



Ölçülen Yapraklanmaların Genelleştirilmiş Dynnikov Koordinat Sistemi

Alev Meral Dülger

Dicle Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Diyarbakır, Türkiye

ve

Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Ankara, Türkiye, (ORCID: 0000-0002-9838-7906), alev.meral@dicle.edu.tr

(1st International Conference on Applied Engineering and Natural Sciences ICAENS 2021, November 1-3, 2021)

(DOI: 10.31590/ejosat.)

ATIF/REFERENCE: Meral Dülger, A. (2021). Ölçülen Yapraklanmaların Genelleştirilmiş Dynnikov Koordinat Sistemi. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, (28), 437-440.

Öz

Bu çalışmada, n ($n \geq 2$) adet işaretlenmiş nokta ve 1 adet sınır bileşenine sahip olan, 1 cinsli yönlendirilebilir S_n yüzeyindeki integral laminasyonlar için elde edilen genelleştirilmiş Dynnikov koordinatları, aynı yüzeyde tanımlı ölçülen yapraklanmalara genişletilmiştir. Daha açık olarak, S_n yüzeyinde tanımlı ölçülen yapraklanmaların uzayı ve $V_n = \{(a; b; T; c): c \leq 0 \text{ ve } T \neq 0\} \cup \{0\}$ olmak üzere $\mathbb{R}^{2n+2} \setminus V_n$ arasında bir homeomorfizm tanımlayan *genelleştirilmiş Dynnikov koordinat sistemi* tanıtılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Ölçülen yapraklanma, İntegral laminasyon, Genelleştirilmiş Dynnikov koordinatları, Geometrik kesişim sayısı, İşaretlenmiş noktalı torus.

Generalized Dynnikov Coordinate System of Measured Foliations

Abstract

In this paper, the generalized Dynnikov coordinates obtained for the integral laminations on an orientable surface S_n of genus 1 with n ($n \geq 2$) punctures and 1 boundary component are extended to the measured foliations defined on the same surface. More specifically, *the generalized Dynnikov coordinate system*, which defines a homeomorphism between the space of measured foliations defined on S_n and $\mathbb{R}^{2n+2} \setminus V_n$, where $V_n = \{(a; b; T; c): c \leq 0 \text{ ve } T \neq 0\} \cup \{0\}$, is introduced.

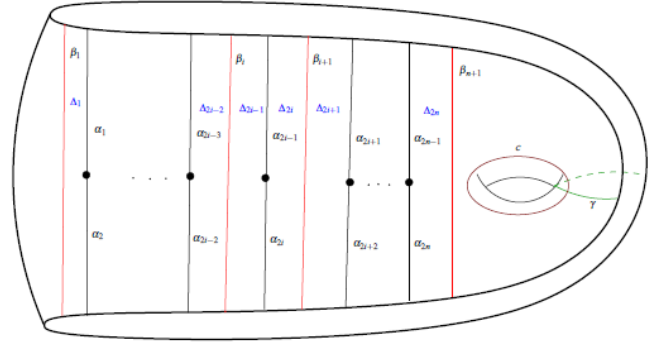
Keywords: Measured foliation, Integral lamination, Generalized Dynnikov coordinates, Geometric intersection number, Punctured torus.

