



Kontrol Teorisinde Sık Kullanılan Bazı Fonksiyonların Kesirli Dereceden Çeşitli Türevlerinin Farklı Yöntemlere Göre Hata Değerlendirilmesi

Mehmet Korkmaz^{1*}

^{1*} Aksaray Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Aksaray, Türkiye (ORCID: 0000-0003-0843-2767), mkorkmazeem@gmail.com

(1st International Conference on Applied Engineering and Natural Sciences ICAENS 2021, November 1-3, 2021)

(DOI: 10.31590/ejosat.1001249)

ATIF/REFERENCE: Korkmaz, M. (2021). Kontrol Teorisinde Sık Kullanılan Bazı Fonksiyonların Kesirli Dereceden Çeşitli Türevlerinin Farklı Yöntemlere Göre Hata Değerlendirilmesi. *European Journal of Science and Technology*, (28), 381-385.

Öz

Bu çalışma kesirli dereceden türev işlemlerinin farklı kontrol fonksiyonları ve farklı kesirli türev yöntemlerine göre bir analizi üzerinedir. Kontrol fonksiyonları olarak sıklıkla kullanılan birim basamak ve rampa fonksiyonları seçilmiştir. Kesirli dereceden türev hesaplaması için analitik yöntemlerin yanı sıra literatürde sıklıkla kullanılan Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville yöntemleri tercih edilmiştir. Fonksiyonların farklı dereceden türevleri hesaplanarak analitik çözümle karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçların hata değerlendirilmesi yapılmış ve ilgili eğrileri çizdirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Gama fonksiyonu, kontrol teorisi, kesirli dereceden türevli sistemler, kesirli dereceden türev hesabı

Error Evaluation of Some Frequently Used Control Functions in Terms of Different Order Fractional Derivatives According to Several Calculation Methods

Abstract

This study is an analysis of the calculation of fractional order derivatives of some frequently used control functions according to the different calculation methods. A unit step and ramp functions are used as control functions which are often preferred to assess the system outputs. Besides analytical solutions, Grünwald-Letnikov and Riemann-Liouville methods are chosen as calculation procedures of fractional derivatives. Analytical solutions of functions at different orders are compared with different definitions methods for the same orders. Obtained results are analysed in terms of error values and relevant curves are plotted.

Keywords: Gamma function, control theory, fractional order derivative systems, fractional order derivative calculation

* Corresponding Author: mkorkmazeem@gmail.com

1. Giriş

Kesirli dereceden hesaplama neredeyse kalkülüs kadar eski bir geçmişe sahiptir. Leibniz ve L’hopital arasındaki mektuplaşmalar kesirli dereceden türev/integral hesaplamalarının yolunu açmıştır (1695). Kesirli dereceden hesaplamalar sayesinde örneğin bir fonksiyonun 0.5 dereceli integralinden veya 1+j dereceli türevinden bahsetmek mümkün olmaktadır. Diferansiyel denklemlerle ifade edilen sistemler için bu büyük bir esneklik sağlamaktadır. Bu sayede günümüzde ihtiyaç duyulan daha iyi sistem modelleri, daha iyi denetleyici tasarımları mümkün olmaktadır. Bu kapsamda kesirli dereceden türev/integral tanımlamaların yaygınlaşması önemli bir çözüm olarak ortaya çıkmaktadır [Xue, 2014; Al-Dhaifallah ve ark., 2018; Soukkou ve ark., 2016; Saçu ve Korkmaz, 2021].

Machado ve Lopes tarafından bir diyotun modellenmesinde kesirli hesaplama kullanılmıştır. Klasik diyot modelinde görmezden gelinen bazı dinamik parametreleri kesirli yöntemle ifade etmek mümkün olmuştur [Machado ve Lopes, 2019]. Wang ve ark. Lityum-İyon bataryaların modellenmesi ve parametre tanımları için kesirli hesaplama kullanılmıştır [Wang ve ark., 2015]. MPPT tasarımlarının ve kontrolünde de kesirli modellerden yararlanılmıştır. Dhaifallah ve ark. tarafından MPPT konusunda kesirli dereceden denetleyici için optimal parametre tasarımı üzerinde durulmuştur [Al-Dhaifallah ve ark., 2018]. Muñoz-Vázquez ve ark. tarafından kesirli bulanık denetleyiciler robot manipülatörler üzerinde denenmiştir. Sistemin sonuçları SMC tabanlı denetleyicilerin sürekli/süresiz durumları göz önüne alınarak değerlendirilmiştir [Muñoz-Vázquez ve ark., 2019]. Tepljakov ve ark. tarafından kesirli denetleyicilerin endüstriyel uygulamaları hususunda ve Soukkou ve ark. tarafından kesirli denetleyici tasarımı, optimizasyonu ve kararlılık analizi konularında kapsamlı derlemeler sunulmuştur [Tepljakov ve ark., 2021, Soukkou ve ark., 2016].

