Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 12(2): 1003-1016, 2022
Journal of the Institute of Science and Technology, 12(2): 1003-1016, 2022
ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618
Matematik / *Mathematics* **DOI: 10.21597/jist.995975**
Araştırma Makalesi / *Research Article*
Geliş tarihi / *Received*: 15.09.2021 **Kabul tarihi / *Accepted*: 25.01.2022**

Atıf İçin: Kuşak Samancı H, Cengiz V, 2022. Dual Uzayda N-Bishop Çatısına Göre Smarandache Eğrileri ve Karşılık Geldiği Regle Yüzeyleri. Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 12(2):1003-1016.

To Cite: Kuşak Samancı H, Cengiz V, 2022. The Smarandache Curves and Corresponding to Ruled Surfaces Due to N-Bishop Frame In Dual Space. Journal of the Institute of Science Technology, 12(2):1003-1016.

Dual Uzayda N-Bishop Çatısına Göre Smarandache Eğrileri ve Karşılık Geldiği Regle Yüzeyleri

Hatice KUŞAK SAMANCI[1*], Veysi CENGİZ[2]

ÖZET: Dual uzayda dual birim küre üzerinde seçilen dual Smarandache eğrisi Öklid-3 uzayındaki yönlü doğruların oluşturmuş olduğu regle yüzeye karşılık gelir. Bu çalışmada dual N-Bishop çatısının dual bileşenlerinin yardımıyla oluşturulan dual Smarandache eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerine ait bazı karakterizasyonlar incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dual uzay, dual eğri, smarandache eğrisi, dual smarandache eğrisi, N-Bishop çatı.

The Smarandache Curves and Corresponding to Ruled Surfaces Due to N-Bishop Frame In Dual Space

ABSTRACT: The dual Smarandache curve selected on the dual unit sphere in dual space corresponds to the ruled surface formed by the directional lines in the Euclidean-3 space. In this study, some characterizations of ruled surfaces corresponding to dual Smarandache curves created with the help of dual components of the dual N-Bishop frame were investigated.

Keywords: Dual space, dual curves, smarandache curves, dual smarandache curves, N-Bishop frame.

[1]Hatice KUŞAK SAMANCI (**Orcid ID:** 0000-0001-6685-236X), Bitlis Eren Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Bitlis, Türkiye
[2] Veysi CENGİZ (**Orcid ID:** 0000-0001-7843-6793), Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Bölümü, Bitlis, Türkiye

***Sorumlu Yazar/Corresponding Author:** Hatice KUŞAK SAMANCI, e-mail: hkusak@beu.edu.tr

Bu çalışma Veysi CENGİZ'in yüksek lisans tezinden üretilmiştir.

GİRİŞ

Diferansiyel geometri ilk olarak 18. yüzyılda ortaya çıkmıştır ve ilk örneklerini de L. Euler ve G. Monge çalışmıştır. Yüzeyler teorisi üzerine ilk inceleme Monge (1795) tarafından yazılmıştır (Monge, 1809). Serret-Frenet vektörleri sayesinde eğrinin eğrilik ve burulması hesaplanabilmektedir. Frenet çatısının elemanları olan $\left\{\vec{T},\vec{N},\vec{T}\times\vec{N}=\vec{B}\right\}$ vektörleri sırasıyla bir α regüler eğrisinin teğet, normal ve bu iki vektörün vektörel çarpımı ile elde edilen binormal vektördür. Bu çatı ismini, çatıdaki formülleri birbirinden bağımsız olarak keşfeden ve tezlerinde de kullanan Jean Frédéric Frenet (1847) ve Joseph Alfred Serret (1851) den almaktadır. $\left\{\vec{N},\vec{C},\vec{W}\right\}$ çatısı eğrinin bir alternatif hareketli çatısı olup 1995 yılında Scofield tarafından oluşturulmuştur (Scofield, 1995). Daha sonra, Yaylı ve arkadaşları $\mathbb{E}^3$ de bir $\mu=\mu(s)$eğrinin $\left\{\vec{N},\vec{C},\vec{N}\times\vec{C}=\vec{W}\right\}$ alternatif çatısının normal vektörünün sabit alınmasıyla bu çatının θ derecelik bir döndürme yapılmasıyla tanımladığı yeni çatıya N-Bishop çatısı olarak tanımladılar (Yaylı ve ark., 2017).

Özel bir eğri çeşidi olan Smarandache eğrileri de farklı uzay ve çatılar üzerinde çalışma yapılan özel bir eğri çeşididir. Konum vektörü başka bir düzgün eğri üzerindeki Serret-Frenet çatısı vektörlerinden oluşan düzenli bir eğriye Smarandache eğrisi denir (Ascbacher, 1997). A.T. Ali, Öklid uzayında bazı özel Smarandache eğrilerini incelemiştir (Ali, 2010). Bektaş ve Yüce, üç boyutlu Öklid uzayında özel Smarandache eğrilerinin Darboux çatısını incelemiştir.

Doğrunun doğurduğu yüzeyler olarak bilinen regle yüzeyleri ilk olarak Monge (1850) tarafından tanımlanmış Guggenheimer tarafından da geliştirilmiştir. Karmaşık sayılarla Öklid uzayında sadece dönme işleminin tek yapılabilmesi öteleme hareketinin yapılamaması nedeniyle araştırmacılar bir arayış içerisine girmişlerdir. Bu arayış sonucu hem dönme hem de öteleme hareketlerini yapmamızı sağlayan dual sayıların keşfini sağlamıştır. Dual uzayın elemanları olan dual sayılar ilk kez 1873 yılında W.K. Clifford (1873) tarafından keşfedilmiştir. Daha sonra E. Study dual sayıları dual vektörleri oluşturmak için kullanmış ve birim dual küre ile yönlü doğru arasındaki bağıntıyı açıklamıştır. Dual sayılar ve dual vektörler uygulamalı geometride robotik hareketleri kolay bir biçimde gerçekleştirebilmek için kullanılmaktadır. Ayrıca, Baky (2002) dual küresel eğrilerin açık bir karakterizasyonu adlı çalışmasında dual uzayda Blaschke çatısını ve bir dual eğriyi Serret-Frenet çatısındaki vektörler yardımıyla tanımlamıştır. Yaylı ve arkadaşları dual uzayda dual küresel eğrilerine karşılık gelen regle yüzeylerini çalışmıştır (Yaylı ve ark., 2012). Keskin ve Yaylı bir uzay eğrisinin küresel göstergelerini yeni bir alternatif çatı olarak tanımladıkları N-Bishop çatısına göre incelemişlerdir (Keskin ve ark., 2017).

Bu çalışmada dual NCW çatısı ile N-Bishop çatıları arasında bir geçiş matrisi tanımlanmıştır ayrıca dual N-Bishop çatısının dual bileşenlerinin Öklid-3 uzayında karşılık geldiği regle yüzeylere ait bazı karakterizasyonlar incelenmiştir.