1. Giriş

Bu çalışmanın amacı, n ($n \geq 2$) adet işaretlenmiş nokta ve 1 adet sınır bileşenine sahip olan, 1 cinsli yönlendirilebilir S_n yüzeyindeki integral laminasyonlar (bir integral laminasyon, sonlu sayıda esas basit kapalı eğrinin izotopi sınıflarının ayrık bir birleşimidir) için elde edilen genelleştirilmiş Dynnikov koordinatlarını, yine aynı yüzeydeki ölçülen yapraklanmalar için genişletmektedir. Yüzeyin sonlu adet işaretlenmiş noktalı D_n ($n \geq 3$) diski olması durumunda, integral laminasyonları koordinatlandırmanın etkili bir yolu Dynnikov koordinat sistemini kullanmaktır (Dynnikov, 2002). 2002 yılında Dynnikov tarafından tanımlanan Dynnikov koordinatları ve n -örgü grubunun Dynnikov koordinatları cinsinden etkisini veren kurallar bir çok dinamiksel ve kombinatorik problemin çözümünde kullanılmıştır. Dynnikov koordinatları, (Dehornoy, 2008) ve (Dehornoy ve ark., 2002)'de n -örgü grubunda kelime probleminin çözümünde çalışılmıştır. Daha sonra Moussafir örgülerin topolojik entropilerini yaklaşık olarak hesaplayan bir metot tanıtmıştır (Moussafir, 2006). Yurttaş, Moussafir'in tekniğinden esinlenerek Dynnikov koordinatları yardımıyla pseudo-Anosov örgü ailelerinin topolojik entropisini hesaplayan bir metot geliştirmiştir (Yurttaş, 2011). Meral, sonlu sayıda işaretlenmiş noktalı disk yüzeyindeki integral laminasyonlar için tanımlı Dynnikov koordinat sistemini, 1 adet sınır bileşeni ve n ($n \geq 2$) adet işaretlenmiş noktası olan 1 cinsli S_n yüzeyine genelleştirmiştir (Meral, 2021). Bu çalışmada, genelleştirilmiş Dynnikov koordinat sisteminin sebep olduğu, S_n 'deki integral laminasyonların kümesi ile $V_n = \{(a; b; T; c) : c \leq 0 \text{ ve } T \neq 0\} \cup \{0\}$ olmak üzere $\mathbb{Z}^{2n+2} \setminus V_n$ arasındaki birebir ve örten dönüşüm, S_n 'deki ölçülen yapraklanmaların uzayı ile $\mathbb{R}^{2n+2} \setminus V_n$ arasındaki homeomorfizmaya genişletilecektir. Bunun için, S_n yüzeyine gömülü $3n + 2$ adet yay ve 1 adet kapalı eğriden oluşan bir sistem kullanılmıştır. Verilen bir F ölçülen yapraklanması, bu sistemdeki yaylar ve eğri üzerine tayin edilen ölçüler kullanılarak $\mathbb{R}_{\geq 0}^{3n+3} \setminus \{0\}$ kümesinin bir elemanı tarafından tanımlanmıştır. S_n 'de tanımlı ölçülen yapraklanmaların kümesi $MF(S_n)$ olsun. Genelleştirilmiş Dynnikov koordinatları, yukarıda bahsedilen ölçülerin bir lineer birleşimidir. Genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonu, $MF(S_n)$ uzayı ile $\mathbb{R}^{2n+2} \setminus V_n$ arasında bir homeomorfizma vermektedir.

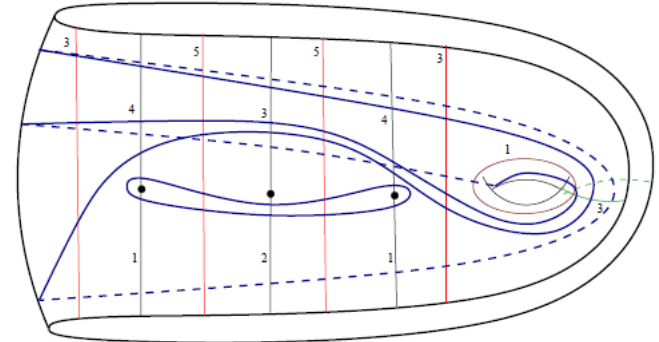
1. Materyal ve Yöntem

Bu bölümde, S_n 'deki genelleştirilmiş Dynnikov koordinatlarını tanımlayacağız. Bunun için, Şekil 1'de gösterilen modeli kullanacağız. Burada α_i ($1 \leq i \leq 2n$) ve β_i ($1 \leq i \leq n + 1$) yayları, işaretlenmiş noktalı disk durumuna benzerdir. Böylece, bu yayların uç noktaları yüzeyin sınırında ve/veya işaretlenmiş noktaların üzerindedir. c , cinsi bir defa saran kapalı eğri ve γ , her iki uç noktası yüzeyin sınırında olan yaydır.



