylianides, 2009) ve ispat sürecindeki becerileri inceleme amacıyla yapılmıştır (Karpuz & Atasoy, 2020; Ko & Rose, 2021; Llinares & Clemente, 2019). Bu çalışma ispat sürecindeki becerileri bilişsel açıdan incelemeye yöneliktir.

İspat sürecini incelemeye yönelik yapılan çalışmalarda katılımcıların ispatı farklı şekillerde okudukları (Yang & Lin, 2008) şekil çizerek ispatı kolaylaştırmaya çalıştıkları (Karpuz, Koparan & Güven, 2014; Senk, 1985; Yestness, 2012), sembolik ifade kullandıkları (Fukawa-Connelly, 2012), ispat sürecinde örüntü genelleme yaptıkları (Krutetskii, 1976) belirlenmiştir. Ayrıca çalışmalarda katılımcıların teoremlerin ispatını mantıksal olarak anlamadıkları, bunun yerine ezberleyerek ispat yaptıkları tespit edilmiştir (Güven, Çelik & Karataş, 2005; Hoffer, 1981; Uğurel vd., 2016). Barnard ve Tall (1997) yaptıkları çalışmada sözel ifadelerden cebirsel ifadelere geçişte güçlük yaşadıklarını, aşina oldukları cebirsel ifadeleri kullandıklarını, cebirsel ifadelerle sözel temsiller arasında ilişki kurmakta güçlük yaşadıklarını tespit etmiştir. Yang (2012) yaptığı çalışmada öğrencilerin bilişsel okumaları, üst bilişsel okumaları ve geometri ispatlarını okuyup anlama becerilerini yapısal eşitlik modellemesi ile incelemiştir. Bunun için bir ölçek geliştirmiştir. Ölçekte beceriler bilişsel ve üst bilişsel olarak ayrılmıştır. Araştırmacının belirttiği bilişsel becerilerden bazıları şunlardır: ispat önermesini ilk kez okuma, önemli yerlerini belirlemek için altını çizme, önermeyi anlamak için şekil çizme. Öztürk ve Kaplan (2019) matematik öğretmeni ve matematik öğretmeni adaylarının cebirsel ispat yapma sürecini incelemeye yönelik araştırma yürütmüştür. Araştırmanın sonucunda bazı katılımcıların ispat önermesini ilk okumada bütün olarak okuduklarını, bazılarının ise adım adım okuduklarını, ispatın hipotez-hükümlerini ve amaçlarını belirlediklerini, sözel olarak önermenin ispatını ifade ettiklerini ve ezberledikleri yollarla ispat yapmaya çalıştıklarını tespit etmiştir. Öztürk (2021) ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenlerinin sayılar teorisinde ispat yapma sürecini bilişsel ve üstbilişsel inceleyen bir araştırma yürütmüştür. Araştırmanın sonucunda öğretmenlerin ispat önermesini ilk okumada bütün olarak veya adım adım okuduklarını belirlemiştir. Ayrıca öğretmenlerin ispat yaparken şekil çizdiklerini belirlemiştir. Karpuz ve Atasoy (2020) ortaöğretim matematik öğretmenlerinin geometrik ispat yapmadaki alan bilgilerini incelemiştir. Araştırmanın sonucunda öğretmenlerin şekil-kavram etkileşiminden kaynaklanan ispat hatalarıyla başa çıkmada yeterince alan bilgisine sahip olmadıklarını tespit etmişlerdir. Ayrıca öğretmenlerin şekillerden elde ettikleri bilgileri aksiyom veya teoremlere dayandıramadıklarını belirlemişlerdir.

Bu çalışma ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının geometrik ispat yapma sürecini incelemeyi amaçlamıştır. Çalışmada aşağıdaki araştırma problemlerine yanıt aranmıştır:

1. Ortaöğretim matematik öğretmeni adayları geometrik ispat yapma sürecinde ispat önermesi okumaya yönelik ne tür beceriler sergilemektedirler?
2. Ortaöğretim matematik öğretmeni adayları geometrik ispat yapma sürecinde şekil çizmeye yönelik ne tür beceriler sergilemektedirler?
3. Ortaöğretim matematik öğretmeni adayları geometrik ispat yapma sürecinde işlem sürecine yönelik ne tür beceriler sergilemektedirler?

Yöntem

Araştırma Modeli

Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması modeli kullanılmıştır. Durum çalışması sınırları belli olan bir durumdan bir kesitin ele alınarak detaylı biçimde incelenmesinin istendiği durumlarda kullanılır (Merriam, 2009/2013). Bu araştırmada ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının geometrik ispat yapma süreci iki geometri önermesi üzerinden ele alınıp değerlendirilmiştir. Bu nedenle durum çalışması modeli kullanılmıştır.

Katılımcılar

Çalışma 2015-2016 akademik yılında tamamı Türk sekiz ortaöğretim matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Çalışmanın katılımcıları amaçlı örnekleme yöntemlerinden tipik durum örnekleme yöntemi ile seçilmiştir. Tipik durum örnekleme yöntemi evreni temsil edecek nitelikteki bireylerin seçilerek örnekleme dâhil edildiği örneklem seçim yöntemidir (Büyüköztürk, Kılıç Çakmak, Akgün, Karadeniz & Demirel, 2021). Araştırmada ortaöğretim matematik öğretmenlerinin ispat yapma süreçleri için örnek bir durum oluşturulacağından tipik durum örnekleme yönteminin kullanılması uygun görülmüştür. Çalışmanın katılımcılarının belirlenmesinde ikinci araştırmacının gözlemleri doğrultusunda sınıfı temsil eden son sınıftan dört ve birinci sınıftan dört öğretmen adayı seçilerek çalışmaya dâhil edilmiştir. Son sınıf öğretmen adaylarının ikisi kız, ikisi erkektir. Son sınıf öğretmen adaylarına "S" harfi ile başlayan kod isimler verilmiştir. Birinci sınıf öğretmen adaylarının üçü kız, biri erkektir. Bu öğretmen adaylarına "B" harfi ile başlayan takma adlar verilmiştir.