MATERYAL VE METOT

s yay parametresi ve $\mu=\mu(s)$ eğrisi $\mathbb{E}^3$ Öklid 3-uzayında birim hızlı regüler bir eğri olsun. $\mu(s)$ eğrisinin N-Bishop çatısının vektörleri $\left\{\vec{N},\vec{N_1},\vec{N_2}\right\}$ olmak üzere,

$$V_{NN_1}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{N}+\vec{N}_1\right) \tag{1}$$

ile tanımlanan eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\overrightarrow{NN_1}$ Smarandache eğrisi denir.

olarak tanımlanan eğriye ise $\mathbb{E}^3$ $V_{NN_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{N}+\overrightarrow{N_2}\right)$ (2)

ile tanımlanan eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\overrightarrow{N}\overrightarrow{N_2}$ Smarandache eğrisi denir.

$$V_{N_1N_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{N_1}+\overrightarrow{N_2}\right) \tag{3}$$

denklemiyle tanımlanan eğriye $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\overrightarrow{N_1}\overrightarrow{N_2}$ Smarandache eğrisi denir.

$$V_{NN_1N_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{N}+\overrightarrow{N_1}+\overrightarrow{N_2}\right) \tag{4}$$

Öklid uzayında $\overrightarrow{N}\overrightarrow{N_1}\overrightarrow{N_2}$ Smarandache eğrisi denir. Öklid 3-uzayında α eğrisinin bir birim hızlı eğri olması için gerek ve yeterli şart $\|\alpha\|=1$ olmasıdır. $\mathbb{E}^n$ uzayında birim hızlı regüler bir $\alpha: I\to\mathbb{E}^n$eğrisi için $\overrightarrow{T}(s)=\alpha'(s)$ ise verilen $\overrightarrow{T}(s)$ vektörüne, α' eğrisinin $\alpha'(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü veya hız vektörü denir. Serret-Frenet çatısının türev formülleri $\overrightarrow{T'}=\kappa\overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{N'}=-\kappa\overrightarrow{T}+\tau\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{B'}=-\tau\overrightarrow{N}$ ile elde edilir. Bishop, 1975'te teğet vektörü Serret-Frenet çatısının $\overrightarrow{T}$ birim teğet vektörüne paralel olan eğrilikleri k_1 ve k_2 olmak üzere türev denklemleri, $\overrightarrow{T'}=k_1\overrightarrow{N}_1+k_2\overrightarrow{N}_2$, $\overrightarrow{N'}_1=-k_1\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N'}_2=-k_2\overrightarrow{T}$ ile hesaplanan yeni bir alternatif çatı olan Bishop çatısını tanımlamıştır (Bishop 1975). 1995 yılında $\mathbb{E}^3$ de bir $\mu=\mu(s)$ eğrisi boyunca Scofield tarafından keşfedilen ve $\left\{\overrightarrow{N},\overrightarrow{C},\overrightarrow{N}\times\overrightarrow{C}=\overrightarrow{W}\right\}$ ile tanımlanan alternatif hareketli çatının sırasıyla birim asal normal vektör $\overrightarrow{N}$, asal birim vektörün türevi $\overrightarrow{C}$ ve Darboux vektörü $\overrightarrow{W}$ ile temsil edilmektedir [Scofield, 1995, Uzunoğlu ve ark. 2016]. Yaylı ve arkadaşları $\mathbb{E}^3$ de bir $\mu=\mu(s)$ eğrisinin $\left\{\overrightarrow{N},\overrightarrow{C},\overrightarrow{N}\times\overrightarrow{C}=\overrightarrow{W}\right\}$ alternatif çatısının normal vektörünün sabit alınmasıyla bu çatının θ derecelik bir döndürme yapılmasıyla tanımladığı yeni çatıya N-Bishop çatısı denir (Keskin Yaylı 2017). İlk defa Scofield tarafından oluşturulan $\left\{\overrightarrow{N},\overrightarrow{C},\overrightarrow{N}\times\overrightarrow{C}=\overrightarrow{W}\right\}$ alternatif çatısı Uzunoğlu ve arkadaşları tarafından daha ayrıntılı bir şekilde ele alınmış ve bu çatının türev denklemleri $\overrightarrow{N'}=f\overrightarrow{C}+\overrightarrow{W}$, $\overrightarrow{C'}=-f\overrightarrow{N}+g\overrightarrow{W}$, $\overrightarrow{W'}=-g\overrightarrow{C}$ olarak verilmiştir (Scofield 1995, Uzunoğlu vd. 2016). Bu alternatif hareketli çatıya göre eğrilikler $H=\frac{\tau}{\kappa}$, $\sigma=\frac{H'}{\kappa(1+H^2)^{3/2}}$ =sbt olmak üzere $f=\kappa\sqrt{1+H^2}$ ve $g=\sigma f$ eşitlikleri ile hesaplanır (Uzunoğlu vd. 2016). Keskin ve Yaylı ise Öklid 3-uzayında bir eğrinin ortonormal $\left\{\overrightarrow{N},\overrightarrow{C},\overrightarrow{W}\right\}$ alternatif çatısının normal vektörüne paralel olarak eğri boyunca taşınmasını sağlayan N-Bishop çatısını elde etmişlerdir (Keskin ve ark., 2017). Öklid 3-uzayında birim hızlı regüler bir eğrinin N-Bishop çatısı $\left\{\overrightarrow{N},\overrightarrow{N}_1,\overrightarrow{N}_2\right\}$ şeklinde olup türev denklemleri $\overrightarrow{N'}=k_1\overrightarrow{N}_1+k_2\overrightarrow{N}_2$, $\overrightarrow{N'}_1=-k_1\overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{N'}_2=-k_2\overrightarrow{N}$ eşitlikleri ile verilmiştir (Keskin ve ark., 2017). Diğer yandan, W.K. Clifford 1873 yılında a, $a^*\in\mathbb{R}$ ve $\varepsilon\neq 0$, $\varepsilon^2=0$ olmak üzere $\widehat{A}=a+\varepsilon a^*$ sayısını dual sayı olarak tanımlamıştır. ε bir dual birim olarak kabul edilir. Dual sayılar halkası sıfır bölenli olmadığından yani $\varepsilon a^*.\varepsilon b^*=0$ olduğu için εa^* elemanlarının tersi yoktur. Bu nedenle dual sayılar bir cisim belirtmez sadece bir cebir belirtmektedir. Dual sayılar cümlesi $\mathbb{D}=\left\{\hat{A}=a+\varepsilon a^*:\ a,a^*\in\mathbb{R},\ \varepsilon^2=0\right\}$ ile tanımlanır (W.K. Clifford 1873). $(\mathbb{D}^3,+)$ sistemi bir abel gruptur ve $\mathbb{D}$ üzerinde bir modüldür. $\mathbb{D}^3$cümlesine $\mathbb{D}-$modül de denir. $\mathbb{D}-$modül'ün elemanları olan sıralı dua1 üçlülere dual vektörler denir. $\widehat{\mathrm{A}}\neq(0,\mathrm{a})\in\mathbb{D}$ olmak üzere $\|\widehat{\mathrm{A}}\|=(1,0)$ koşulunu sağlayan birim dual kürenin dual noktaları üç boyutlu Öklid uzayında yönlü doğrulara karşılık gelir (E-Study 1903).

BULGULAR VE TARTIŞMA

Dual N-Bishop çatısının dual bileşenleri $\widehat{N}=\vec{N}+\varepsilon\overrightarrow{N^{*}}, \widehat{N_1}=\overrightarrow{N_1}+\varepsilon\overrightarrow{N_1}^{*}, \widehat{N_2}=\overrightarrow{N_2}+\varepsilon\overrightarrow{N_2}^{*}$ olsun. s yay parametresi ve $\mu=\mu(s)$ eğrisi $\mathbb{D}^3$ dual uzayında birim hızlı regüler bir dual eğri olsun. $\mu(s)$ eğrisinin vektörleri $\{\vec{N},\overrightarrow{N_1},\overrightarrow{N_2}\}$ olmak üzere, $V_{\widehat{N}\widehat{N}_1}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{N}+\vec{N}_1\right)$ şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{D}^3$ dual uzayında $\widehat{N}\widehat{N}_1$ Smarandache eğrisi, $V_{\widehat{N}\widehat{N}_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{N}+\vec{N}_2\right)$ şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{D}^3$ dual uzayında $\widehat{N}\widehat{N}_2$ Smarandache eğrisi, $V_{\widehat{N}_1\widehat{N}_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{N}_1+\vec{N}_2\right)$ şeklinde tanımlanan eğriye $\mathbb{D}^3$ dual uzayında $\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Smarandache eğrisi ve $V_{\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2}(s)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{N}+\vec{N}_1+\vec{N}_2\right)$ şeklinde tanımlanan eğriye $d\mathbb{D}^3$ dual uzayında $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Smarandache eğrisi denir.