Şekil 1. $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ yayları ve c eğrisi (Meral, 2021)

S_n 'deki integral laminasyonların kümesi (bir integral laminasyon, uygun izotopi altında ayrık esas basit kapalı eğrilerin sonlu bir birleşimidir; örneğin, Şekil 2'ye bakabilirsiniz) L_n ve $L \in L_n$ olsun. Çalışma boyunca L 'nin ve F 'nin minimal birer temsilcileriyle çalışılmaktadır ve bu temsilciler sırasıyla l ve f (koordinat eğrilerini minimal bir şekilde kesen (ölçülen yapraklanma için, minimal bir şekilde ölçen) aynı izotopi sınıfındaki bir integral laminasyondur (bir ölçülen yapraklanmadır, sırasıyla)) ile gösterilmektedir. $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}; \beta_1, \dots, \beta_{n+1}; \gamma; c) \in \{\mathbb{Z}_{\geq 0}^{3n+3}\} \setminus \{0\}$ vektörü, L 'nin karşılık gelen yaylar ve c basit kapalı eğrisiyle olan kesişim sayılarını gösterebilir. Örneğin $(4, 1, 3, 2, 4, 1; 3, 5, 5, 3; 3; 1)$, Şekil 2'de resmedilen l integral laminasyonunun kesişim sayılarıdır.



Şekil 2. İntegral laminasyon l 'nin koordinat eğrileriyle kesişim sayıları (Meral, 2021)

Tanım 1. $V_n = \{(a; b; T; c) : c \leq 0 \text{ ve } T \neq 0\} \cup \{0\}$ olsun. Genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonu $\theta: L_n \rightarrow \mathbb{Z}^{2n+2} \setminus V_n$ her $1 \leq i \leq n$ için

$$a_i = \frac{\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1} - c^+}{2}, \quad b_i = \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{2}$$

ve

$$|T| = \begin{cases} 0, & \text{eğer } c^+ = 0, \\ \gamma - \frac{\beta_{n+1} - c^+}{2} - \frac{\beta_1 - c^+}{2}, & \text{eğer } c^+ \neq 0, \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\theta(L) = (a; b; T; c) = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; T; c)$$

şeklinde tanımlanır. Kesen bileşenler pozitif yönde burğu yaptığında $\text{sgn}(T) = +1$, negatif yönde burğu yaptığında $\text{sgn}(T) = -1$ 'dir (sgn , işaret (signum) fonksiyonudur).

Aşağıdaki teorem genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonunun tersini vermektedir. İspatını (Meral, 2021)'de bulabilirsiniz.

Teorem 1. $(a; b; T; c) \in \mathbb{Z}^{2n+2} \setminus V_n$ olsun. O zaman $(a; b; T; c)$ vektörü, geometrik kesişim sayıları aşağıda verilen bir ve yalnız bir $L \in L_n$ integral laminasyonuna karşılık gelir.

$$\kappa = \max_{1 \leq k \leq n} \left[2 \max(b_k, 0) + |2a_k + c^+| - 2 \sum_{j=k}^n b_j \right]$$

olmak üzere

$$\beta_i = 2 \sum_{j=i}^n b_j + \max \left(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa \right),$$

$$\beta_{n+1} = \max \left(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa \right) \quad (1.1),$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{2(-1)^i a_{[i/2]} + (-1)^i c^+ + \beta_{[i/2]}}{2}, & \text{eğer } b_{[i/2]} \geq 0, \\ \frac{2(-1)^i a_{[i/2]} + (-1)^i c^+ + \beta_{(1+[i/2])}}{2}, & \text{eğer } b_{[i/2]} \leq 0, \end{cases} \quad (1.2),$$

ve

$$\gamma = \begin{cases} |T| + \sum_{j=1}^n b_j + \max \left(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa \right) - c^+, & \text{eğer } c > 0, \\ |c| + \sum_{j=1}^n b_j + \max \left(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa \right) - c^+, & \text{eğer } c \leq 0. \end{cases}$$