Veri Toplama Araçları

Çalışmanın verilerinin toplanmasında etkinlik kartları ve sesli düşünme protokolleri kullanılmıştır. Çalışmada iki farklı etkinlik kartı kullanılmıştır ve bu etkinlik kartlarının her birinde birer geometri önermesi bulunmaktadır. Hazırlanan ilk etkinlik kartında yer alan soru üçgende açı bağıntılarıyla ilgilidir. Bu sorunun seçilmesinin temel nedeni eğitim ortamının her kademesinde karşılaşılması muhtemel bir önerme olmasıdır. Bunun yanı sıra bu önerme ispat yapma sürecini incelemede veri elde etmek için uygundur. Soruda katılımcıların temel geometri bilgilerini kullanmaları yeterli olup derinlemesine bir bilgiye ihtiyaç duyulmamaktadır. Ayrıca önerme katılımcıların ek çizim yapmasını gerektirmemektedir. Form bir matematik eğitimi (doçent) bir de bilişsel psikoloji (doçent) alanında uzman öğretim üyesine sunularak sorunun geometri ispat sürecini bilişsel açıdan incelemeye uygun olup olmadığına yönelik görüş alınmıştır. Her iki uzmanda sorunun uygun olduğunu ifade etmiştir. İlk etkinlik kartında hazırlanan ispat sorusu dört öğretmene uygulanmış ve sorunun dilinin yeterince anlaşılır olmadığı belirlenmiştir. Öğretmenlerden alınan görüş doğrultusunda sorunun dil düzeltmesi yapılmış ve etkinlik kartında kullanılmak üzere ispat sorusuna son şekli verilmiştir. Önermelerin ispatlanmasında sonuç odaklı değil süreç odaklı uygulama yapılmıştır. Bu nedenle öğretmenlerin doğru sonuca ulaşmasından ziyade nasıl çözüm yaptığı incelenmiştir.

İkinci etkinlik kartındaki ispat sorusu Kosinüs Teoremidir. Bu sorunun seçilmesinin temel nedeni önermenin analitik, sentetik ve vektörel olarak ispatının yapılabilmesidir. Böylece öğretmen adaylarının hangi tür ispat yöntemini kullanacakları da belirlenmiş olacaktır. Önermenin özel bir teorem ismine sahip olması (Kosinüs Teoremi) bu önermeyi diğer geometri sorusundan ayırmaktadır. Ancak soruda teoremin ismi kullanılmayarak önerme açık biçimde yazılmıştır. Bu soru katılımcıların ezberleyerek ispat yapabilecekleri gibi düşünme süreçlerini kullanarak da yapabilecekleri bir önermedir. Sorunun geometri ispat sürecini bilişsel açıdan incelemeye uygun olup olmadığına yönelik iki uzmandan (matematik eğitimi alanında doçent, bilişsel psikoloji alanında doçent) görüş alınmıştır. Her iki uzmanda sorunun uygun olduğunu ifade etmiştir. Hazırlanan ispat sorusu dört öğretmene uygulanmış ve sorunun dilinin yeterince anlaşılır olduğu belirlenmiştir.

Sesli düşünme protokolü problem çözme sürecini incelemede kullanılan yollardan biridir. Bu yöntemde problem çözücü hem görüntülü hem de sözel olarak kayda alınır (Smith & Kosslyn, 2007/2014). Bu yöntem kişilerin iç dünyasında gerçekleşen durumu derinlemesine ortaya koyabilmek amacıyla kullanılır (Kaplan & Simon, 1990). Sesli düşünme protokolünde katılımcıların ne yaptıklarından ziyade ne düşündükleri önemlidir. Sesli düşünme protokolünde katılımcıya bir görev verilir (etkinlik kartı) ve bu görev sürecine yönelik sorular sorulur (Vandevelde, Keer, Schellings & Hout-Wolters, 2015). Sesli düşünme protokolünün uygulanma sürecinde ilk olarak katılımcıya sesli düşünme protokolü hakkında bilgi verilmiştir. Sesli düşünme protokolünde katılımcıya görüşmelerin kayıt altına alınacağı ve çalışmanın amacı hakkında bilgi verilmiş, süreçte düşündüklerinin hepsini sesli olarak ifade etmesi gerektiği belirtilmiştir. Katılımcıdan sesli düşünme protokolünde ne yaptığından ziyade, ne düşündüğünü ifade etmesi istendiği vurgulanmış, ardından katılımcının etkinlik kartında bulunan görevi yerine getirmesi istenmiştir.

Verilerin Analizi

Çalışmanın verilerinin analizinde içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. Verilerin analizinde ilk olarak veriler çözümlenerek kodlanmıştır. Başka bir ifadeyle ispat yapma sürecinde sergilenen beceriler tespit edilmiştir. Ardından kodların ortak özelliklerine göre elde edilen beceriler kategorilendirilmiştir. Çalışmada elde edilen verilerin sunumunda öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının görüşlerinden doğrudan aktarmalar yapılmış ve etkinlik kartlarından görüntüler sunulmuştur.

Kodlamalar matematik eğitimi alanında uzman bir öğretim üyesine (matematik eğitimi alanında doçent) sunulmuş ve ondan "uygun/uygun değil" şeklinde görüş belirtmesi istenmiştir. Öğretim üyesi araştırmacının belirttiği verilerin %40'ı için bu değerlendirme işlemini yapmıştır. Ardından kodlayıcılar arası güvenirlik CohenKappa formülü ile hesaplanmıştır. Kodlayıcılar arası güvenirlik .84 olarak bulunmuştur. "Uygun değil" biçiminde ifade edilen kodlarda araştırmacı ve uzman bir araya gelmiş; kodun kalması, değiştirilmesi veya çıkarılması durumlarını tartışmışlardır ve bir karara varmışlardır. Daha sonra yapılan kodlamalar sonucunda kategoriler oluşturulmuştur.

Geçerlik ve Güvenirlik

Çalışmada dış geçerliği sağlamak için örneklem detaylı biçimde tanımlanmış ve katılımcı özellikleri tüm detaylarıyla ortaya konulmuştur. Bunun yanı sıra veri toplamada farklı veri toplama araçları bir arada kullanılmış ve katılımcıların görüşleri ile etkinlik kartlarından görsellere yer verilmiştir. İç geçerliğin sağlanması için ilk olarak metodolojik çeşitleme yapılmasıdır. Çalışmada sesli düşünme protokolü, gözlem ve etkinlik kartı birbirleriyle karşılaştırılmıştır. Bu şekilde üç veri toplama aracının örtüşen ve farklı olan kısımları ortaya konulmaya çalışılmıştır. İkinci olarak katılımcı doğrulaması yapılmıştır. Bunun için kodlama sonrasında katılımcılarla tekrar görüşülerek sesli düşünme protokolünde kurduğu cümlelerden çıkarılan kodlar kendilerine sunularak doğruluğunu uygun/uygun değil şeklinde değerlendirmeleri istenmiştir. Katılımcıların tamamı kodlamaların uygun olduğu yönünde görüş belirtmişlerdir. Üçüncü olarak araştırmacı çeşitlemesidir. Bunun için veri toplama süreci ayrıntılı biçimde betimlenmiş ve çalışma sürecinin tamamı alanında uzman bir öğretim üyesine (matematik eğitimi alanında uzman doçent) kontrol ettirilerek ilerlenmiştir. Çalışmanın dış güvenirliğini sağlamak amacıyla veri toplama sürecinde yapılan görüşmeler ses kayıt cihazıyla kayıt altına alınmıştır. Ayrıca doğrudan aktarmaların sunumunda görüşme süresi ve transkriptte ifadenin geçtiği satırın numarasına yer verilmiştir.