Bunlarında yanı sıra kesirli dereceden hesaplama yöntemi görüntü işleme [Chen ve ark., 2013; Kumar ve ark., 2017], sinyal işleme [Cruz-Duarte ve ark., 2018; Ma ve ark., 2020] gibi birçok alanda da kullanılmaya başlanmıştır.

2. Materyal ve Metot

2.1. Kesirli Dereceden Türev

Kesirli dereceden türev hesabında literatürde tanımlanmış farklı yaklaşımlar bulunmaktadır. Bunlardan ilki Cauchy integral formudur. Bu form kompleks analizde sıklıkla kullanılmakta ve kapalı bir C alanı içerisinde fonksiyonun analitik çözümünü vermektedir [Xue, 2014; Soukkou ve ark., 2016].

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_C \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{n+1}} d\tau \quad (1)$$

Denklem 1 içerisindeki n tam sayı olmayan bir α değeri ile değiştirildiğinde $t=\tau$ anında bir izole tekillik durumuna sebep vermekte ve kapalı eğrilerde tekilliğin göz ardı edilmesiyle kesirli türevlerin hesaplanmasında kullanılabilir. Bu duruma göre örneğin bir fonksiyonun kesirli dereceden hesaplamaları Denklem 2’deki gibi ifade edilebilmektedir.

$$D_t^\alpha t^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} t^{m-\alpha}, \alpha > -1 \quad (2)$$

Burada m fonksiyonun derecesi, α türev derecesi ve $\Gamma(\cdot)$ gama fonksiyonu olup faktöriyel hesaplarının bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir.

Grünwald-Letnikov (GL) bir diğer sıklıkla kullanılan kesirli dereceden hesaplama yöntemidir. Geçmişteki tüm noktaların değerlerini göz önüne aldığı için hafızalı türev olarak düşünülür. Denklem 3’teki gibi tanımlanır.

$${}_{t_0}D_t^\alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-t_0}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \quad (3)$$

Burada $\lfloor \cdot \rfloor$ kısmı tam sayı olmayan değerler için en yakın tamsayı anlamına gelmektedir. α ’nın farklı değerleri ($\alpha > 0, \alpha = 0, \alpha < 0$) türev, fonksiyonun kendisi veya integral anlamına geldiği için GL operatörü D integro-türev operatörü olarak da adlandırılır.

Riemann-Liouville (RL) ise bir diğer kesirli dereceden türev hesaplama yöntemidir. Denklem 4 RL için kesirli dereceden hesaplama ile ilgilidir.

$${}_{t_0}D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (4)$$

Bu tanımlamaların yanı sıra kesirli dereceden türev hesabında Caputo türevi, Hadamard integrali, Atangana-Baleanu türevi, Erdélyi-Kober operatörü gibi tanımlarda bulunmaktadır. Ayrıca kesirli dereceden türev/integral hesabında parametre ayarına veya fonksiyon türüne bağlı olarak hata, Dawson, beta, hipergeometrik, Mittag-Leffler gibi özel fonksiyonlarda kullanılmaktadır.

2.2. Kesirli Dereceden Türev/İntegral Yazılımları

Kesirli dereceden türev/integral sistem modellemesi ve kontrolünde klasik tam sayılı türev/integral sistemlerine göre önemli bir avantaj sunmaktadır. Örneğin kontrol sistemlerinde sıklıkla kullanılan PID denetleyiciler göz önüne alınırsa sistemin birinci dereceden integral ve türevi alınmaktadır. Bu denetleyici kesirli biçimi olan PID μ denetleyicisi ile değiştirilirse türev ve integral değerlerinin 0 veya 1’den farklı seçilmesi ile geniş bir aralıkta denetleyici tasarımı yapılabilmektedir. Bu türde bir esneklik sistem tasarımında ve kontrolünde önemli bir avantaj sunmaktadır. Ancak hesaplama işlemlerinin zorluklar içermesi kesirli türev/integral işlemlerinin fazla kullanılmaması sonucunu doğurmuştur. Günümüzde ise bilgisayarların sahip olduğu yüksek hesaplama gücü sayesinde kesirli modeller tasarılarda kullanılmaktadır.