(1.3)

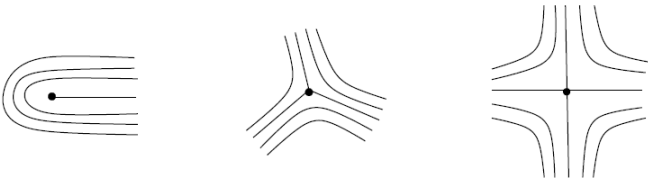
Burada $[x]$, x 'den küçük olmayan en küçük tam sayıdır. Kesen bileşenler pozitif yönde burğu yaptığında $\text{sgn}(T) = +1$, negatif yönde burğu yaptığında $\text{sgn}(T) = -1$ 'dir (sgn , işaret (signum) fonksiyonudur).

2.1. Ölçülen Yapraklanmalar

Bu bölümde ölçülen yapraklanma konusu için gerekli olan genel bilgiler verilecektir.

Tanım 2. S_n 'de bir F tekil yapraklanması, S_n 'nin yaprak adı verilen birbirinden ayrık yol bağlantılı alt kümelerine bir parçalanışıdır ve aşağıdaki koşulları sağlar:

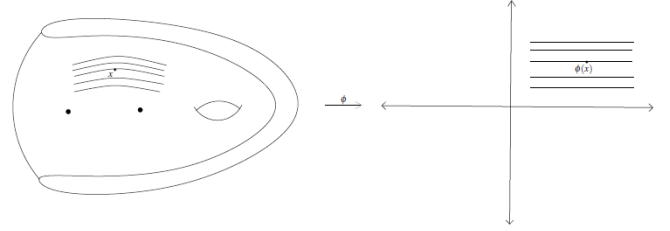
i. Başlangıcı tekil nokta olan yaprak parçalarına *çatal* denir. Tekil noktalar, $p \geq 1$ çatal sayılarına göre sınıflandırılır. S_n^o 'deki bir p -çatalı tekil nokta civarındaki harita lokal olarak Şekil 3'teki gibidir. 1-çatalı tekil noktalar sadece S_n 'nin işaretlenmiş noktalarında olabilir.



Şekil 3. S_n^o 'deki yapraklanmaların 1-çatalı, 3-çatalı, 4-çatalı tekil noktaları

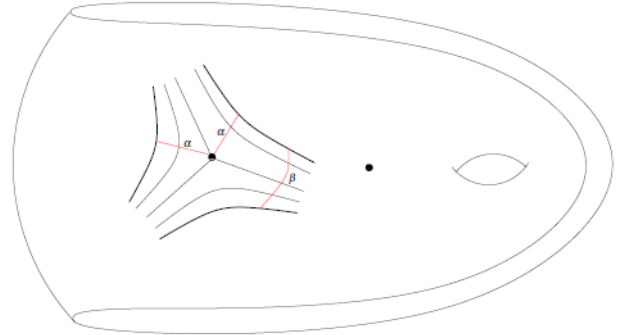
ii. Sonlu bir J tekil nokta kümesi dışındaki her $x \in S_n \setminus \partial S_n$ noktası Şekil 4'de gösterildiği gibi, $U \cap$ yaprak bileşenlerini

yatay doğrulara taşıyan bir $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ haritası tarafından kapsanır.