İç güvenirliği sağlamak için araştırma problemine uygun araştırma modeli kullanılmış, seçilen araştırma modeline uygun olarak katılımcılar ve veri toplama araçları belirlenmiştir.

Toplanan veriler de araştırma problemine uygun olarak analiz edilmiştir. Ayrıca çalışmanın genellenebilirliğini arttırmak amacıyla karma araştırma yöntemi belirlenmiştir. Buna rağmen araştırma sonuçlarında genellemeler yapılmamış sadece analitik genellemelere yer verilmiştir. Çalışma tüm etik kurallara uyularak yürütülmüştür. Yine etik kurallar çerçevesinde katılımcıların kendi isimleri kullanılmamış, katılımcılar için kod isimler kullanılmıştır.

Etik Beyan

Yapılan bu çalışmada "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması belirtilen tüm kurallara uyulmuştur. Yönergenin ikinci bölümü olan "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbiri gerçekleştirilmemiştir. Çalışmanın verileri 2020 yılı öncesinde toplanmıştır ve etik kurul izin belgesi bulunmamaktadır. Ancak Milli Eğitim Bakanlığı'ndan özel izin belgesi alınmıştır.

Bulgular

Çalışmada toplanan verilere uygulanan içerik analizi sonucunda üç kategori belirlenmiştir: "İspat önermesini okuma", "Şekil çizme" ve "İşlem süreci". Bu kategoriler altındaki kodlar aşağıda detaylı biçimde açıklanmıştır.

Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Yapma Sürecinde İspat Önermesini Okumaya Yönelik Becerileri

Çalışmaya katılan matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma sürecinde sergiledikleri becerilere yönelik ilk kategori "ispat önermesini okuma" kategorisidir. İspat önermesini okuma kategorisinde "ispat önermesini ilk kez okur.", "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler.", "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür.", "Çizeceği şekle bağlı olarak önermede bazı bölümlerin altını çizer.", "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler." ve "Sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerinin doğruluğunu kontrol eder." kodları elde edilmiştir.

Çalışmaya katılan matematik öğretmeni adaylarının çoğu "İspat önermesini ilk kez okur." kodunu sergilemiştir. Bu kodun belirlendiği katılımcılar önermeyi duraksamadan bütün bir şekilde okumuştur. "İspat önermesini ilk kez okur." kodu görüşme ve gözlem verilerinden elde edilmiştir. Bu beceriyi sergilediği belirlenen katılımcılar önermeyi bütün olarak okudukları için bu bölümde katılımcıların ifadelerine yer verilememiştir.

Çalışmaya katılan bazı matematik öğretmeni adayları "İspat önermesini adım adım okuyarak ilerler." kodunu sergilemiştir. Bu kodu sergileyen Seda'nın "[02.51] *Sorunun ilk bölümünü hallettiğimi düşünüyorum. Yani sorunun virgülden önceki kısmını şekle döktüm*. (Satır, 23-24)." ifadeleri ispat önermesini adım adım okuyarak ilerlediğini göstermektedir.

Çalışmaya katılan matematik öğretmeni adaylarının "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." becerisini sergilediği görülmüştür. Etkinlik temelli görüşmeler sırasında öğretmen adayı Samet birinci etkinlik kartında yer alan ispatı yaparken araştırmacı "[03.11] *Şu an önermeyi tekrar okuyorsunuz, tekrar okumanızdaki amaç nedir?* (Satır, 21)" sorusunu sormuştur. Sorunun ardından öğretmen adayı "[03.15] *Kesişimlerinin oluşturduğu açının ölçüsünü kavrayamadığım için soruyu tekrardan okuyorum…* [Sessiz düşünmektedir] (Satır, 22-23)" şeklinde cevap verdikten sonra düşünmüştür. Bu davranışı Samet'in "Önermeyi anlamadığında birkaç kez okur ve verilenler üzerine düşünür." kodunu sergilediğinin göstergesidir.

Çalışmaya katılan matematik öğretmeni adaylarından Berna "Çizeceği şekle bağlı olarak önermede bazı bölümlerin altını çizer." kodunu sergilemiştir. Öğretmen adayının "[02.46] *Şekilde göstereceğim yerlerin -şekil için gerekli olan yerlerin- altını çizdim. İki tane dış açıortay dedi. Dış açıortayı şekil üzerinde çizmem gerekiyor. Bu nedenle iki dış açıortay yazan bölümün altını çizdim.* (Satır, 19-21)" cümleleri bu kodu sergilediğinin göstergesidir.

Çalışmada ulaşılan bir başka kod "İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirler." kodudur. Bu kodun belirlendiği katılımcılardan Serap'ın birinci etkinlik kartında kullandığı ifadeler şöyledir:

> "[05.49] Bizden istenilen B açısının yarısından 90'dan çıkardığımızda D açısını bulmamız. Yani D açısına eşit olması isteniyor… Öyle olduğunu göstermemizi istiyor. Dış açıortayın yarısına x,x vey,y diyelim. Buradan B açısının x ve y cinsinden değerini bulup, bu açının yarısından 90 derece çıkartılınca D açısı elde ediliyor mu ona bakmak gerekir. (Satır, 26-29)."

Katılımcının ifadeleri incelendiğinde katılımcının hipotez-hüküm ve amaçları belirlediği görülmektedir. İspatın hipotez-hüküm ve amaçlarını belirlediği tespit edilen bir başka katılımcı Seda'dır.

