ISING MODELDE KORELASYONLU İNDİRGENMİŞ TRANSFER MATRİS YAKLAŞIMI

Tuncer KAYA*, M. Murat ARIK**

ÖZET

Bu çalışmada 2 boyutlu indirgenmiş transfer matris yaklaşımı, çok parçacıklı korelasyon fonksiyonu kullanılarak geliştirilmeye ve daha iyi bir K_c=J/k_BT değeri elde edilmeye çalışılmıştır. Bunun için Hamiltonyendeki spinler, ortalama spin manyetizasyonu, ($\langle\sigma\rangle$), yerine çok parçacıklı korelasyon fonksiyonu, $\sigma_{i,j+1} = \langle\sigma\rangle + \lambda(\sigma_{i,j} - \langle\sigma\rangle)$, ile yer değiştirilmiştir. Burada z, koordinasyon sayısı olmak üzere λ=1/(z-1)=1/3 alınmıştır. İndirgenmiş transfer matris yaklaşımının 2 boyutlu Ising ferromanyetiği için tahmin ettiği K_c=J/k_BT değeri 0.401'dir. Korelasyonlu indirgenmiş transfer matris metodunun tahmin ettiği değer ise K_c=J/k_BT=0.455' dir. Bu değer L. Onsager'in bulduğu gerçek değerden sadece % 3.4 farklıdır.

Anahtar Kelimeler: Klasik istatistik mekanik, Klasik spin modelleri, Latis teorisi ve istatistiği

CORRELATED REDUCED TRANSFER MATRIX APPROACH FOR ISING MODEL

ABSTRACT

In this work we try to improve 2D reduced transfer matrix aproach and critical coupling strenght, K_c=J/k_BT, using many-body correlated function. For this aim we replace local spin degrees of freedom with many body correlated function, $\sigma_{i,j+1} = \langle\sigma\rangle + \lambda(\sigma_{i,j} - \langle\sigma\rangle)$, instead of magnetization per spin, ($\langle\sigma\rangle$), in the Hamiltonyen. In this function we take λ = 1/(z-1)=1/3, where z is the coordination number. K_c=J/k_BT of 2D Ising model in reduced transfer matrix aproach is 0.401. However correlated reduced transfer matrix approach supposes K_c=J/k_BT=0.455. This result deviates from the exact value obtained by Onsager by 3.4 percent

Keywords: Clasical statistical mechanics, Clasical spin models, Latice theory and statistic

**Yrd. Doç. Dr., Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Esenler - İstanbul*

*** Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Esenler - İstanbul*

1. GİRİŞ

İstatistik mekaniğin en çok çalışılan konularından biri de Ising modeldir. Ernst Ising doktora tezinde hocası Wilhelm Lenz tarafından önerilen manyetik faz geçişi problemini inceledi ve kendi adı ile anılan modeli kurdu (Ising, 1925). Tezinde, manyetik momentlerin bir zincir üzerindeki özel dizilimini araştırdı. Bu dizilimde momentlerin özel olarak sadece aşağı ve yukarı yönelimlere sahip olduğu ve sadece en yakın komşuları ile çiftler halinde etkileştiği varsayıldı. Ising, 1 boyutta sadece 0 sıcaklıkta manyetik faz geçişinin olduğunu gösterdi.

1941 yılında Hendrik Kramers ve Gregory Wannier dış manyetik alan olmaması durumunda kare latis için kritik sıcaklık değerini veren bir ifade buldu (Kramers ve Wannier, 1941). 1944 yılında Lars Onsager, Helmholtz serbest enerjisini kullanarak Kramers ve Wannier tarafından bulunan kritik sıcaklık değerinin doğruluğunu açık bir şekilde gösterdi (Onsager, 1944).
1960 yılında Cyril Domb, 2 boyutta bal peteği ve üçgen latis için kesin çözümü buldu (Domb, 1960).