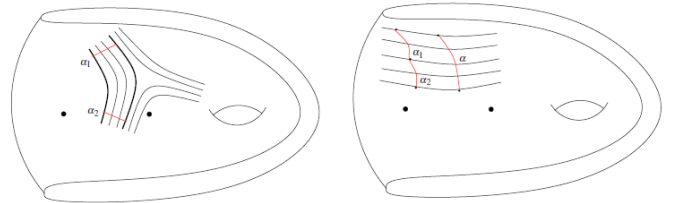
Şekil 4. $x \in S_n \setminus \partial S_n$ yakınındaki yapraklar

Tanım 3. S_n 'de bir α yayı, Şekil 5'de gösterildiği gibi F tekil yapraklanmasının tüm yapraklarını çapraz bir şekilde kesin ve bir $s \in J$ tekil noktasına girdiği bölge çıktığı bölgeden farklı olsun. Bu durumda α yayı F 'ye *çaprazdır* denir.



Şekil 5. Çapraz yaylar

Tanım 4. Bir F yapraklanması verildiğinde, F üzerindeki bir *çapraz ölçüm* μ , her çapraz α yayına bir $\mu(\alpha) \in \mathbb{R}^+$ pozitif sayısı atayan ve Şekil 6'da resmedilen aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur:



Şekil 6. $\mu(\alpha_1) = \mu(\alpha_2)$ ve $\mu(\alpha_1) + \mu(\alpha_2) = \mu(\alpha)$

i. α_1 ve α_2 çapraz yayları, uç noktaları aynı yapraklar üzerinde olan diğer çapraz yaylar aracılığı ile birbirine izotop ise $\mu(\alpha_1) = \mu(\alpha_2)$ 'dir.

ii. $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \partial \alpha_1 \cap \partial \alpha_2$ olacak şekilde $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$ ise $\mu(\alpha) = \mu(\alpha_1) + \mu(\alpha_2)$ 'dir.

Tanım 5. S_n 'de bir (F, μ) ölçülen yapraklanması, bir μ çapraz ölçümü ile donatılmış tekil yapraklanmadır.

Tanım 6. (F, μ) , S_n 'de bir ölçülen yapraklanma ve α , S_n 'de bir yay olsun. Yapraklanma üzerinde tanımlı μ ölçümünü kullanarak $\mu(\alpha)$ ölçüsü, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ α 'nın yapraklanmaya çapraz birbirinden ayrık alt yayları olmak üzere

$$\mu(\alpha) = \sup \sum_{i=1}^k \mu(\alpha_i)$$

olarak tanımlanır. $[\alpha]$, uç noktalara göre alınan izotopiler altında α 'nın izotopi sınıfını belirtsin. β yayları α 'a izotop ve (F, μ) 'e çapraz olmak üzere

$$\mu[\alpha] = \inf_{\beta \in [\alpha]} \mu(\beta)$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde, C elemanter kapalı esas eğrisi ve onun izotopi sınıfı $[C]$ için $\mu(C)$ ve $i(F, [C])$ tanımlanabilir.

3. Bulgular

İntegral laminasyonlar için elde edilen genelleştirilmiş Dynnikov koordinatları doğal bir şekilde ölçülen yapraklara genişletilebilir. Bu bölümde, integral laminasyonlar için elde edilen genelleştirilmiş Dynnikov koordinat sistemi ölçülen yapraklanmalara genişletilecektir.

Ölçülen yapraklanma için genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Tanım 7. $V_n = \{(a; b; T; c) : c \leq 0 \text{ ve } T \neq \emptyset\} \cup \{0\}$ olsun. $\vartheta: MF(S_n) \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2} \setminus V_n$ genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonu, her $1 \leq i \leq n$ için

$$a_i = \frac{\mu([\alpha_{2i}]) - \mu([\alpha_{2i-1}]) - \mu([c^+])}{2},$$

$$b_i = \frac{\mu([\beta_i]) - \mu([\beta_{i+1}])}{2}$$

ve

$$|T| = \begin{cases} 0, & \text{eğer } \mu([c^+]) = 0, \\ \mu([\gamma]) - \frac{\mu([\beta_{n+1}]) - \mu([c^+])}{2} - \frac{\mu([\beta_1]) - \mu([c^+])}{2}, & \text{eğer } \mu([c^+]) \neq 0, \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\vartheta(F) = (a; b; T; c) = (a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; T; c)$$

olarak tanımlanır. Kesen bileşenler pozitif yönde burğu yaptığında $\text{sgn}(T) = +1$, negatif yönde burğu yaptığında $\text{sgn}(T) = -1$ 'dir (sgn , işaret (signum) fonksiyonudur).