> "[02.52] Sorunun virgülden önceki kısmını şekle döktüm. Bundan sonraki kısım biraz daha yorum ve benden istenilen şey… Kesişimleri bu nokta. Bu noktada oluşan açı burası [y-açısını göstermektedir]. Bu açının yani komşu olmayan iç açının yarısının 90'dan çıkarılmasıyla elde edilir diyor. Ben şu tepedeki açıya x açısı diyeceğim. Benden istediği şey, dış açıortayların kesişim noktasındaki y açısının 90 derecenin x/2 kadar eksiği olduğunu göstermem. Şuradaki y açısının 90-x/2 olduğunu göstermemi istiyor…"

Katılımcının ifadeleri ispatın hipotez-hüküm ve amaçlarını belirlediğini göstermiştir.

Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının "Sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerinin doğruluğunu kontrol eder." kodunu sergilediği ortaya çıkarılmıştır. Bu beceriyi sergilediği belirlenen öğretmen adaylarından Berna ile araştırmacı arasında birinci etkinlik kartında geçen diyalog şöyledir (Satır, 71-77):

> [07.46] Berna: İnşallah doğru görüyorumdur şu an ama doğruluğundan çok da emin olamıyorum. Şu tarafa göndereyim ben bunu. (2x+a)'ya eşit oldu. Sonuç çıkmadı, bir yerlerde hata yaptım ama işlem bana çok mantıklı geldi.
>
> [08.22] A: Şimdi ne yapmayı düşünüyorsunuz?
>
> [08.37] Berna: Şekil üzerinde bütün işlemlerimi kontrol ediyorum. Baştan alayım [Soruyu tekrar okur] $x+\alpha+\beta=180$, $\alpha+\beta=180-x$, $360-2\alpha-2\beta+\alpha=180$ burada hata yapmışım ben.

Yukarıdaki diyalogdan "Sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerinin doğruluğunu kontrol eder." becerisini sergilediği görülmektedir.

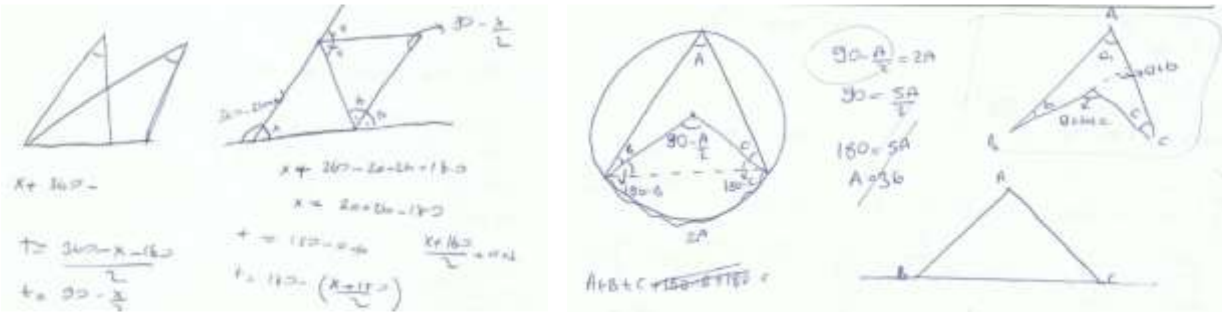
Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Yapma Sürecinde Şekil Çizmeye Yönelik Becerileri

Matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma sürecindeki becerilere yönelik ikinci kategori "Şekil çizme" kategorisidir. Bu kategori altında "Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer", "İspat sürecinin bir aşaması olarak şekil çizer", "Önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizer." ve "Somutlaştırma amacıyla şekil çizer." kodları bulunmuştur.

"Önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizer." kodunu birinci etkinlik kartındaki ispat için sergileyen Seda'nın "[00.40] *İki dış açıortayın kesişimleri diyor. Ben bunu… Öncelikle düşündüğüm şeyi kâğıda dökmeye çalışacağım, geometrik olarak… Çünkü geometri sorularında özellikle okuduğum şeyi şekillendirmek, kâğıda dökmek anlamama daha çok yardımcı oluyor.* (Satır, 6-10)" ifadeleri bu beceriyi sergilediğine işaret etmektedir.

Katılımcı matematik öğretmeni adaylarından bazılarının "Önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizer." kodunu sergilediği belirlenmiştir. Şekil 1'de Selim'in (soldaki görsel) ve Buket'in (sağdaki görsel) birinci etkinlik kartındaki ispat için çizdiği şekiller sunulmuştur.

Şekil 1.
Önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizer kodunu sergilediği belirlenen katılımcılardan ikisinin çizdiği şekiller



Şekil 1 incelendiğinde katılımcıların "Önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizer." kodunu sergiledikleri anlaşılmaktadır.

Şekil çizme kategorisinde elde edilen bir başka kod "Somutlaştırma amacıyla şekil çizer." kodudur. Birinci etkinlik kartında araştırmacının Serap'a sorduğu "[06.46] *...Hemen şekil çiziyorsunuz. Şekil çizmekteki amacınız nedir?* (Satır, 31-32)" sorusuna öğretmen adayının verdiği "[07.03] *Görsele dökmek için, daha doğrusu daha net görebilmek için.* (Satır, 34)" cevabı öğretmen adayının "Somutlaştırma amacıyla şekil çizer." kodunu sergilediğinin göstergesidir.

Çalışmaya katılan bazı matematik öğretmeni adayları ikinci etkinlik kartındaki soruda "İspat yapma sürecinin aşaması olarak şekil çizer." kodunu sergilemiştir. Katılımcılarda Bahadır ile araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir (Satır, 21-24):

"[02.56] Bahadır: Bu önermenin ispatı için şekil çizmek gerekiyor.

[03.00] A: Neden şekil çizmek gerekiyor?

[03.05] Bahadır: Kosinüs oluşturmak için şekil çizmeye ihtiyacımız var. Yani şekil olmadan bunu göstermemiz mümkün değil."

Araştırmacı ile Bahadır arasındaki diyalog incelendiğinde öğretmen adayının bu ispatı yapabilmek için şekle ihtiyaç duyduğu ve şekil çizmeyi ispat yapma sürecinin aşaması olarak gördüğü söylenebilir. Bu nedenle katılımcının "İspat yapma sürecinin aşaması olarak şekil çizer." becerisini sergilediği anlaşılmıştır.