E-Study dönüşümü yardımıyla dual birim küre üzerinde seçilen $\{\widehat{N},\widehat{N_1},\widehat{N_2}\}$ alternatif hareketli çatısının elemanları ile dual uzayda çizilen kapalı eğriler $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında bir regle yüzey temsil etmektedir. Buradan seçilen dual eğriler

$$\widehat{N}=\vec{N}+\varepsilon\overrightarrow{N^{*}}, \widehat{N_1}=\overrightarrow{N_1}+\varepsilon\overrightarrow{N_1}^{*}, \quad \widehat{N_2}=\overrightarrow{N_2}+\varepsilon\overrightarrow{N_2}^{*} \tag{5}$$

olmak üzere, $\{\widehat{N},\widehat{N_1},\widehat{N_2}\}$ eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri

$$\varphi_{\widehat{\mathrm{N}}}(s,v)=\beta_N(s)+v\vec{N}(s) \quad , \ \beta_N(s)=\vec{N}\wedge\overrightarrow{N^{*}}, \tag{6}$$

$$\varphi_{\widehat{N_1}}(s,v)=\beta_{N_1}(s)+v\overrightarrow{N_1}(s), \quad \beta_{N_1}(s)=\overrightarrow{N_1}\wedge\overrightarrow{N_1}^{*}, \tag{7}$$

denklemleri ile verilir. Denklemleri

$$\varphi_{\widehat{N_2}}(s,v)=\beta_{N_2}(s)+v\overrightarrow{N_2}(s) \quad , \ \beta_{N_2}(s)=\overrightarrow{N_2}\wedge\overrightarrow{N_2}^{*}, \tag{8}$$

olarak tanımlanan eğriler, $\alpha(s)$eğrisine ait $\alpha_{NN_1}(s)$ Smarandache eğrisini $\{\widehat{N},\widehat{N_1},\widehat{N_2}\}$ vektörleri yardımıyla $\alpha_{NN_1}(s)=\frac{\vec{N}+\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}}$ olarak verilir. Bu eğriye bağlı olarak $\{\widehat{N},\widehat{N_1},\widehat{N_2}\}$ vektörlerinin vektörel momentleri sırasıyla, $\overrightarrow{N^{*}}=\alpha\wedge\vec{N}=-\frac{\overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}}, \ \overrightarrow{N_1^{*}}=\alpha\wedge\overrightarrow{N_1}=\frac{\overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}}$ ve $\overrightarrow{N_2}^{*}=\alpha\wedge\overrightarrow{N_2}=\frac{\vec{N}-\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}}$ olarak elde edilir. Bu denklemler kullanılarak $\{\vec{N},\overrightarrow{N_1},\overrightarrow{N_2}\}$ dual eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla $\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s,v)=\vec{N}\wedge\overrightarrow{N^{*}}+v\vec{N}=\vec{N}\wedge\left(-\frac{\overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}}\right)+v\vec{N}=\frac{\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}}+v\vec{N}$ benzer şekilde

$$\vec{\psi}_{\widehat{N_1}}(s,v)=\frac{\vec{N}}{\sqrt{2}}+v\overrightarrow{N_1} \quad \text{ve} \ \vec{\psi}_{\widehat{N_2}}(s,v)=\frac{\vec{N}+\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}}+v\,\overrightarrow{N_2} \tag{9}$$

biçiminde verilir.

Teorem 1. $(\widehat{N}),(\widehat{N_1}),(\widehat{N_2})$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin dağılma parametreleri $P_{\widehat{N}}=0, \ P_{\widehat{N}_1}=0$ ve $P_{\widehat{N}_2}=\frac{k_1}{\sqrt{2}}$ olarak hesaplanır.

İspat. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin dağılma parametresinin $P_{\widehat{N}}=\frac{\det((\vec{N}\wedge\overrightarrow{N^{*}})',\vec{N},\vec{N}')}{\|\vec{N}'\|^2}$ formulündeki determinantı

$$\det((\vec{N} \wedge \overrightarrow{N^*})', \vec{N}, \vec{N}') = \begin{vmatrix} -\frac{k_1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 \end{vmatrix} \tag{10}$$

ile hesaplanır. Eşitlik 10. dan yararlanılarak $P_{\hat{N}} = 0$ sonucu bulunur. Benzer işlemler yapıldığında $P_{\widehat{N_1}} = 0$ ve $P_{\widehat{N_2}} = \frac{k_1}{\sqrt{2}}$ olarak hesaplanır.

Teorem 2. $\{\hat{N}, \widehat{N_1}, \widehat{N_2}\}$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin ortalama eğrilikleri

$$K_{\hat{N}} = -\left(\frac{-vk_1k_2+vk_2k_1}{v^2k_1^2+v^2k_2^2}\right)^2, K_{\widehat{N_1}} = -\frac{{k_1}^2{k_2}^2}{{k_2}^2+2v^2{k_1}^2}, K_{\widehat{N_2}} = -\frac{{k_1}^2{k_2}^2}{2\left(\frac{{k_1}^2}{2}+\left(\left(vk_2-\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2\right)^2} \tag{11}$$

ve Gauss eğrilikleri de

$$H_{\hat{N}} = \frac{\sqrt{2}k_1\frac{-vk_1k_2+vk_2k_1}{\sqrt{v^2k_1^2+v^2k_2^2}}+\frac{vk_2\left(\frac{k_1k_2}{\sqrt{2}}+vk'_2\right)-vk_1\left(\frac{k_1k_2}{\sqrt{2}}+vk'_2\right)}{v\sqrt{k_1^2+k_2^2}}}{2\left(v^2k_1^2+v^2{k_2}^2\right)}, \tag{12}$$

$$H_{\widehat{N_1}} = -\frac{\frac{{k_1}^2k_2}{2}+\frac{k_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{k_1^2}{\sqrt{2}}+\frac{k_2^2}{\sqrt{2}}+vk'_1\right)+vk_1\left({k_2}'+vk_1k_2\right)}{{k_2}^2+2v^2{k_1}^2} \tag{13}$$

$$H_{\widehat{N_2}} = \frac{-2{k_2}^2k_1+\frac{k_1}{\sqrt{2}}\left(\left(vk_2-\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)'+\frac{k_1^2}{\sqrt{2}}+\frac{k_1k_2}{\sqrt{2}}\right)-\left(vk_2-\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)\left(vk_2k_1+\frac{k_1^2}{\sqrt{2}}+\frac{{k_1}'}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\left(\left(vk_2-\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{{k_1}^2}{2}\right)^3}} \tag{14}$$

olarak elde edilir.