Kesirli dereceden türev/integral hesapları yapılırken 2.1 kısmında farklı denklemlere ifade edilen tanımlamalar bir algoritma çerçevesinde bilgisayar yazılımı olarak geliştirilebilir ve bu sayede ilgili hesaplamalar yapılabilir. Bunun yanı sıra kesirli dereceden hesaplamalarla ilgili literatürde tanımlanmış hazır yazılım paketleri de bulunmaktadır. Bunların bazıları aşağıda verilmiştir.

- FOMCON: Aleksei Tepljakov tarafından 2011’de geliştirilmiş ve sürekli olarak yeni eklemeleri barındıran bir yazılım paketidir [Tepljakov, 2011].
- FOTF: Dingyü Xue tarafından bazı Simulink bloklarını düşündüğünde 2004 yılından bu yana geliştirilmektedir [Xue ve Chen, 2015].

• Ninteger: Duarte Valério tarafından 2005'ten bu yana geliştirilmektedir. Sadece tek değişkenli sistemler üzerine uygulanabilmektedir [Valsa, 2011].

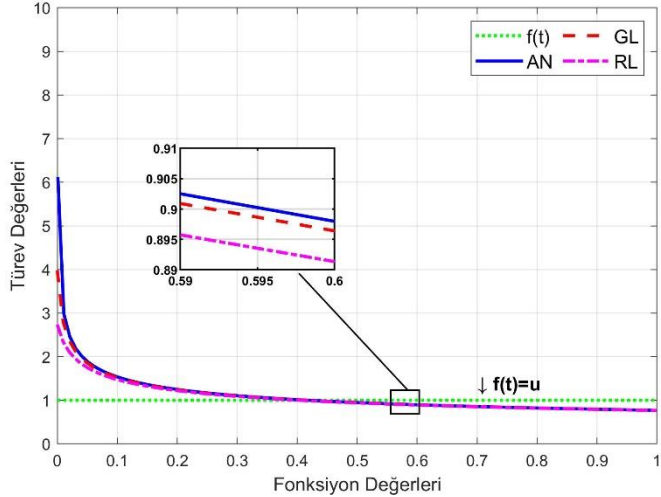
Bunların dışında Crone yazılım paketi ve birçok özel küçük kesirli hesaplama yazılımları bulunmaktadır. Bu çalışma içerisinde Dingyü Xue tarafından geliştirilen FOTF yazılım paketi kullanılmıştır.

3. Araştırma Sonuçları ve Tartışma

Çalışma içerisinde ilk olarak kontrol teorisinde açık/kapalı çevrim sistemlerin cevaplarını elde etmek adına sıklıkla kullanılan Denklem 5'de görülen basamak (step) fonksiyonu kullanılmıştır.

$$u_A(t) = \begin{cases} u, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases} \quad (5)$$

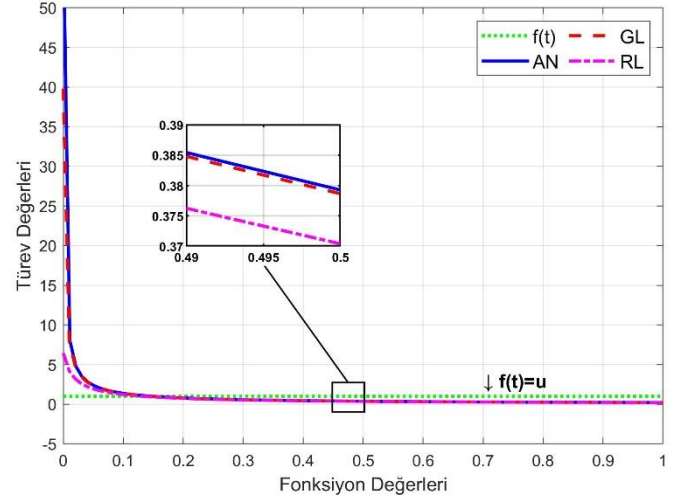
Burada A fonksiyonun tanım aralığı olup u sabit bir değeri ifade etmektedir. Bu çalışma için klasik olarak kullanılan birim basamak fonksiyonu düşünülmüş ve $u=1$, $A=(0,1]$ olarak seçilmiştir. Bu bilgiler ışığında fonksiyonun sırasıyla $\alpha=0.3$ ve $\alpha=0.8$ değerlerindeki türevleri kontrol edilmiştir. Sabit bir sayının 1.dereceden türevi 0'a eşit iken Şekil 1 ve Şekil 2'den de görüleceği üzere kesirli dereceden türev değerleri sıfırdan farklı olmuştur. Bununla birlikte zaman içerisinde türev değerlerinin sıfıra doğru yaklaşan bir eğilim içerisinde olduğu da görülmektedir. Şekil 1 incelendiğinde hem GL hem de RL yöntemlerinin analitik (AN) çözüm ile neredeyse birbirinin aynı sonuçları verdiği görülmüştür. Daha detaylı inceleme adına Şekil 1'de 0.59-0.6 aralığındaki bölüm değerlerin yakından görülmesi için büyütülmüştür. Büyütülen bu kısım incelendiğinde analitik çözüme en yakın sonuçların GL yöntemiyle elde edildiği görülmüştür. Analitik çözüm ve yöntemlerin verdiği sonuçlar arasındaki hata ilişkisi Tablo 1'de gösterilmiştir.