Ising model uzun yıllardır çalışılmasına rağmen kesin çözüm 3 boyutlu örgülerde henüz yapılamamıştır. Bu sebeple üzerinde çok çalışılan bir teoridir. Kesin sonuçlar olmasa da değişik yaklaşım metotları mevcuttur. 1972 yılında yayınlanan seri açılım metodu bunlardan biridir (Sykes vd., 1972). Ayrıca renormalizasyon grup teorileri vardır (Fisher, 1974; Kadanoff vd., 1967; Maris ve Kadanoff, 1978; Wilson, 1971).
Ising modelin çözümünde en çok kullanılan yaklaşımlardan biri ortalama alan teorileridir. Ortalama alan yaklaşımı 1907 yılında Weiss tarafından geliştirilmiştir (Weiss, 1907). 1935 yılında geliştirilen Bragg-Williams (Bragg vd., 1935) ve Bethe-Peierls (Bethe, 1935; Peierls, 1936) metotları ortalama alan yaklaşımını kullanan diğer metotlardır. Bu iki ortalama alan metodunun eksiklikleri vardır. Bunun sebebi bu metotların korelasyon etkilerini tam olarak hesaba katmamasıdır. Korelasyon etkilerini içine alan bir çok ortalama alan metotları geliştirilmiştir. Bu konu çok uzun bir konudur (Smart, 1966). Ama bir kaç önemli noktaya temas edilebilir.

H.B. Callen ve diğerleri 1963 yılında diagramatik açılım metodunu kullanarak çok sistematik bir yaklaşım yapmışlardır (Streb vd., 1963). Ayrıca H.B. Callen 1963 yılında tam spin korelasyon fonksiyonunu bulmuştur (Callen, 1963).

1974 yılında M.E. Lines, etkin (ortalama) alan teorisi içine çok parçacıklı statik spin korelasyonunu katarak, korelasyonlu etkin alan teorisini geliştirmiştir (Lines, 1944). Bunun için extra bir terim kullanmıştır. Bu teori manyetik sistemlerdeki bir çok probleme uygulanmıştır.

T. Kaneyoshi ve diğerleri 1981 yılında yeni korelasyonlu etkin alan teorisini geliştirmiştir (Kaneyoshi vd., 1981). Teorilerinde Honmura ve Kaneyoshi'nin geliştirdiği difransiyel operatör tekniğini (Honmura R. ve Kaneyoshi T., 1979), tam spin korelasyon fonksiyonunu ve çok parçacıklı korelasyon fonksiyonunu kullanmışlardır. Buldukları sonuç Bethe-Peierls'in bulduğu sonuç ile aynıdır. Teorileri birçok probleme uygulanmıştır (Honmura, 1984; Taggrat, 1944).

2000 yılında Wysin ve Kaplan öz uyumlu korelasyonlu etkin alan teorisini bulmuşlardır (Wysin ve Kaplan, 2000). Buldukları sonuç Bethe-Peierls-Weiss'nın bulduğu kritik sıcaklık sonuçlarından daha iyidir.

Yakın bir zamanda geliştirilen indirgenmiş transfer matris yaklaşımı (Kaya ve Arık, 2009) Hamiltonyende serbest spinleri, ortalama spin manyetizasyonu ile yer değiştirir. Bunu kısa ve uzun erişimli etkileşmeleri ve dalgalanmaları hesaba katmak için yapar. İndirgenmiş transfer matris yaklaşımı kritik sıcaklığı uygun bir hata payı ile tahmin edilir. Korelasyonlu indirgenmiş transfer matris yaklaşımı ise indirgenmiş transfer matris yaklaşımından farklı olarak serbest spinleri T. Kaneyoshi ve diğerlerinin kullandığı çok parçacıklı korelasyon fonksiyonu ile yer değiştirir. Eğer bu fonksiyondaki statik korelasyon parametresi λ yerine 0 alınırsa indirgenmiş transfer matris yaklaşımının kullandığı dönüşüm elde edilir. Doğal olarak bu çalışmada bulunan sonuçlarda λ yerine 0 alınırsa indirgenmiş transfer matris yaklaşımındaki sonuçların aynısı elde edilir.