İspat. $\hat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliğini bulmak için I. esas form ve II. esas form ile birlikte normal vektör alanının bulunması gerekir. Öncelikle $\hat{N}$ eğrisinin sırasıyla s ve v parametrelerine göre yönlü türevleri $\vec{\psi}_{\hat{N}_s} = -\frac{k_1\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\left(k_1\overrightarrow{N_1} + k_2\overrightarrow{N_2}\right)$ ve $\vec{\psi}_{\hat{N}_v} = \vec{N}$ olarak hesaplanır. Buradan yönlü türevlerin iç çarpımı yardımıyla I. Esas formun katsayıları sırasıyla;

$$E =< \vec{\psi}_{\hat{N}_s}, \vec{\psi}_{\hat{N}_s} >= \frac{k_1^2}{2} + v^2k_1^2 + v^2{k_2}^2,\ F =< \vec{\psi}_{N_v}, \vec{\psi}_{N_s} >= \frac{k_1}{\sqrt{2}} \text{ ve } G =< \vec{\psi}_{\hat{N}\ v}, \vec{\psi}_{\hat{N}\ v} >= 1 \tag{15}$$

katsayıları bulunur. Buradan da I. Esas form $I = \left(\frac{{k_1}^2}{2} + v^2{k_1}^2 + v^2{k_2}^2\right)ds^2 - k_1dsdv + dv^2$ ile elde edilir. Şimdi de II. Esas formun katsayılarını bulabilmek için $\hat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanını bulmalıyız. $\hat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$\vec{n} = \frac{-vk_1\overrightarrow{N_2}+vk_2\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{v^2k_1^2+v^2k_2^2}} \tag{16}$$

olarak elde edilir. Şimdi de $\hat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla bu eğriye ait II. Esas formun katsayılarını bulalım. $\hat{N}$ dual eğrisinin s ve v parametrelerine göre tekrardan yönlü türev alma işlemi uygulandığında;

$$\vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}} = \vec{N}\left(-\frac{k'_1}{\sqrt{2}} + vk_1^2 + k_2^2\right) + \overrightarrow{N_1}\left(\frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + vk'_1\right) + \overrightarrow{N_2}\left(\frac{k_1k_2}{\sqrt{2}} + vk'_2\right) \tag{17}$$

denklemi bulunur. Benzer işlemlerle $\psi_{\hat{N}_{sv}} = k_1\vec{N}$ ve $\psi_{\hat{N}_{vv}} = 0$ olarak bulunur. Şimdi bu yönlü türevler ve Eşitlik 16. dan II. Esas formun katsayıları $L = <\vec{\psi}_{\hat{N}_{ss}}, \vec{n}> = \left\{\frac{vk_2\left(\frac{k_1k_2}{\sqrt{2}} + vk'_2\right) - vk_1\left(\frac{k_1k_2}{\sqrt{2}} + vk'_2\right)}{v\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}\right\}$, $M = <\vec{\psi}_{\hat{N}_{sv}}, \vec{n}> = \frac{-vk_1k_2 + vk_2k_1}{\sqrt{v^2k_1^2 + v^2k_2^2}}$ ve $N = <\vec{\psi}_{\hat{N}_{vv}}, \vec{n}> = 0$ olarak elde edilir. Buradan da

$$K_{\hat{N}} = -\left(\frac{-vk_1k_2 + vk_2k_1}{v^2k_1^2 + v^2k_2^2}\right)^2 \tag{18}$$

$$H_{\hat{N}} = \frac{\sqrt{2}k_1\frac{-vk_1k_2 + vk_2k_1}{\sqrt{v^2k_1^2 + v^2k_2^2}} + \frac{vk_2\left(\frac{k_1k_2}{\sqrt{2}} + vk'_2\right) - vk_1\left(\frac{k_1k_2}{\sqrt{2}} + vk'_2\right)}{v\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}}{2\left(v^2k_1^2 + v^2{k_2}^2\right)} \tag{19}$$

olarak bulunur. Benzer işlemler ile $\hat{N}_1$ ve $\hat{N}_2$ dual eğrileri için Gauss ve ortalama eğrilik hesaplanır ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3. Dual Darboux $(\vec{\varpi})$ ve dual Steiner $(\vec{D})$ vektörleri

$$\vec{\varpi} = -k_2\overrightarrow{N_1} + k_1\overrightarrow{N_2} + \varepsilon\left(\frac{k_1\vec{N} - k_2\overrightarrow{N_2} - k_1\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}}\right) \tag{20}$$

$$\vec{D} = \oint \hat{w} = -\overrightarrow{N_1}\oint k_2 + \overrightarrow{N_2}\oint k_1 + \varepsilon\left(N\oint\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \overrightarrow{N_1}\oint\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \overrightarrow{N_2}\oint\frac{k_2}{\sqrt{2}}\right) \tag{21}$$

denklemleri ile bulunur.

İspat. Darboux vektörünün tanımından

$$\vec{\varpi} = w + \varepsilon w^* \tag{22}$$

$$\overrightarrow{\omega^*} = \alpha \wedge \vec{\omega} = \left(\frac{\vec{N} + \overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}}\right) \wedge \left(-k_2\overrightarrow{N_1} + k_1\overrightarrow{N_2}\right) = \frac{k_1\vec{N} - k_2\overrightarrow{N_2} - k_1\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}} \tag{23}$$

olur. Eşitlik 23., Eşitlik 22. de yerine yazılırsa $\vec{\varpi} = -k_2\overrightarrow{N_1} + k_1\overrightarrow{N_2} + \varepsilon\left(\frac{k_1\vec{N} - k_2\overrightarrow{N_2} - k_1\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}}\right)$ olarak elde edilir. Dual Steiner vektörün tanımından

$$\vec{D} = \oint \hat{w} = -\overrightarrow{N_1}\oint k_2 + \overrightarrow{N_2}\oint k_1 + \varepsilon\left(\vec{N}\oint\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \overrightarrow{N_1}\oint\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \overrightarrow{N_2}\oint\frac{k_2}{\sqrt{2}}\right) \tag{24}$$

olarak elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4. $\hat{N}, \widehat{N_1}, \widehat{N_2}$ dual eğrilerinin oluşturduğu kapalı regle yüzeylere ait dual açılara ait eğimler sırasıyla $\Lambda_{\hat{N}} = 0$, $\Lambda_{\widehat{N_1}} = -\oint k_2 + \varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\oint k_1\right)$ ve $\Lambda_{\widehat{N_2}} = \oint k_1$ dir.

İspat. $\hat{\text{N}}$ dual eğrisinin oluşturduğu regle yüzeye ait dual açının eğimi için

$$\Lambda_{\hat{N}} = -\langle \vec{D}, \vec{N} \rangle = -\langle \vec{d} + \varepsilon\overrightarrow{d^*}, \vec{N} + \varepsilon\overrightarrow{N^*} \rangle \tag{25}$$

Eşitlik 25. düzenlendiğinde

$$\Lambda_{\widehat{N}} = \left\langle -\overrightarrow{N_1} \oint k_2 + \overrightarrow{N_2} \oint k_1 , \vec{N} \right\rangle + \varepsilon \left(\begin{array}{c} \left\langle \left(-\overrightarrow{N_1} \oint k_2 + \overrightarrow{N_2} \oint k_1 , -\frac{\overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}} \right) \right\rangle \\ + \left\langle \left(\vec{N} \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \overrightarrow{N_1} \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \overrightarrow{N_2} \oint \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right) , \vec{N} \right\rangle \end{array} \right) \tag{26}$$

elde edilir. Burada iç çarpımlar yapılırsa,

$$\Lambda_{\widehat{N}} = \varepsilon \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \oint k_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \oint k_1 \right) = 0 \tag{27}$$

olarak elde edilir. Benzer işlemlerle $\widehat{N_1}$ ve $\widehat{N_2}$ dual eğrilerine ait dual eğilim açısı hesaplanır ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

$\alpha(s)$ eğrisine ait $\alpha_{\overrightarrow{N}\overrightarrow{N_2}}(s) = \frac{\vec{N}+\overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}}$ Smarandache eğrisini için $\{\vec{N}, \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}\}$ dual eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla $\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s,v) = \frac{\overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}} + v\vec{N}$, $\vec{\psi}_{\widehat{N_1}}(s,v) = \frac{\vec{N}+\overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}} + v\overrightarrow{N_1}$ ve $\vec{\psi}_{\widehat{N_2}}(s,v) = \frac{\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\overrightarrow{N_2}$ olarak verilir.