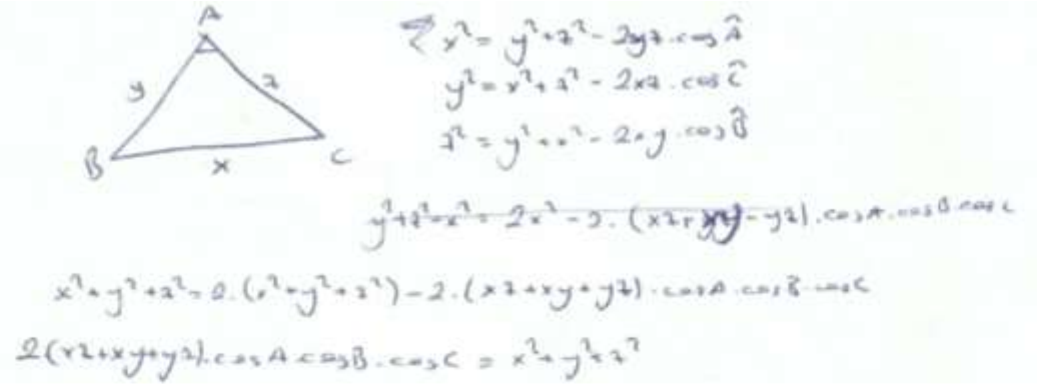
Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Yapma Sürecinde İşlem Sürecine Yönelik Becerileri

Çalışmada ulaşılan bir başka kategori "işlem süreci" kategorisidir. Bu kategoride bulunan kodlar "Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder.", "Ezberlediği yolla ispat yapar." ve "İspatta cebirsel işlem yapmayı zorunluluk olarak görür." becerileridir.

"Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder." kodunu sergilediği belirlenen katılımcılardan Samet'in birinci etkinlik kartında kullandığı "[11.08] *Bazı şeyler ezber olur ya; "Şunun olduğunu ben biliyorum" gibi. Bu da öyle bir şey.* (Satır, 78-79)" ve devamında kullandığı "[13.20] *Ben buraya yansıtamadım ama şöyle diyeyim; şunların kesişimlerinin bir doğru tam doğru var ya he şöyle bir şey olacağını tahmin edebiliyorum ama şekil olarak çizemedim, yapamadım yani.* (Satır, 101-103)" ifadelerinden önermenin ispatını sözel olarak ifade ettiği anlaşılmaktadır. İkinci etkinlik kartında bu beceriyi sergilediği belirlenen Serap'ın "[07.03] *...Bu önermenin ispatını şöyle hatırlıyorum: Her kenar için kenara bağlı eşitliği yazıyorduk. Sonra taraf tarafa toplayıp çıkarıyorduk.* (Satır, 34-35)" cümlelerinden sözel olarak önermenin ispatını ifade edebildiği saptanmıştır. Öğretmen adayının etkinlik kartındaki yaptığı işlemler Şekil 2'degösterilmiştir.

Şekil 2.

Sözel olarak önermenin ispatını ifade eder kodunu sergilediği belirlenen katılımcının çizdiği şekil



Katılımcı Şekil 2'deki ifadeleri yazdıktan sonra sözel olarak ispatın nasıl yapılabileceğini ifade etmiştir.

Çalışmaya katılan matematik öğretmeni adaylarından bazılarının ikinci etkinlik kartında "Ezberlediği yolla ispat yapar." becerisini sergilediği tespit edilmiştir. Katılımcılardan Selim'in "[14.23] *…İspatın böyle yapıldığını hatırlıyorum. a'dan |BC|'ye dik indiriyorduk. Ama ben hatırlayıp yapamayacağım.* (Satır, 43-44)" ifadeleri katılımcının çözüm yolunu ezberlediğini göstermektedir. Oylum'un kullandığı "[12.43] *Çünkü bunun ispatı böyle yapılıyor diye hatırlıyorum... Yok, ben yapamayacağım*. (Satır, 48)" ifadeleri de katılımcının ispatı ezberlediğini göstermiştir.

"İspatta cebirsel işlem yapmayı zorunluluk olarak görür." kodunu sergilediği belirlenen Buket "[02.03] *Ben burada sadece sonuç buldum. Cebirsel işlemleri içeren bir süreç yok. Bu nedenle ispatım geçerli olmayabilir.* (Satır, 11)" cümleleriyle ispatta cebirsel işlem yapmayı zorunluluk olarak gördüğünü anlatmıştır.

Sonuç ve Tartışma

Matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma becerisini inceleyen birçok araştırma matematik eğitimi alan yazınında mevcuttur. Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının geometrik ispat yapma sürecini inceleyen bu araştırma ispat yapma sürecini daha derinlemesine incelemesi bakımından önceki çalışmalardan ayrılmaktadır. Çalışmada ulaşılan sonuçların birçoğu alan yazınla desteklenirken, bazı önemli ve özgün bulgulara da ulaşılmıştır. Bu çalışmada ulaşılan en önemli sonuçlardan biri katılımcıların geometrik ispat yaparken ispat yapmada şekil çizmeyi ve cebirsel işlem yapmayı bir zorunluluk olarak görmeleridir.

Çalışmaya katılan matematik öğretmeni adayları ispat yapma sürecinde sergiledikleri becerilere yönelik ilk kategori "ispat önermesini okuma" kategorisidir. Matematik öğretmeni adaylarının bazıları ispat önermesini okurken ilk kez bütün olarak önermeyi okumuştur. Mevcut alan yazında birçok araştırma öğretmenlerin ispat önermesini ilk kez okurken bir bütün olarak okuduklarını göstermiştir (Öztürk, 2021; Öztürk, & Kaplan, 2019; Yang, 2012). Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının bazılarının ispat önermesini adım adım okuyarak ilerlediği belirlenmiştir. Ulaşılan bu sonuç alan yazını desteklemektedir (Öztürk, 2021; Öztürk, & Kaplan, 2019). Çalışmaya katılan öğretmen adaylarından bazıları önermeyi anlamadığında birkaç kez okumuş ve verilenler üzerine düşünmüştür. Yang (2012) da öğrencilerin ispat önermesini anlamadığında birkaç kez okuduklarını ve üzerine düşündüklerini belirlemiştir. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarından bazıları çizeceği şekle bağlı olarak önermede bazı bölümlerin altını çizmiştir. Bazı katılımcılar ise ispatın hipotez-hüküm ve amaçlarını (hedeflerini) belirlemiştir. Bu bulgu alan yazını desteklemektedir (Öztürk & Kaplan, 2019). Yeşilyurt Çetin ve Dikici (2021) ispatın hipotez ve hükümlerinin belirlenmesinin ispat yapmanın önemli bir aşaması olduğunu belirterek, bu aşamanın yerinde kullanılamamasının ispat yapmayı güçleştirdiğini ifade etmiştir. Bu bağlamda bu araştırmanın katılımcılarının ispatın hipotez-hüküm ve amaçlarını belirlemelerinin ispat yapabilmeleri için önemli olduğu söylenebilir. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının bazıları sonuca ulaşamadığında önermeyi tekrar okuyarak işlemlerinin doğruluğunu kontrol etmiştir. Yimer ve Ellerton (2006) da öğretmen adaylarının problem çözerken problemi çözemediklerinde problemi tekrar okuyarak kontrol ettiklerini belirlemiştir.