Şekil 1. Step fonksiyonu $\alpha = 0.3$ türevi; $f(t)$ orijinal fonksiyon, AN analitik, GL Grünwald Letnikov, RL Riemann Liouville çözümleri

Türev değerinin 0.8 seçilmesi ile Şekil 2'de görülen eğriler bulunmuştur. Türev derecesinin artırılması daha kısa zamanda sıfıra yaklaşan değerlerin elde edilmesi sonucunu doğurmuştur. Daha detaylı görünüm için 0.49-0.50 aralığı yakınlaştırılmıştır. Her ne kadar çözümler birbirine çok yakın olsa da sonuçlarda küçük farklılıklar görülmüştür. Yöntemlerin analitik çözümlere

göre farklılıklarını gösteren hata değerleri Tablo 2'de gösterilmiştir.

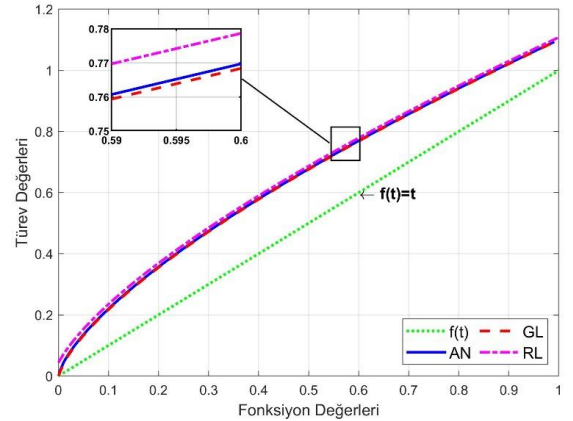


Şekil 2. Step fonksiyonu $\alpha = 0.8$ türevi; $f(t)$ orijinal fonksiyon, AN analitik, GL Grünwald Letnikov, RL Riemann Liouville çözümleri

Step fonksiyonu ile elde edilen sonuçların doğrulanması adına ikinci bir değerlendirme için rampa fonksiyonu ele alınmıştır. (Birim) Rampa fonksiyonu kontrol sistemlerinin giriş/çıkış değerlendirmesinde sıklıkla kullanılır ve Denklem 6'daki gibi ifade edilir.

$$r_A(t) = \begin{cases} t, & t \in A \\ 0, & t \notin A \end{cases} \quad (6)$$

Burada $A = (0,1]$ fonksiyonun tanım aralığı olup t zamanla artan bir değeri, $r(t)$ ise buna karşılık gelen değerleri ifade etmektedir. Şekil 3 ve 4 birim rampa fonksiyonunun sırasıyla $\alpha=0.3$ ve $\alpha=0.8$ değerlerindeki türevlerini göstermektedir. Birim rampa fonksiyonunun birinci dereceden türevi 1 iken şekillerden de görüleceği üzere kesirli türevler farklı sonuçlar üretmektedir. Şekil 3 detaylı incelendiğinde hem türev değerlerinin hem de analitik çözümün birbiriyle neredeyse aynı eğriler üzerinde olduğu görülmektedir. Ancak detaylı aralık incelemesi yapıldığında analitik çözüm ve değerler arasında küçük hatalar bulunmaktadır. Bu hatalara dair sonuçlar Tablo 3'te gösterilmiştir.