2. İKİ BOYUTTA KORELASYOLU İNDİRGENMİŞ TRANSFER MATRİS YAKLAŞIMI

Ising sisteminin makroskobik özellikleri kanonik küme bölüşüm fonksiyonu

$$Q = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{-\beta \mathrm{H}\{\sigma_i\}} \tag{1}$$

ile incelenebilir. Burada $\beta = 1/k_B T$, k_B Boltzman sabiti ve T sistemin sıcaklığıdır.
İki boyutta N tane özdeş spinden oluşan kare örgüde Hamiltonyen

$$\mathrm{H}\{\sigma_i\} = -\sum_{<i,j>} J\sigma_{i,j}\left(\sigma_{i+1,j} + \sigma_{i,j+1}\right) - \sum_{i,j} h\sigma_{i,j} \tag{2}$$

denklemi ile verilir. Burada J etkileşme parametresi ve h dış manyetik alandır. Spinler sadece $\sigma_{i,j} = \pm 1$ değerlerini alabilir. $<i,j>$ en yakın komşular üzerinden toplam alındığını gösterir.
İndirgenmiş transfer matris metodunda bazı $\sigma_{i,j}$'ler, ortalama spin manyetizasyonu $<\sigma>$ ile değiştirilir.
T. Kaneyoshi ve diğerlerinin yeni korelasyonlu etkin alan teorisinde kullandıkları çok parçacıklı korelasyon fonksiyonu

$$\sigma_{i+\delta} = \langle \sigma_{i+\delta} \rangle + \lambda\left(\sigma_i - \langle \sigma_i \rangle\right) \tag{3}$$

ile verilir. Burada λ, sıcaklığa bağlı statik korelasyon parametresidir. Ferromanyetik sistem için her zaman $\langle \sigma_{i+\delta} \rangle = \langle \sigma \rangle$ yazılabilir. Çok parçacıklı korelasyon fonksiyonunu 2 boyutta Hamiltonyende kullanmak için yeniden düzenlersek

$$\sigma_{i,j+1} = \langle \sigma \rangle + \lambda\left(\sigma_{i,j} - \langle \sigma \rangle\right) \tag{4}$$

ifadesi bulunur. Dikkat edilirse statik korelasyon parametresi $\lambda = 0$ alınırsa indirgenmiş transfer matris yaklaşımında yapılan dönüşüm elde edilir.
Çok parçacıklı korelasyon fonksiyonu Hamiltonyende yerine yazılır ise

$$\mathrm{H}\{\sigma_i\} = -\sum_{<i,j>} J\sigma_{i,j}\left[\sigma_{i+1,j} + \left(\langle\sigma\rangle + \lambda\left(\sigma_{i,j} - \langle\sigma\rangle\right)\right)\right] - \sum_{i,j} h\sigma_{i,j} \tag{5}$$

denklemi bulunur. Ara işlemlerden sonra aşağıdaki Hamiltonyen elde edilir.

$$\mathrm{H}\{\sigma_i\} = -\sum_{<i,j>} J\sigma_{i,j}\sigma_{i+1,j} - \sum_{i,j}\left[J\langle\sigma\rangle(1-\lambda) + h\right]\sigma_{i,j} - \sum_{i,j} J\lambda \tag{6}$$

Bulunan Hamiltonyeni

$$\begin{aligned}\mathrm{H}\{\sigma_i\} = &-\sum_{<i,j>} J\sigma_{i,j}\sigma_{i+1,j} \\ &-\sum_{i,j}\left[J\langle\sigma\rangle(1-\lambda) + h\right]\frac{1}{2}\left(\sigma_{i,j} + \sigma_{i+1,j}\right) - \sum_{i,j} J\lambda\end{aligned} \tag{7}$$