Teorem 5. $(\widehat{N}), (\widehat{N_1}), (\widehat{N_2})$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin dağılma parametreleri $P_{\widehat{N}} = 0$, $P_{\widehat{N}_1} = \frac{-k_2}{\sqrt{2}}$ ve $P_{\widehat{N}_2} = \frac{k_1}{\sqrt{2}}$ olarak hesaplanır.

İspat. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin $P_{\widehat{N}} = \frac{\det((\vec{N} \wedge \overrightarrow{N^*})', \vec{N}, \vec{N}')}{\|\vec{N}'\|^2}$ dağılma parametresini için

$$\det\left(\left(\vec{N} \wedge \overrightarrow{N^*}\right)', \vec{N}, \vec{N}' \right) = \begin{vmatrix} -\frac{k_1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 \end{vmatrix} \tag{28}$$

determinantı hesaplanır. Eşitlik 28. hesaplandığında, $P_{\widehat{N}} = 0$ sonucu bulunur. Benzer işlemler yapıldığında $P_{\widehat{N}_1} = \frac{-k_2}{\sqrt{2}}$ ve $P_{\widehat{N}_2} = \frac{k_1}{\sqrt{2}}$ dağılma parametreleri elde edilir.

Teorem 6. $\{\widehat{N}, \widehat{N_1}, \widehat{N_2}\}$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin Gauss eğrilikleri

$$K_{\widehat{N}} = -\left(\frac{-vk_1k_2\overrightarrow{N_2} + vk_2k_1\overrightarrow{N_1}}{v^2k_1^2 + v^2k_2^2} \right)^2, K_{\widehat{N_1}} = \frac{\frac{{k_1}^2{k_2}^2}{2}}{\left(\frac{{k_2}^2}{2} + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)^2}, K_{\widehat{N_2}} = -\frac{{k_1}^2{k_2}^2}{2\left(\frac{{k_1}^2}{2} + (vk_2)^2 \right)^2} \tag{29}$$

ve ortalama eğrilikleri de

$$H_{\widehat{N}} = \frac{\sqrt{2}k_1 \frac{-vk_1k_2\overrightarrow{N_2} + vk_2k_1\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{v^2k_1^2 + v^2k_2^2}} + \frac{vk_2\left(\frac{k_1k_2}{\sqrt{2}} + vk'_1 \right) - vk_1\left(\frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk'_2 \right)}{v\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}}{2\left(v^2k_1^2 + v^2{k_2}^2 \right)}, \tag{30}$$

$$H_{\widehat{N_1}} = \frac{\frac{k_1^2k_2}{2\sqrt{\left(\frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)^2}} - \frac{\frac{k_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk'_1 \right) - \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)\left(\frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + {k_2}' + vk_1k_2 \right)}{\sqrt{\left(\frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)^2}}}{{k_2}^2 + 2\left(vk_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}} \right)^2} \tag{31}$$

ve

$$H_{\widehat{N_2}} = \frac{-2{k_2}^2 k_1 + \frac{k_1}{\sqrt{2}}\left(\left(vk_2 + \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)' + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1 k_2}{\sqrt{2}}\right) - \left(vk_2 + \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)\left(vk_2 k_1 + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{{k_1}'}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\left((vk_2)^2 + \frac{{k_1}^2}{2}\right)^3}} \tag{32}$$

olarak elde edilir.

İspat. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği kapalı regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliğini bulmak için I. Esas form ve II. Esas form ile birlikte normal vektör alanı bulunmalıdır. Öncelikle $\widehat{N}$ eğrisinin sırasıyla s ve v parametrelerine göre yönlü türevlerini alınmalıdır. O halde $\vec{\psi}_{\widehat{N}_s} = \frac{k_2 \vec{N}}{\sqrt{2}} + v\left(k_1 \overrightarrow{N_1} + k_2 \overrightarrow{N_2}\right)$ ve $\vec{\psi}_{\widehat{N}_v} = \vec{N}$ elde edilir. Buradan yönlü türevlerin iç çarpımı yardımıyla I. Esas formun katsayıları sırasıyla, $E =< \vec{\psi}_{\widehat{N}_s}, \vec{\psi}_{\widehat{N}_s} >= \frac{k_2^2}{2} + v^2 k_1^2 + v^2 {k_2}^2$, $F =< \vec{\psi}_{N_v}, \vec{\psi}_{N_s} >= \frac{k_2}{\sqrt{2}}$ ve $G =< \vec{\psi}_{\widehat{N}\ v}, \vec{\psi}_{\widehat{N}\ v} >= 1$ olarak bulunur. Buradan da I. Esas form $I = \left(\frac{{k_2}^2}{2} + v^2 {k_1}^2 + v^2 {k_2}^2\right) ds^2 + \sqrt{2} k_2 ds dv + dv^2$ olarak elde edilir. Şimdi de II. Esas formun katsayılarını bulabilmek için $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanını bulmalıyız. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı

$$n = \frac{\vec{\psi}_{\widehat{N}\ s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N_v}}}{\left\| \vec{\psi}_{\widehat{N}\ s} \wedge \vec{\psi}_{\widehat{N_v}} \right\|} = \frac{-vk_1 N_2 + vk_2 N_1}{\sqrt{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2}} \tag{33}$$

olarak elde edilir. $\widehat{N}$ dual eğrisinin belirttiği normal vektör alanı yardımıyla şimdi de bu eğriye ait II. Esas formun katsayılarını bulalım. $\widehat{N}$ dual eğrisinin s ve v parametrelerine göre tekrardan yönlü türev alma işlemi uygulanırsa

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}_{ss}} = \vec{N}\left(\frac{k\prime_2}{\sqrt{2}} + vk_1^2 + k_2^2\right) + \overrightarrow{N_1}\left(\frac{k_1 k_2}{\sqrt{2}} + vk'_1\right) + \overrightarrow{N_2}\left(\frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk'_2\right) \tag{34}$$

denklemi bulunur. Benzer işlemlerle $\vec{\psi}_{\widehat{N}_{sv}} = k_1 \overrightarrow{N_1} + k_2 \overrightarrow{N_2}$ ve $\psi_{\widehat{N}_{vv}} = 0$ sonuçları elde edilir. Elde edilen bu yönlü türevler ve Eşitlik 33. den II. Esas formun katsayıları

$$L =< \vec{\psi}_{\widehat{N}\ ss}, n >= \left\{\frac{vk_2\left(\frac{k_1 k_2}{\sqrt{2}} + vk\prime_1\right) - vk_1\left(\frac{k_2^2}{\sqrt{2}} + vk\prime_2\right)}{v\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}\right\}$$