Şekil 3. Rampa fonksiyonu $\alpha = 0.3$ türevi; $f(t)$ orijinal fonksiyon, AN analitik, GL Grünwald Letnikov, RL Riemann Liouville çözümleri

Tablo 1. Step fonksiyonu $\alpha = 0.3$ için farklı yöntemlere göre elde edilen türevlerin analitik çözüme göre hata karşılaştırılması

Adım aralığı	Metot	Hata değerleri				
		k=0.2	k=0.4	k=0.6	k=0.8	k=1
0.01	GL	0.0065	0.0027	0.0016	0.0011	0.0008
	RL	0.0268	0.0111	0.0066	0.0046	0.0034
0.001	GL ($\times 10^{-3}$)	0.6551	0.2661	0.1571	0.1081	0.0809
	RL ($\times 10^{-3}$)	2.7951	1.1380	0.6723	0.4628	0.3463

Tablo 2. Step fonksiyonu $\alpha = 0.8$ için farklı yöntemlere göre elde edilen türevlerin analitik çözüme göre hata karşılaştırılması

Adım aralığı	Metot	Hata değerleri				
		k=0.2	k=0.4	k=0.6	k=0.8	k=1
0.01	GL	0.0032	0.0009	0.0004	0.0003	0.0002
	RL	0.0443	0.0131	0.0064	0.0038	0.0026
0.001	GL ($\times 10^{-3}$)	0.3158	0.0907	0.0437	0.0260	0.0174
	RL ($\times 10^{-3}$)	4.7033	1.3554	0.6540	0.3899	0.2610

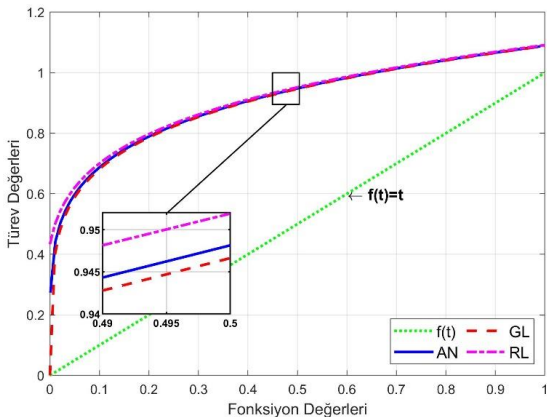
Tablo 3. Rampa fonksiyonu $\alpha = 0.3$ için farklı yöntemlere göre elde edilen türevlerin analitik çözüme göre hata karşılaştırılması

Adım aralığı	Metot	Hata değerleri				
		k=0.2	k=0.4	k=0.6	k=0.8	k=1
0.01	GL	0.0019	0.0015	0.0013	0.0012	0.0012
	RL	-0.0124	-0.0101	-0.0090	-0.0082	-0.0077
0.001	GL ($\times 10^{-3}$)	0.1872	0.1521	0.1347	0.1235	0.1155
	RL ($\times 10^{-3}$)	-1.2476	-1.0137	-0.8977	-0.8236	-0.7703

Tablo 4. Rampa fonksiyonu $\alpha = 0.8$ için farklı yöntemlere göre elde edilen türevlerin analitik çözüme göre hata karşılaştırılması

Adım aralığı	Metot	Hata değerleri				
		k=0.2	k=0.4	k=0.6	k=0.8	k=1
0.01	GL	0.0032	0.0018	0.0013	0.0010	0.0009
	RL	-0.0077	-0.0045	-0.0033	-0.0026	-0.0022
0.001	GL ($\times 10^{-3}$)	0.3158	0.1814	0.1311	0.1042	0.0871
	RL ($\times 10^{-3}$)	-0.7878	-0.4529	-0.3276	-0.2603	-0.2177

Benzer bir inceleme türevin 0.8 seçilmesi ile elde edilmiş ve sonuçlar Şekil 4'te detaylıca gösterilmiştir. Şekil 4'ten de görüleceği üzere analitik çözümler ve yöntemler birbirine göre neredeyse aynı sonuçları üretmektedir. Analitik çözüm ve yöntemler arasındaki fark Tablo 4'te gösterilmiştir.