şeklinde de yazabiliriz. Bu Hamiltonyen, bölüşüm fonksiyonunda yerine konur

$$\begin{aligned}Q = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp\Bigg[&\sum_{<i,j>} \beta J\sigma_{i,j}\sigma_{i+1,j} \\ &+ \sum_{i,j}\left[\beta J\langle\sigma\rangle(1-\lambda) + \beta h\right]\frac{1}{2}\left(\sigma_{i,j} + \sigma_{i+1,j}\right) + \sum_{i,j} \beta J\lambda\Bigg]\end{aligned} \tag{8}$$

ve K=βJ ve H=βh dönüşümleri yapılırsa bölüşüm fonksiyonu aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned}Q = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp\Bigg[&\sum_{<i,j>} K\sigma_{i,j}\sigma_{i+1,j} \\ &+ \sum_{i,j}\left[K\langle\sigma\rangle(1-\lambda) + H\right]\frac{1}{2}\left(\sigma_{i,j} + \sigma_{i+1,j}\right) + \sum_{i,j} K\lambda\Bigg].\end{aligned} \tag{9}$$

Bölüşüm fonksiyonunu çözmek için transfer matrisi yöntemi kullanılır. 2*2'lik P transfer matrisinin elemanları

$$<\sigma_{i,j}\left|P\right|\sigma_{i+1,j}>= e^{K\sigma_{i,j}\sigma_{i+1,j} + \frac{1}{2}\left[K\langle\sigma\rangle(1-\lambda) + H\right]\left(\sigma_{i,j} + \sigma_{i+1,j}\right) + K\lambda} \tag{10}$$

eşitliğinden bulunur. Bulunan P matrisinin elemanları

$$
\begin{aligned}
&<+1\left|P\right|+1>=e^{K+\left(K<\sigma>(1-\lambda)+H\right)+K\lambda}\\
&<-1\left|P\right|-1>=e^{K-\left(K<\sigma>(1-\lambda)+H\right)+K\lambda}\\
&<+1\left|P\right|-1>=e^{-K+K\lambda}\\
&<-1\left|P\right|+1>=e^{-K+K\lambda}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

yerine yazılırsa P matrisi

$$
\begin{pmatrix}
e^{K+K<\sigma>(1-\lambda)+H+K\lambda} & e^{-K+K\lambda}\\
e^{-K+K\lambda} & e^{K-K<\sigma>(1-\lambda)-H+K\lambda}
\end{pmatrix}
\tag{12}
$$

bulunur. P matrisi bölüşüm fonksiyonuna konursa elde edilen eşitlik:

$$
Q=\sum_{\{\sigma_i\}}<\sigma_1\left|P\right|\sigma_2><\sigma_2\left|P\right|\sigma_3>\cdots\cdots<\sigma_{N^2}\left|P\right|\sigma_{N^2+1}>.
\tag{13}
$$

Sınır şartları $\sigma_{N^2+1}=\sigma_1$ kabul edilirse, bölüşüm fonksiyonu

$$
Q=\sum_{\{\sigma_i\}}<\sigma_1\left|P^{N^2}\right|\sigma_1>=TrP^{\left(N^2\right)}=m_1^{N^2}+m_2^{N^2}
\tag{14}
$$

şeklini alır. Burada m_1 ve m_2, P matrisinin özdeğerleridir. Q bölüşüm fonksiyonunu bulmak için tek yapmamız gereken bu özdeğerleri bulup yerine koymaktır.

P matrisinin özdeğerleri:

$$
\begin{aligned}
m_{1,2}&=e^{K(1+\lambda)}\cosh\left[K<\sigma>(1-\lambda)+H\right]\\
&\mp e^{K(1+\lambda)}\sqrt{\sinh^2\left[K<\sigma>(1-\lambda)+H\right]+e^{-4K}}\;.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Termodinamik limitlerde çalışacağımız için $N^2\to\infty$ limitinde $m_1^{N^2} \gg m_2^{N^2}$ olduğu görülür. Bu durumda