$$M =< \vec{\psi}_{\widehat{N}\ sv}, n >= \left(\vec{\psi}_n\right)_{s,v} = \frac{-vk_1 k_2 \overrightarrow{N_2} + vk_2 k_1 \overrightarrow{N_1}}{\sqrt{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2}}\ ve\ N =< \vec{\psi}_{\widehat{N}\ vv}, \vec{n} >= 0 \tag{35}$$

olarak elde edilir. Buradan da Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$K_{\widehat{N}} = -\left(\frac{-vk_1 k_2 \overrightarrow{N_2} + vk_2 k_1 \overrightarrow{N_1}}{v^2 k_1^2 + v^2 k_2^2}\right)^2,$$

$$H_{\widehat{N}} = \frac{\sqrt{2}k_1 \frac{-vk_1k_2\overrightarrow{N_2}+vk_2k_1\overrightarrow{N_1}}{v\sqrt{k_1^2+k_2^2}} + \frac{vk_2\left(\frac{k_1k_2}{\sqrt{2}}+vk'_1\right)-vk_1\left(\frac{k_2^2}{\sqrt{2}}+vk'_2\right)}{v\sqrt{k_1^2+k_2^2}}}{2\left(v^2k_1^2+v^2{k_2}^2\right)} \tag{36}$$

olarak bulunur. Benzer işlemler ile $\widehat{N}_1$ ve $\widehat{N}_2$ dual eğrileri için Gauss ve ortalama eğrilik hesaplanır ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 7. Dual Darboux ($\vec{\varpi}$)ve dual Steiner ($\vec{D}$) vektörleri

$$\vec{\varpi} = -k_2\overrightarrow{N_1} + k_1\overrightarrow{N_2} + \varepsilon\left(\frac{k_1\vec{N}-k_2\overrightarrow{N_2}-k_1\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{D} = \oint \widehat{w} = -\overrightarrow{N_1}\oint k_2 + \overrightarrow{N_2}\oint k_1 + \varepsilon\left(N\oint\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \overrightarrow{N_1}\oint\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \overrightarrow{N_2}\oint\frac{k_2}{\sqrt{2}}\right) \tag{37}$$

ile hesaplanır.

İspat. Darboux vektörünün tanımından

$$\vec{\varpi} = w + \varepsilon w^* \tag{38}$$

$$\overrightarrow{\omega^*} = \alpha \wedge \vec{\omega} = \left(\frac{\vec{N}+\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}}\right) \wedge \left(-k_2\overrightarrow{N_1} + k_1\overrightarrow{N_2}\right) = \frac{k_1\vec{N}-k_2\overrightarrow{N_2}-k_1\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}} \tag{39}$$

olur. Eşitlik 39., Eşitlik 38. de yerine yazılırsa

$$\vec{\varpi} = -k_2\overrightarrow{N_1} + k_1\overrightarrow{N_2} + \varepsilon\left(\frac{k_1\vec{N}-k_2\overrightarrow{N_2}-k_1\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}}\right) \tag{40}$$

bulunur. Dual Steiner vektörün tanımından ise

$$\vec{D} = \oint \widehat{w} = -\overrightarrow{N_1}\oint k_2 + \overrightarrow{N_2}\oint k_1 + \varepsilon\left(\vec{N}\oint\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \overrightarrow{N_1}\oint\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \overrightarrow{N_2}\oint\frac{k_2}{\sqrt{2}}\right) \tag{41}$$

olarak elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 8. $\widehat{N}, \widehat{N_1}, \widehat{N_2}$ dual eğrilerinin oluşturduğu kapalı regle yüzeylere ait dual açılara ait eğimler sırasıyla $\Lambda_{\widehat{N}} = \varepsilon\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\oint k_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\oint k_1\right)$, $\Lambda_{\widehat{N_1}} = -\oint k_2 + \varepsilon\left(\sqrt{2}\oint k_1\right)$ ve $\Lambda_{\widehat{N_2}} = \oint k_1$ dir.

İspat.

$$\Lambda_{\widehat{N}} = -\langle \vec{D}, \vec{N} \rangle = -\langle \vec{d} + \varepsilon\overrightarrow{d^*}, \vec{N} + \varepsilon\overrightarrow{N^*} \rangle \tag{42}$$

Eşitlik 42. Düzenlenirse

$$\Lambda_{\widehat{N}} = \langle -\overrightarrow{N_1}\oint k_2 + \overrightarrow{N_2}\oint k_1, \vec{N} \rangle + \varepsilon\langle -\overrightarrow{N_1}\oint k_2 + \overrightarrow{N_2}\oint k_1, \vec{N} \rangle + \varepsilon\left(\left\langle\left(-\overrightarrow{N_1}\oint k_2 + \overrightarrow{N_2}\oint k_1, \frac{\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle + \left\langle\left(\vec{N}\oint\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \overrightarrow{N_1}\oint\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \overrightarrow{N_2}\oint\frac{k_2}{\sqrt{2}}\right), \vec{N}\right\rangle\right) \tag{43}$$

elde edilir. Burada iç çarpımlar hesaplandığında, $\Lambda_{\widehat{N}} = \varepsilon\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\oint k_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\oint k_1\right)$ olarak elde edilir. Benzer işlemlerle $\widehat{N_1}$ ve $\widehat{N_2}$ dual eğrilerine ait dual eğilim açısı hesaplanır ve böylelikle ispat tamamlanmış olur.

$\alpha(s)$ eğrisine ait $\alpha_{\overrightarrow{N_1}\overrightarrow{N_2}}(s) = \frac{\overrightarrow{N_1}+\overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}}$ Smarandache eğrisini için $\{\vec{N}, \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}\}$ dual eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla $\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s,v) = \frac{\overrightarrow{N_1}-\overrightarrow{N_2}}{\sqrt{2}} + v\vec{N}$, $\vec{\psi}_{\widehat{N_1}}(s,v) = \frac{-\vec{N}}{\sqrt{2}} + v\overrightarrow{N_1}$ ve $\vec{\psi}_{\widehat{N_2}}(s,v) = \frac{\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{2}} + v\overrightarrow{N_2}$ olarak verilir.

Teorem 9. $(\widehat{N}), (\widehat{N_1}), (\widehat{N_2})$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin dağılma parametreleri $P_{\widehat{N}} = 0$, $P_{\widehat{N_1}} = 0$ ve $P_{\widehat{N_2}} = 0$ olarak hesaplanır.

Teorem 10. $\{\widehat{N}, \widehat{N_1}, \widehat{N_2}\}$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$K_{\widehat{N}} = -\left(\frac{-vk_1k_2\overrightarrow{N_2}+vk_2k_1\overrightarrow{N_1}}{v^2k_1^2+v^2k_2^2}\right)^2, \; K_{\widehat{N_1}} = 0, \; K_{\widehat{N_2}} = -\frac{{k_1}^2{k_2}^2}{2\left(\frac{{k_1}^2}{2}+(vk_2)^2\right)^2} \tag{44}$$

$$H_{\widehat{N}} = \frac{\sqrt{2}k_1\frac{-vk_1k_2\overrightarrow{N_2}+vk_2k_1\overrightarrow{N_1}}{\sqrt{v^2k_1^2+v^2k_2^2}}+\frac{vk_2\left(\frac{k_1^2+k_1k_2}{\sqrt{2}}+vk'_1\right)-vk_1\left(\frac{k_2^2+k_1k_2}{\sqrt{2}}+vk'_2\right)}{v\sqrt{k_1^2+k_2^2}}}{2\left(v^2k_1^2+v^2{k_2}^2\right)} \tag{45}$$

$$H_{\widehat{N_1}} = \frac{\left(k_2^2+\sqrt{2}vk_1k_2\right)}{\sqrt{2}\left(k_2+\sqrt{2}vk_1\right)^2} \quad ve \quad H_{\widehat{N_2}} = \frac{\frac{k_1}{\sqrt{2}}\left(v{k_2}'+\frac{k_1^2}{\sqrt{2}}\right)-(vk_2)\left(vk_2k_1+\frac{{k_1}'}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{\left((vk_2)^2+\frac{{k_1}^2}{2}\right)^3}} \tag{46}$$

olarak elde edilir.