Katılımcı matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma sürecindeki becerilerine yönelik ikinci kategori “Şekil çizme” kategorisidir. Bu kategoride matematik öğretmeni adaylarının önermeyi okuduktan sonra anlamak için şekil çizdiği tespit edilmiştir. Alan yazında pek çok araştırma katılımcıların problemi anlamak için şekil çizdiğini göstermiştir (Öztürk, 2021; Schraw & Dennison, 1994; Yang, 2012). Llinares ve Clemente (2019) şekil çizmenin geometri ispatlarını başarıya ulaştırmak için önemli bir eylem olduğunu ifade etmiştir. Bu bağlamda çalışmadaki öğretmen adaylarının ispat yapmak için şekil çizmesinin ispatı başarıya ulaştırmaları için bir eylem olduğu söylenebilir. Çalışmaya katılan matematik öğretmeni adaylarının bazılarının ispat sürecinin bir aşaması olarak şekil çizdiği belirlenmiştir. Shigematsu ve Sowder (1994) da şekil çizmenin sözel problem çözme için bir çözüm stratejisi olabileceğini ifade etmiştir. Matematik öğretmeni adaylarının bazıları önermede verilen şekli değil ezberinde var olan şekli çizdiği belirlenmiştir. Altun ve Arslan (2006) problem çözme öğretimi üzerine yaptıkları çalışmada katılımcılardan bazılarının şekil çizdiği ancak şekli çözüm sürecinde kullanmadığını tespit etmişlerdir. Bu bulguda katılımcıların ezberlediği şekli çizdiklerine kanıt olarak sunulabilir. Çalışmaya katılan matematik öğretmeni adaylarından bazılarının somutlaştırma amacıyla şekil çizdiği belirlenmiştir. Van Garderen (2006) problem çözme sürecinde şekil çizmenin temel amaçlarından birinin soruyu anlaşılır hale getirerek hayal etmeyi kolaylaştırmak olduğunu belirtmiştir.

Matematik öğretmeni adaylarının ispat yapma sürecindeki bir başka kategori “işlem süreci” kategorisidir. Bu kategori altında matematik öğretmeni adaylarının bazılarının önermenin ispatını sembolik olarak yapamadığı, bunun yerine önermeyi sözel olarak ifade ettiği belirlenmiştir. Alan yazındaki pek çok araştırmanın sonucu katılımcıların sembolik işlem yapmada zorlandıklarını, işlemlerini sözel olarak ifade ettiklerini belirtmiştir (Arslan, & Yıldız, 2010; Nool, 2012). Buna rağmen çalışmaya katılan bazı matematik öğretmeni adaylarının ispatta cebirsel işlem yapmayı zorunluluk olarak gördükleri belirlenmiştir. Yeşilyurt Çetin ve Dikici (2021) ispatın tamamlanabilmesi için matematiksel notasyonların kullanılması gerektiğini ifade etmiştir. Bu bağlamda sembolik işlemler yapmadan ispatı sadece ifade eden katılımcıların ispatlarının geçerli olmadığı söylenebilir. Çalışmaya katılan bazı matematik öğretmeni adayları ispatı anlayarak yapamamış, bunun yerine ezberlediği yolla ispat yapmıştır. Hoffer (1981) ve Güven vd. (2005) geometri ispatlarında öğrencilerin teoremlerin ispatlarını mantıksal anlamadıklarını, bunun yerine ders geçmek için ezberlediklerini tespit etmişlerdir.

Öneriler ve Eğitime Katkıları

Matematiksel bilgi üretmenin yolu olan ispat, matematiği anlamlandırmanın da yoludur. Buna rağmen yapılan çalışmalar ispatın anlaşılamadığını, ezberleyerek yapıldığını göstermiştir. Bu durum ispatın anlaşılmasının güç olmasıyla bağdaştırılmıştır. Problem çözme gibi ispat yapmanın da stratejileri vardır. Buna rağmen problem çözme anlaşılabilirken ispat yapma yeterince anlaşılamamaktadır. Bu bağlamda araştırmacıların ispat yapma stratejilerinin öğretimi üzerine araştırmalar yürütmesi önerilebilir.

Bu çalışma nitel araştırmanın doğası gereği ortaya çıkan bazı sınırlılıklar altında yürütülmüş olmasına rağmen çalışmanın matematik eğitiminde ispat ile ilgili alan yazına önemli katkı sağlaması beklenmektedir. Matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmayı yeterince anlamlandıramaması, ispat yapmada şekil çizmeyi ve cebirsel işlem yapmayı bir zorunluluk olarak görmesi ispat öğretimine yönelik araştırmalar için yol gösterici olacaktır. Bu bağlamda matematiksel ispatın, sadece matematikçiler veya matematik eğitimcileri için öğrenilmesi zorunlu bir kavram olmaktan çıkarılıp, ortaöğretim matematik programlarına da konulması önerilebilir. Bu değişim matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmanın temel felsefesini anlama konusunda matematik öğretmeni adaylarına katkı sağlayabilir.

Kaynakça

Alcock, L. (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. In F. Hitt, D. Holton & P. W. Thompson (Eds.), *Research in collegiate mathematics education VII* (1st ed., pp. 63-91). American Mathematical Society.

Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(2), 125–134. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.03.003

Alqassab, M., Strijbos, J. W., & Ufer, S. (2018). The impact of peer solution quality on peer-feedback provision on geometry proofs: Evidence from eye-movement analysis. *Learning and Instruction*, *58*, 182-192. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2018.07.003.

Altun, M. (2015). *Eğitim fakülteleri ve lise matematik öğretmenleri için liselerde matematik öğretimi* (7. baskı). Aktüel Alfa Akademi.

Altun, M., & Arslan, Ç. (2006). İlköğretim öğrencilerinin problem çözme stratejilerini öğrenmeleri üzerine bir çalışma. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 19*(1), 1–21.