$$
Q=m_1^{N^2}+m_2^{N^2}\approx m_1^{N^2}
\tag{16}
$$

yazılabilir. En son olarak Q bölüşüm fonksiyonu:

$$
\begin{aligned}
Q&=e^{K(1+\lambda)N^2}\cosh\left[K<\sigma>(1-\lambda)+H\right]^{N^2}\\
&+e^{K(1+\lambda)N^2}\left[\sqrt{\sinh^2\left[K<\sigma>(1-\lambda)+H\right]+e^{-4K}}\right]^{N^2}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Böylece Q bölüşüm fonksiyonu K, <σ> ve H değişkenlerine bağlı olarak bulunmuş olur.

Ortalama spin manyetizasyonu, Helmholtz serbest enerji formalizminde aşağıdaki gibi verilir:

$$
<\sigma>=\frac{1}{N^2}\frac{\partial\ln Q}{\partial H}.
\tag{18}
$$

(18) formülü kullanılarak Q bölüşüm fonksiyonundan bulunan ortalama spin manyetizasyonu:

$$\left\langle\sigma\right\rangle=\frac{\left(1+K\left(1-\lambda\right)\dfrac{\partial\left\langle\sigma\right\rangle}{\partial H}\right)\sinh\left(K\left(1-\lambda\right)<\sigma>+H\right)}{\sqrt{\sinh^2\left(K\left(1-\lambda\right)<\sigma>+H\right)-e^{-4K}}}. \tag{19}$$

Bu ifadeyi $\dfrac{\partial\left\langle\sigma\right\rangle}{\partial H}$ teriminden dolayı çözmek zordur. Ama güzel bir yaklaşıkla bu terim bulunursa bütün ifade çözülebilir. Türev ifadesini bulmak için Hamiltonyendeki spinlerden ikisi çok parçacıklı korelasyon fonksiyonu ile değiştirilir.

Yeni Hamiltonyen:

$$\mathrm{H}\{\sigma_i\}=-\sum_{<i,j>}2J\left[\left\langle\sigma\right\rangle+\lambda\left(\sigma_{i,j}-\left\langle\sigma\right\rangle\right)\right]\sigma_{i,j}-\sum_{i,j}h\sigma_{i,j}\,. \tag{20}$$

Buradan bulunan Hamiltonyen bölüşüm fonksiyonunda yerine konursa yeni bölüşüm fonksiyonu:

$$Q=\sum_{\{\sigma_i\}}\mathrm{e}^{\left[\sum\limits_{<i,j>}2K\langle\sigma\rangle(1-\lambda)\sigma_{i,j}+\sum\limits_{<i,j>}H\frac{1}{2}(\sigma_{i,j}+\sigma_{i+1,j})+\sum\limits_{i,j}2K\lambda\right]}. \tag{21}$$

Matris yöntemi ile bu bölüşüm fonksiyonu çözülürse bulunan bölüşüm fonksiyonu

$$Q=e^{2K\lambda N^2}\left[2\cosh\left[2K<\sigma>\left(1-\lambda\right)+H\right]\right]^{N^2} \tag{22}$$

ve ortalama spin manyetizasyonu

$$\left\langle\sigma\right\rangle=\tanh\left(2K<\sigma>\left(1-\lambda\right)+H\right)\left(1+2K\left(1-\lambda\right)\frac{\partial<\sigma>}{\partial H}\right) \tag{23}$$

şeklinde bulunur. Buradan $\partial\left\langle\sigma\right\rangle/\partial H$ çekilir.

$$\frac{\partial<\sigma>}{\partial H}=\left[\frac{\left\langle\sigma\right\rangle}{\tanh\left(2K<\sigma>\left(1-\lambda\right)+H\right)}-1\right]\frac{1}{2K\left(1-\lambda\right)}. \tag{24}$$

(24) ifadesi (19) denkleminde yerine konursa ortalama spin manyetizasyonu:

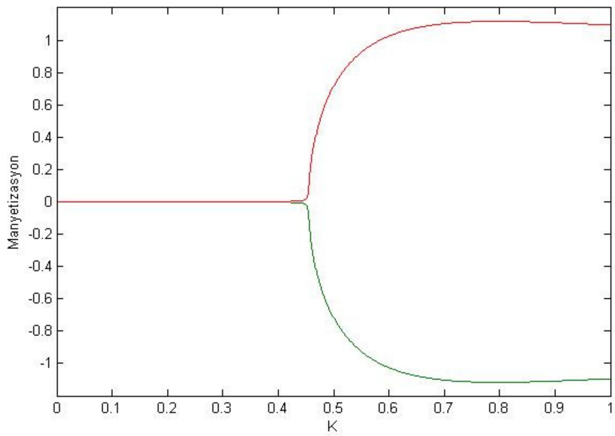
$$\left\langle\sigma\right\rangle=\frac{\sinh\left(K\left(1-\lambda\right)<\sigma>+H\right)}{\sqrt{\sinh^2\left(K\left(1-\lambda\right)<\sigma>+H\right)-e^{-4K}}}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\left\langle\sigma\right\rangle}{\tanh\left(2K<\sigma>\left(1-\lambda\right)+H\right)}\right). \tag{25}$$

Dikkat edilirse λ yerine 0 koyduğumuz zaman 2 boyutta indirgenmiş transfer matris yaklaşımında elde edilen ortalama spin manyetizasyon bulunur.

(25) ifadesinde λ yerine 2 boyutta kare latis için T. Kaneyoshi ve diğerlerinin bulduğu (Kaneyoshi vd., 1981)

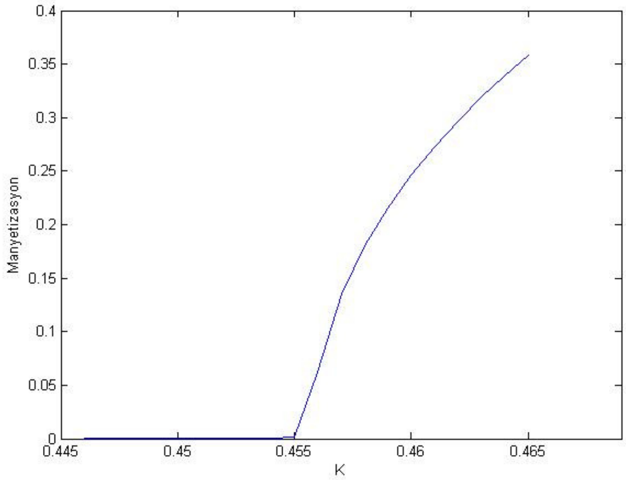
$$\lambda_c = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{3} \tag{26}$$

değeri kullanılabilir. Burada z koordinasyon sayısıdır. (25) denklemini analitik olarak çözmek zordur ama nümerik olarak çözülebilir. H yerine 0 alarak elde edilen nümerik çözüm Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. 2 Boyutta Korelasyonlu İndirgenmiş Transfer Matris Yaklaşımında Manyetizasyonun Davranışı

Kritik noktayı tam olarak bulmak için kritik nokta civarında daha hassas nümerik hesap yapılır. Kritik nokta civarında manyetizasyonun davranışı Şekil 2'deki grafikte verilmiştir. Bulunan K_c değeri 0.455'dir.



Şekil 2. 2 Boyutta Korelasyonlu İndirgenmiş Transfer Matris Yaklaşımında Kritik Nokta Civarında Manyetizasyonun Davranışı

3. SONUÇLAR

Renormalizasyon grup teorisi (RGT), Bethe-Peierls ve Bragg-Williams metodlarının 2 boyutta Ising modeli için tahmin ettikleri kritik K_c değerleri en az %15 hata payı içerir.