Teorem 11. Dual Darboux $(\vec{\varpi})$ ve dual Steiner $(\vec{D})$ vektörlerinin ani dönme vektörü

$$\vec{\varpi} = -k_2\overrightarrow{N_1} + k_1\overrightarrow{N_2} + \varepsilon\frac{(k_1+k_2)}{\sqrt{2}}\vec{N} \tag{47}$$

$$\vec{D} = \oint\vec{\varpi} = -\overrightarrow{N_1}\oint k_2 + \overrightarrow{N_2}\oint k_1 + \varepsilon\left(\vec{N}\oint\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \vec{N}_1\oint\left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \overrightarrow{N_2}\oint\frac{k_2}{\sqrt{2}}\right) \tag{48}$$

ile verilir.

Teorem 12. $\widehat{N}, \widehat{N_1}, \widehat{N_2}$ dual eğrilerinin oluşturmuş olduğu kapalı regle yüzeylere ait dual açılara ait eğimler sırasıyla

$$\Lambda_{\widehat{N}} = 0, \; \Lambda_{\widehat{N_1}} = -\oint k_2 + \varepsilon\left(\oint\left(\frac{k_1+k_2}{\sqrt{2}}\right)\right), \; \Lambda_{\widehat{N_2}} = \oint k_1 \tag{49}$$

dir. Ayrıca $\alpha(s)$eğrisine ait $\alpha_{\vec{N}\overrightarrow{N_1}\overrightarrow{N_2}}(s) = \frac{\vec{N}+\overrightarrow{N_1}+\overrightarrow{N_2}}{\sqrt{3}}$ Smarandache eğrisini için $\{\vec{N}, \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}\}$ dual eğrilerinin belirttiği regle yüzeyleri sırasıyla

$$\frac{\vec{N}_1+\vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v\vec{N}, \; \vec{\psi}_{\widehat{N_1}}(s,v) = \frac{\vec{N}+\vec{N}_2}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_1, \; \vec{\psi}_{\widehat{N_2}}(s,v) = \frac{\vec{N}+\vec{N}_1}{\sqrt{2}} + v\vec{N}_2 \tag{50}$$

olarak verilir.

Teorem 13. $(\widehat{N}), (\widehat{N_1}), (\widehat{N_2})$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin dağılma parametreleri $P_{\widehat{N}} = 0$, $P_{N_1} = -\frac{k_2}{\sqrt{2}}$ ve $P_{\widehat{N_2}} = \frac{k_1}{\sqrt{2}}$ olarak hesaplanır.

Teorem 14. $\{\widehat{N}, \widehat{C}, \widehat{W}\}$ dual eğrilerinin karşılık geldiği kapalı regle yüzeylerinin Gauss eğrilikleri

$$K_{\widehat{N}} = -\frac{v^2 {k_1}^2 {k_2}^2}{\left(v^2 k_1^2 + v^2 {k_2}^2\right)^2}, K_{\widehat{N_1}} = -\frac{{k_1}^2 {k_2}^2}{2\left(\frac{{k_2}^2}{2} + \left(v k_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2}, K_{\widehat{N_2}} = -\frac{{k_1}^2 {k_2}^2}{2\left(\frac{{k_1}^2}{2} + \left(v k_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2} \tag{51}$$

ve ortalama eğrilikleri

$$H_{\widehat{N}} = \frac{\sqrt{2}\frac{v {k_1}^2 k_2 + k_1 {k_2}^2}{v\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} + \frac{v k_2\left(k_1 k_2 + k_2^2 + v {k_2}'\right) - v k_1\left(k_1^2 + k_1 k_2 + v {k_1}'\right)}{v\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}}{2\left(v^2 k_1^2 + v^2 {k_2}^2\right)} \tag{52}$$

$$H_{\widehat{N_1}} = \frac{-k_1^2 k_2 - \frac{k_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{k_1^2 + k_2^2 + {k_2}'}{\sqrt{2}} + v k'_1\right) + \left(v k_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{k_2^2 + {k_2}'}{\sqrt{2}} + v k_1 k_2\right)}{\sqrt{\left({k_2}^2 + 2\left(v k_1 + \frac{k_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^3}} \tag{53}$$

$$H_{\widehat{N_2}} = \frac{-2{k_2}^2 k_1 + \frac{k_1}{\sqrt{2}}\left(\left(v k_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)' + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{k_1 k_2}{\sqrt{2}}\right) - \left(v k_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)\left(v k_2 k_1 + \frac{k_1^2}{\sqrt{2}} + \frac{{k_1}'}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{\left(\left(v k_2 - \frac{k_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{{k_1}^2}{2}\right)^3}} \tag{54}$$

olarak elde edilir.

Teorem 15. Dual Darboux $(\vec{\varpi})$ ve dual Steiner $(\vec{D})$ vektörlerinin ani dönmesi

$$\vec{\varpi} = -k_2\vec{N}_1 + k_1\vec{N}_2 + \varepsilon\left(\frac{k_1\vec{N} - k_2\vec{N}_2 - k_1\vec{N}_1}{\sqrt{2}}\right) \tag{55}$$

$$\vec{D} = \oint \vec{\varpi} = -\vec{N}_1 \oint k_2 + \vec{N}_2 \oint k_1 + \varepsilon\left(\vec{N} \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \vec{N}_1 \oint \left(\frac{k_1}{\sqrt{2}}\right) - \vec{N}_2 \oint \frac{k_2}{\sqrt{2}}\right) \tag{56}$$

ile verilir.

Teorem 16. $\widehat{N}, \widehat{N_1}, \widehat{N_2}$ dual eğrilerinin oluşturmuş olduğu kapalı regle yüzeylere ait dual açılara ait eğimler sırasıyla $\Lambda_{\widehat{N}} = 0$, $\Lambda_{\widehat{N_1}} = -\oint k_2$ ve $\Lambda_{\widehat{N_2}} = \oint k_1$ dir.

SAYISAL ÖRNEKLER

Dual $\widehat{N}\widehat{N}_1$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi

$\alpha(s) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\cos s, \frac{3}{\sqrt{13}}s, \frac{2}{\sqrt{13}}\sin s\right)$ eğrisini göz önüne alalım. $\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s,v) = \vec{N} \wedge \overrightarrow{N^*} + v\vec{N}$ regle yüzeyi

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s,v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\cos r - v\cos s, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin r, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s\cos r - v\sin s\right) \tag{57}$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde

$$\vec{\psi}_{\widehat{N_1}}(s,v)=\overrightarrow{N_1}\wedge\overrightarrow{N_1}^{*}+v\overrightarrow{N_1}=(-\cos s+v\sin s\cos r,-v\sin r,-\sin s-v\cos s\cos r) \tag{57}$$

$$\vec{\psi}_{\widehat{N_2}}(s,v)=\overrightarrow{N_2}\wedge\overrightarrow{N_2}^{*}+v\overrightarrow{N_2}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\cos r+v\sin s\sin r,\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin r+v\cos r,-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s-\cos s\cos r-v\cos s\sin r\end{pmatrix} \tag{59}$$

olarak verilir.