Arslan, S., & Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim, 35*(156), 17–31.

Aydoğdu-İskenderoğlu, T. (2016). Kanıt ve kanıt şemaları. E. Bingölbali, S. Arslan & İ. Ö. Zembat (Eds.) *Matematik eğitiminde teoriler* (1. baskı, s. 65-84) içinde. Pegem Akademi.

Barnard, T., & Tall, D. (1997). Cognitive units, connections and mathematical proof [Conference session]. 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lahti, Finland.

Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde matematik öğretimi (6-8. sınıflar)* (1. baskı). Pegem Akademi.

Bloch, E. D. (2011). *Proofs and fundamentals: A first course in abstract mathematics* (2nd ed.). Springer Science+Business Media.

Burton, D. M. (2006). *The history of mathematics: An introduction* (6nd ed.). The McGraw—Hill Companies.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. & Demirel, F. (2021). *Eğitimde bilimsel araştırma yöntemleri* (31. baskı). Pegem Akademi.

Ceylan, T. (2012). Geogebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi (Tez No. 302918). [Yüksek lisans tezi, Ankara Üniversitesi-Ankara]. Yükseköğretim Kurulu Başkanlığı Tez Merkezi.

Chinnappan, M., Ekanayake, M., & Brown, C. (2012). Knowledge use in the construction of geometry proof by Sri Lankan students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*, 865–887. https://doi.org/10.1007/s10763-011-9298-8.

Demircioğlu, H., & Polat, K. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının sözsüz ispatlar ile ilgili yaşadıkları zorluklar hakkındaki görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi, 4*(7), 81–89.

Doğan, M. (2013). Nokta, doğru, doğru parçası, ışın, düzlem ve uzay kavramları. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır & A. Delice (Eds.),*Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (1. baskı, s. 198-221) içinde. Pegem Akademi.

Fukawa-Connelly, T. P. (2012). A case study of one instructor's lecture-based teaching of proof in abstract algebra: Making sense of her pedagogical moves. *Educational Studies in Mathematics, 81*(3), 325–345. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9407-9.

Gerstein, L. J. (2012). *Introduction to mathematical structures and proofs* (2nd ed.). Springer Science+Business Media.

Güler, G. (2013). Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi (Tez No. 331712) [Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi-Erzurum]. Yükseköğretim Kurulu Başkanlığı Tez Merkezi.

Güven, B., Çelik, D., & Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi, 30*, 35–45.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' prof schemes: Results from exploratory studies. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (Cbmsissues in mathematics education) (1st ed., pp. 234-283). American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (1st ed., pp. 805-842). NCTM.

Hašek, R. (2019). Dynamic geometry software supplementedwith a computer algebra system as a proving tool. *Mathematics in Computer Science, 13*(13), 95-104. https://doi.org/10.1007/ s11786-018-0369-x

Herbst, P. G. (2002). Engaging students in proving: A doublebind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(3), 176–203. https://doi.org/10.2307/749724.

Hızarcı, S., Kaplan, A., İpek, A. S., Işık, C., & Elmas, S. (2009). *Düzlem geometri* (1. baskı). Palme.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher, 74*(1), 11–18. https://doi.org/10.5951/MT.74.1.0011.

Kaplan, C. A., & Simon, H. A. (1990). Insearch of insight. *Cognitive Psychology, 22*(3), 374–419. https://doi.org/10.1016/0010-0285(90)90008-R.

Karpuz, Y., & Atasoy, E. (2020). High school mathematics teachers' content knowledge of the logical structure of proof deriving from figural-concept interaction in geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(4), 585-603. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1736347

Karpuz, Y., Koparan, T., & Güven, B. (2014). Geometride öğrencilerin şekil ve kavram bilgisi kullanımı. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 5*(2), 108–118.

Krutetskii V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren* (1nd ed.). University of Chicago Press.

Ko, Y. Y., & Rose, M. K. (2021). Are self-constructed and student-generated arguments acceptable proofs? Pre-service secondary mathematics teachers' evaluations. *Journal of Mathematical Behavior*, 64, 1-15.. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100912

Komatsu, K., & Jones, K. (2021). Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *109*(3), 1-25. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10086-5

Llinares, S., & Clemente, F. (2019) Characteristics of the shifts from configural reasoning to deductive reasoning in geometry. *Mathematics Education Research Journal, 31*(31), 259-277. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0253-7

Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma: Desen ve uygulama için bir rehber* (S. Turan, Çev.; 3. baskı). Nobel. (Orijinal çalışmanın basımı 2009)

Nool, N. R. (2012). Exploring the metacognitive processes of prospective mathematics teachers during problem solving. *International Proceedings of Economics Development and Research, 30*, 302–306.

Öztürk, M. (2021). Cognitive and metacognitive skills performed by math teachers in the proving process of number theory. *Athens Journal of Education, 8*(1), 53–71.

Öztürk, M., Akkan, Y., & Kaplan, A. (2019). Sınıf öğretmenliği öğrencilerinin temel matematik ispatlarını yapma sürecindeki bilişsel yapılar ve argümanları. *Cumhuriyet Uluslararası Eğitim Dergisi, 8*(2), 429–452. http://dx.doi.org/10.30703/cije.490887.

Öztürk, M., & Kaplan, A. (2019). Cebirsel ispat yapma sürecinin bilişsel açıdan incelenmesi: Bir karma yöntem araştırması. *Eğitim ve Bilim, 44*(197), 25–64. https://doi.org/10.15390/EB.2018.7504

Regier, P., & Savic, M. (2020). How teaching to foster mathematical creativity may impact student self-efficacy for proving. *The Journal of Mathematical Behavior, 57*, 1-18. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100720.

Schraw, G., & Dennison, R. S. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology, 19*(4), 460–475. https://doi.org/10.1006/ceps.1994.1033.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *The Mathematics Teacher, 78*(6), 448–456. https://doi.org/10.5951/MT.78.6.0448.

Shigematsu, K., & Sowder, L. (1994). Drawings for story problems: Practices in Japan and the United States. *Arithmetic Teachers, 41*(9), 544–547. https://doi.org/10.5951/AT.41.9.0544.

Shongwe, B., & Mudaly, V. (2021). Introducing a measure of perceived self-efficacy for proof (PSEP): Evidence of validity. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education, 6*(3), 260-276. https://doi.org/10.23917/jramathedu.v6i3.14138.