İndirgenmiş transfer matris yaklaşımı iki boyutta K_c değerinin 0.401 olacağını söyler. Bu değer L. Onsager'in bulduğu gerçek değerden sadece %8.8 farklıdır. Korelasyonlu indirgenmiş transfer matris yaklaşımı ise ortalama manyetizasyon yerine çok parçacıklı korelasyon fonksiyonunu kullanarak daha iyi bir sonuç elde etmiştir. Bulunan Kc değeri 0.455'dir. Bu ise gerçek değerden sadece % 3.4 farklıdır.

KAYNAKÇA

Baxter R. J., (1989), Exactly Solved Models in Statistical Mechanics, 3th. Ed., London, Academic Press Limited

Bethe H. A., (1935), "Statistical Theory of Superlattices", Proc. Roy. Soc. London Ser., A 150**,** 552-575

Bragg W.L., Williams E.J., (1935), "The Effect of Thermal Agitation on Atomic Arrangement in Alloys", Proc. Roy. Soc. London Ser., A 145**,** 699-730

Callen H.B., (1963), "A Note on Green Functions and the Ising Model", Phys. Lett. 4, 161-161

Domb C., (1960), Adv. Phys. **9**, "On the Theory of Cooperatif Phenomena", 149-361

Fisher M.E., (1974), "The Renormalization Group in the Theory of Critical Behavior", Rev. Mod. Phys. 46, 597-616

Honmura R., (1984), "Correlated-Effective-Field Treatment of the Anisotropic Ising Ferromagnet: Thermodynamical Properties", Phys. Rev. B 30**,** 348-358

Honmura R., Kaneyoshi T. (1979), " Contribution to the New Type of Effective-Field Theory of the Ising Model", J. Phys. C 12, 3979-3992

Ising E., (1925), "Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus", Zeits f. Physik, **31**, 253-258

Kadanoff L.P. vd., (1967), "Static Phenomena Near Critical Points: Theory and Experiment", Rev. Mod. Phys. 39, 395-431

Kaneyoshi T., Fittipaldi I.P, Honmura R., Manabe T., (1981), "New Correlated-Effective-Field Theory in the Ising Model", Phys. Rev. B 24, 481-484

Kaya T. ve Arık M.M., (2009), "Reduced Transfer Matrix Approach in Ising Model", International Journal of Modern Physics B, (Kabul Edildi).

Kramers H. A., Wannier G. H., (1941), "Statistics of the Two-Dimensional Ferromagnet. Part I", Phys. Rev. 60, 252-262

Lines M.E., (1974), "Many-Body Theory of Magnetism for Ions With Complicated Level Structure ", Phys. Rev. B 9, 3927-3931

Maris H.J., Kadanoff L. P., (1978), Am. J. Phys. 46(6), 652-657

Onsager L., (1944), "Crystal Statistics. I. A Two Dimensional Model with an Order-Disorder Transition", Phys. Rev. 65, 117-149

Peierls R., (1936), "Ising Model of Magnetism", Proc. Cambridge Philos. Soc. B2, 477-481

Smart J. S., 1966, Effective Field Theories of Magnetism, Philadelpia, W.B. Saunders Co., Streb B., Callen H. B., Horwitz G., (1963), “Cluster Expansion for the Heisenberg Ferromagnet”, Phys. Rev. 130, 1798-1808

Sykes M. F., Gaunt D. S., Roberts P.D., Wyley J.A., (1972), “High Temperatures for the Susceptibility of the Ising Model II. Three Dimensional Lattices”, J. Phys. A bf 5, 640-652

Taggart G.B., (1982), “Correlated Effective Field Approximation for the Dilute Ising Ferromagnet”, Physica 116A, 34-44

Weiss P., (1907), “The Hypothesis of the Molecular Field and the Property of Ferromagnetism”, J. Phys. 6, 661-674

Wilson K.G., (1983), “The Renormalization Group and Critical Phenomena”, Rev. Mod. Phys. 55, 583-600

Wilson K.G., (1971), “Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture”, Phys. Rev. B 4, 3174-3183

Wysin G.M. ve Kaplan J., (2000), “Correlated Molecular-Field Theory for Ising Models”, Phys. Rev. E 61, 6399-6403