Dual $\widehat{N}\widehat{N}_2$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi

Örnek 1. de verilen eğri için Dual $\widehat{N}\widehat{N}_2$ Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeylerini bulalım.

$\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s,v)=\vec{N}\wedge\overrightarrow{N^{*}}+v\vec{N}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\sin r-v\cos s,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos r,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s\sin r-v\sin s\right)$ olarak elde edilir. Benzer işlemlerle

$$\vec{\psi}_{\widehat{N_1}}(s,v)=\overrightarrow{N_1}\wedge\overrightarrow{N_1}^{*}+v\overrightarrow{N_1}=\begin{pmatrix}-\cos s+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\sin r+v\sin s\cos r,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos r-\sin r,\\ -\sin s-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s\sin r-v\cos s\cos r\end{pmatrix} \tag{60}$$

ve

$$\vec{\psi}_{\widehat{N_2}}(s,v)=\overrightarrow{N_2}\wedge\overrightarrow{N_2}^{*}+v\overrightarrow{N_2}=(-\cos s+v\sin s\sin r,v\cos r,-\sin s-v\cos s\sin r) \tag{61}$$

olarak verilir.

Dual $\widehat{N_1}\widehat{N_2}$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi

Örnek 1. de verilen eğri için Dual $\widehat{N_1}\widehat{N_2}$ Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeylerini bulalım.

$$\vec{\psi}_{\widehat{N}}(s,v)=\vec{N}\wedge\overrightarrow{N^{*}}+v\vec{N}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\cos r+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\sin r-v\cos s,-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin r+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos r,\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s\cos r-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s\sin r-v\sin s\end{pmatrix} \tag{62}$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde

$$\vec{\psi}_{\widehat{N_1}}(s,v)=\overrightarrow{N_1}\wedge\overrightarrow{N_1}^{*}+v\overrightarrow{N_1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\sin r+v\sin s\cos r,\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos r-v\sin r,\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s\sin r-v\cos s\cos r\end{pmatrix} \tag{63}$$

ve

$$\vec{\psi}_{\widehat{N_2}}(s,v)=\overrightarrow{N_2}\wedge\overrightarrow{N_2}^{*}+v\overrightarrow{N_2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\cos r+v\sin s\sin r,\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin r+v\cos r,\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s\cos r-v\cos s\sin r\end{pmatrix} \tag{64}$$

olarak verilir.

Dual $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Smarandache Eğrisinin Karşılık Geldiği Regle Yüzeyi

Örnek 2 de verilen eğri için Dual $\widehat{N}\widehat{N}_1\widehat{N}_2$ Smarandache eğrisinin karşılık geldiği regle yüzeylerini bulalım.

$$\psi_{\widehat{N}}(s,v)=\vec{N}\wedge\overrightarrow{N^{*}}+v\vec{N}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\cos r+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\sin r-v\cos s,\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin r+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos r,\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s\cos r-\cos s\sin r-v\sin s\end{pmatrix} \tag{65}$$

olarak elde edilir. Benzer işlemlerle

$$\vec{\psi}_{\widehat{N_1}}(s,v)=N_1\wedge {N_1}^{*}+vN_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\sin r+\frac{1}{\sqrt{2}}v\sin s\cos r,\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos r-v\sin r,\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s\sin r-v\cos s\cos r\end{pmatrix} \tag{66}$$

ve

$$\vec{\psi}_{\widehat{N_2}}(s,v)=\overrightarrow{N_2}\wedge\overrightarrow{{N_2}^{*}}+v\overrightarrow{N_2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\cos r+v\sin s\sin r,\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin r+v\cos r,\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos s\cos r-v\cos s\sin r\end{pmatrix} \tag{67}$$

olarak verilir.

SONUÇ

Bu çalışmada daha önce farklı uzaylarda eğriler ve yüzeyler üzerine yapılmış bazı çalışmalar incelenmiş ve bu çalışmalar daha ileri bir noktaya taşınmıştır. Ayrıca dual uzay ile ilgili bazı temel kavram ve teoremlere yer verilmiştir. E-Study teoremi prensibince dual birim küre üzerinde dual N-Bishop çatısının elemanları kullanılarak elde edilen dual Smarandache eğrileri tanımlanmıştır. Ayrıca bu dual eğrilerin E^3 Öklid uzayında oluşturduğu regle yüzeyler üzerinde Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanıp, bu regle yüzeylere ait dual Steiner vektörü ve dual açısı bulunmuştur. Dual N-Bishop eğrilerini elde ettiğimiz bu çalışmamızda yeni bir eğri ve yüzey tanımlanarak literatüre katkıda bulunulmuştur.

Çıkar Çatışması

Makale yazarları aralarında herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan ederler.

Yazar Katkısı

Yazarlar makaleye eşit oranda katkı sağlamış olduklarını beyan eder.

KAYNAKLAR

Abdel Baky RA, 2002. An Explicit Characterization of Dual Spherical Curve. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series Al, 51(2):1–9.

Bektaş Ö, Yüce S, 2013. Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in E3, Rom. J. Math. Comput. Sci. 3: 48–59.

Bishop RL, 1975. There is More than One Way to Frame a Curve. The American Mathematical Monthly, 82(3): 246-251.

Bükcü B, Karacan MK, 2008. Bishop Frame of the Spacelike Curve with a Spacelike Principal Normal in Minkowski 3-Space, Communications Faculte Science University Ankara Series A1 Mathematics Statistics, 57(1): 13-22.

Bükcü B, Karacan MK, 2009. The Slant Helices According to Bishop Frame, International J. of Computational and Mathematical Sciences, 3(2): 67-70.

Bükcü B, Karacan MK, 2010. Bishop Frame of the Spacelike Curve with a Spacelike Binormal in Minkowski 3-Space, Selçuk J. of Applied Mathematics, 11(1): 15-25.

Clifford WK, 1873. Preliminary Sketch of Biquaternions. Proceedings of the London Mathematical Society, 4: 361–395.

Çalışkan A, Şenyurt, S. 2020. Curves and Ruled Surfaces According to Alternative Frame in Dual Space. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 69(1): 684–698.

Gürses NB, Bektaş O, Yüce S, 2016. Special Smarandache Curves in R31. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 65(2): 143–160.

Hacısalihoğlu HH, 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen Edb. Fakültesi. Ankara.

Hacısalihoğlu HH, 1983. Diferansiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Yayınları. Malatya.

Izumiya S, Takeuchi N, 2004. New Special Curves and Developable Surfaces, Turkish Journal of Mathematics, 28(2), 153-164.

Kahraman T, Uğurlu HH, 2014. Dual Smarandache Curves and Smarandache Ruled Surfaces. Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 2(1).

Keskin O, Yaylı Y, 2017. An Application of N-Bishop Frame to Spherical Images for Direction Curves, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 14(11), 1750162.

Samancı HK, Kocayiğit H, 2019. N-Bishop Darboux Vector of the Spacelike Curve with Spacelike Binormal, Thermal Science, 23(1), 353-360.

Scofield PD, 1995. Curves of Constant Precession. The American Mathematical Monthly, 102(6): 531-537.

Uzunoğlu B, Gök İ, Yaylı Y, 2016. A New Approach on Curves of Constant Precession, Applied Mathematics and Computation, 275: 317-323.

Yaylı Y, Saracoğlu S, 2011. Some Notes on Dual Spherical Curves. Journal of Informatics and Mathematical Sciences, 3(2): 177–189.

Yılmaz S, Turgut MA, 2010. New Version of Bishop Frame and an Application to Spherical Images, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 371(2):764–776.