Smith, E. E., & Kosslyn, S. M. (2014). *Bilişsel psikoloji: Zihin ve beyin* (M. Şahin, Çev.; 1. baskı). Nobel Akademik. (Orijinal çalışmanın basımı 2007)

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 237–253. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9191-3

The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). Principles and standards for school mathematics. NCTM.

Uğurel, I., Moralı, S., Koyunkaya, M. Y., & Karahan, Ö. (2016). Pre-service secondary mathematics teachers' behaviors in the proving process. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12*(2), 203–231. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1523a.

Vandevelde, S., Keer, H. V., Schellings, G., & Hout-Wolters, B. V. (2015). Using think-aloud protocol analysis to gain in-depth insights in to upper primary school children's self-regulated learning. *Learning and Individual Differences, 43*, 11-30. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2015.08.027.

Van Garderen, D. (2006). Teaching visual representation for mathematics problem solving. In M. Montague & A. K. Jitendra (Eds.), *Teaching mathematics to middle school students with learning difficulties* (1st ed.,s. 72-88). The Guilford.

Varghese, T. (2011). Considerations concerning Balacheff's 1988 Taxonomy of mathematical proofs. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 7*(3), 181–192. https://doi.org/10.12973/ejmste/75192.

Viholainen, A., Tossavainen, T., Viitala, H., & Johansson, M. (2019). University mathematics students' self-efficacy beliefs about proof and proving. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education, 7*(1), 148-164. https://doi.org/10.31129/LUMAT.7.1.406.

Yang, K. L. (2012). Structures of cognitive and metacognitive reading strategy use for reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 307–326. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9350-1.

Yang, K. L., & Lin, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 59–76. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9080-6.

Yestness, N. R. (2012). A study of undergraduate students' use of diagrams in understanding and constructing proofs about groups, subgroups, and isomorphisms (Thesis Number. 3550149) [PhD Thesis, University of Northern Colorado- Greeley]. ProQuest Dissertations Publishing.

Yeşilyurt Çetin, A., & Dikici, R. (2021). Organizing the mathematical proof process with the help of basic components in teaching proof: Abstract algebra example. *LUMAT International Journal on Math Science and Technology Education, 9*(1), 235–255. https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1497.

Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel düşünme* (3. baskı). Remzi.

Yimer, A., & Ellerton, N. F. (2006). Cognitive and metacognitive aspects of mathematical problem solving: An emerging model. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (1st ed., pp. 575–582). Mathematics Education Research Group of Australia.

Zaimoğlu, Ş. (2012). 8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri (Tez No. 307591) [Yüksek lisans tezi, Kastamonu Üniversitesi-Kastamonu]. Yükseköğretim Kurulu Başkanlığı Tez Merkezi.

Zimmerman, B. J. (2000). Attaining sel-regulation: A social cognitive perspective. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich & M. Zeidner (Eds.), *Hanbook of self-regulation* (1st ed., pp. 13-39). Elsevier Academic. https://doi.org/10.1016/B978-012109890-2/50031-7.

Extended Abstract

Introduction

When the studies on proof are examined, it can be said that the studies are handled under three themes as understanding the proof, examining the proof processes and teaching proof. This study was conducted to examine the proof process, and the studies on this theme in the related literature were carried out to evaluate the validity of proof, justify the proof and examine the skills in the proof process. This study aims to examine the skills in the proof process from a cognitive perspective.

In the studies conducted to examine the proof process, it was determined that the participants read the proof in different ways, tried to facilitate the proof by drawing a figure, used symbolic expressions, and made pattern generalizations in the proof process. In addition, it has been determined in the studies that the participants do not understand the proof of theorems logically, but instead prove them by memorizing. Barnard and Tall (1997) found in their study that they had difficulty in transitioning from verbal expressions to algebraic expressions, that they used the algebraic expressions they were familiar with, and that they had difficulty in establishing a relationship between algebraic expressions and verbal representations. Yang (2012) examined students' cognitive readings, metacognitive readings, and reading comprehension skills of geometry proofs using structural equation modeling. She has developed a scale for this. Skills in the scale are divided into cognitive and metacognitive. Some of the cognitive skills mentioned by the researcher are: reading the proof statement for the first time, underlining to identify its important parts, drawing shapes to understand the proposition. Öztürk and Kaplan (2019) conducted a research to examine the process of making algebraic proofs of mathematics teachers and prospective teachers. As a result of the research, it was determined that some of the participants read the proof proposition as a whole in the first reading, while others read it step by step, determining the hypothesis-rules and purposes of the proof, verbally expressing the proof of the proposition and trying to prove it by memorizing. Öztürk (2021) conducted a cognitive and metacognitive study of primary and secondary school mathematics teachers' process of proving number theory. As a result of the research, it was determined that the teachers read the proof proposition as a whole or step by step in the first reading. He also determined that teachers draw figures while proving.

This study aimed to examine the geometric proof process of secondary school mathematics teacher candidates. The study sought answers to the following research problems:

1. What kind of skills do secondary mathematics teacher candidates demonstrate in the process of proving geometry?
2. What kind of skills do secondary mathematics teacher candidates demonstrate in drawing shapes in the process of proving geometry?
3. What kind of skills do secondary mathematics teacher candidates demonstrate in the process of proving geometry?

Method

The case study model, one of the qualitative research methods, was used in the study. In this study, a case study model was used as the proving processes of pre-service mathematics teachers were examined through two proof questions for the geometry proposition in order to examine the proof process. The study was conducted with eight Turkish secondary school mathematics teacher candidates in the 2015-2016 academic years. The participants of the study were selected with the typical case sampling method, one of the purposive sampling methods. Activity cards and think-aloud protocols were used to collect the data of the study. Two different activity cards were used in the study. The first activity card prepared includes the geometry proposition. Content analysis method was used in the analysis of the data of the study. In the analysis of the data, the data was first analyzed and coded. In other words, the skills exhibited in the process of proving were determined. Then, the acquired skills were categorized according to the common features of the codes. The resulting categories were combined under themes. In the presentation of the data obtained in the study, direct quotations were made from the views of the teachers and teacher candidates and images from the activity cards were presented.

Results

There are many studies examining the proof skills of pre-service mathematics teachers. This research, which examines the process of making geometry proofs of secondary school mathematics teacher candidates, differs from previous studies in that it examines the proof-making process in a more in-depth and comprehensive manner. While most of the results reached in the study were supported by the literature, some important and original findings were also reached. One of the most important results reached in this study is that the participants see drawing figures and performing algebraic operations as a necessity while proving geometry.