Şekil 4. Rampa fonksiyonu $\alpha = 0.8$ türevi; $f(t)$ orijinal fonksiyon, AN analitik, GL Grünwald Letnikov, RL Riemann Liouville çözümleri

4. Sonuç

Bu çalışma kontrol teorisinde sistemlerin giriş/çıkış tepkilerinin incelenmesi konusunda sıklıkla kullanılan birim basamak ve birim rampa fonksiyonlarının kesirli dereceden türevlerinin bulunması ve bulunan bu çözümlerin analitik yöntemlere göre hatalarının incelenmesi ve değerlendirilmesi üzerinedir. Bu kapsamda ilgili fonksiyonlar oluşturularak iki farklı (0.3 ve 0.8) türev mertebesi için sonuçlar elde edilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde FOTF yazılımının sunduğu GL ve RL fonksiyonlarının analitik çözümlere çok yakın değerler ürettiği gözlemlenmiştir. Her iki yöntem de kabul edilebilir aralıkta hata ile çalışmaktadır. Özellikle GL yönteminde analitik çözüme çok yakın değerler üretilebilmektedir. Her iki yöntem için de adım aralığının artırılması hatanın düşmesine sebep olmaktadır. Adım aralıkları 0.01 ve 0.001 için algoritmaların çalışma süreleri arasında dikkate çarpan bir fark gözlemlenmemiştir. Ancak adım aralığının daha da küçük seçildiği durumlar incelendiğinde algoritma çalışma hızı yavaşlamış ancak hata değerleri de düşmüştür. Bu durum sistem tasarımı/kontrolünde bu araçlar kullanılırken göz alınması gereken bir husustur.

Kaynakça

- Al-Dhaifallah, M., Nassef, A. M., Rezk, H., & Nisar, K. S. (2018). Optimal parameter design of fractional order control based INC-MPPT for PV system. *Solar Energy*, 159, 650-664.
- Chen, D., Sun, S., Zhang, C., Chen, Y., & Xue, D. (2013). Fractional-order TV-L 2 model for image denoising. *Central European Journal of Physics*, 11(10), 1414-1422.
- Cruz-Duarte, J. M., Rosales-Garcia, J., Correa-Cely, C. R., Garcia-Perez, A., & Avina-Cervantes, J. G. (2018). A closed form expression for the Gaussian-based Caputo-Fabrizio fractional derivative for signal processing applications. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 61, 138-148.
- Kumar, S., Saxena, R., & Singh, K. (2017). Fractional Fourier transform and fractional-order calculus-based image edge detection. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 36(4), 1493-1513.
- Ma, C. Y., Shiri, B., Wu, G. C., & Baleanu, D. (2020). New fractional signal smoothing equations with short memory and variable order. *Optik*, 218, 164507.
- Machado, J. T., & Lopes, A. M. (2019). Fractional-order modeling of a diode. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 70, 343-353.
- Muñoz-Vázquez, A. J., Gaxiola, F., Martínez-Reyes, F., & Manzo-Martínez, A. (2019). A fuzzy fractional-order control of robotic manipulators with PID error manifolds. *Applied soft computing*, 83, 105646.
- Saçu, İ. E., & Korkmaz, N. (2021). Fraksiyonel Dereceli Kaotik Lorenz Sistemi'nin Devre Sentezi. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, (24), 42-46.
- Soukkou, A., Belhour, M. C., & Leulmi, S. (2016). Review, design, optimization and stability analysis of fractional-order PID controller. *International Journal of Intelligent Systems and Applications*, 8(7), 73.
- Tepljakov, A. (2011). Fractional-order calculus based identification and control of linear dynamic systems. *Tallinn University of Technology*.
- Tepljakov, A., Alagoz, B. B., Yeroglu, C., Gonzalez, E. A., Hosseinnia, S. H., Petlenkov, E., ... & Cech, M. (2021). Towards Industrialization of FOPID Controllers: A Survey on Milestones of Fractional-Order Control and Pathways for Future Developments. *IEEE Access*, 9, 21016-21042.
- Valsa, J. (2011). Numerical inversion of Laplace transforms in MATLAB. *MATLAB Central File ID*, 32824.
- Wang, B., Li, S. E., Peng, H., & Liu, Z. (2015). Fractional-order modeling and parameter identification for lithium-ion batteries. *Journal of Power Sources*, 293, 151-161.
- Xue, D., & Chen, Y. (2015). *Modeling, analysis and design of control systems in MATLAB and Simulink*. World Scientific Publishing.
- Xue, D. (2017). *Fractional-order control systems*. de Gruyter.