Aşağıdaki teorem, ölçülen yapraklanma için genelleştirilmiş Dynnikov koordinat fonksiyonunun tersini vermektedir. İspatı, Teorem 1'in ispatı ile aynıdır.

Teorem 2. $(a; b; T; c) \in \mathbb{R}^{2n+2} \setminus V_n$ olsun. O zaman $(a; b; T; c)$ vektörü,

$$\kappa = \max_{1 \leq k \leq n} \left[2 \max(b_k, 0) + |2a_k + c^+| - 2 \sum_{j=k}^n b_j \right]$$

olmak üzere

$$\mu([\beta_i]) = 2 \sum_{j=i}^n b_j + \max \left(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa \right),$$

$$\mu([\beta_{n+1}]) = \max \left(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa \right)$$

$$\mu([\alpha_i]) = \begin{cases} \frac{2(-1)^i a_{[i/2]} + (-1)^i c^+ + \mu([\beta_{[i/2]}])}{2}, & \text{eğer } b_{[i/2]} \geq 0, \\ \frac{2(-1)^i a_{[i/2]} + (-1)^i c^+ + \mu([\beta_{(1+[i/2])}])}{2}, & \text{eğer } b_{[i/2]} \leq 0, \end{cases}$$

ve

$$\mu([\gamma]) = \begin{cases} |T| + \sum_{j=1}^n b_j + \max \left(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa \right) - c^+, & \text{eğer } c > 0, \\ |c| + \sum_{j=1}^n b_j + \max \left(c^+, c^+ - 2 \sum_{i=1}^n b_i, \kappa \right) - c^+, & \text{eğer } c \leq 0. \end{cases}$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir $(F, \mu) \in MF(S_n)$ ölçülen yapraklanmasına karşılık gelir. Burada $[x]$, x 'den küçük olmayan en küçük tam sayıdır. Kesen bileşenler pozitif yönde burğu yaptığında $\text{sgn}(T) = +1$, negatif yönde burğu yaptığında $\text{sgn}(T) = -1$ 'dir.

4. Sonuç

Bu çalışmada, daha önce sadece sonlu bir şekilde işaretlenmiş noktalı disk üzerindeki ölçülen yapraklanmaları tek türlü olarak tanımlayan Dynnikov koordinat sistemi S_n yüzeyine genelleştirilmiştir. S_n yüzeyindeki ölçülen yapraklanmaları tek türlü koordinatlayan genelleştirilmiş Dynnikov koordinat sistemi ile birçok yeni problem çözülmesi planlanmaktadır. Örneğin, genelleştirilmiş Dynnikov koordinat sisteminin $g > 1$ cinsli yüzeylere genelleştirilmesi bunlardan biridir.

NOT: Yazar, bu çalışmadaki sonuçların yazarın doktora tezinden bir parça olduğunu belirtmek istemektedir.

Kaynakça

- Dynnikov, I. (2002). On a Yang-Baxter mapping and the Dehornoy ordering. *Uspekhi Mat. Nauk*, 57(3(345)), 151-152.
- Dehornoy, P. (2008). Efficient solutions to the braid isotopy problem. *Discrete Appl. Math.*, 156(16), 3091-3112.
- Dehornoy, P., Dynnikov, I., Rolfsen, D., Wiest, B. (2002). Why are braids orderable?. *Panoramas et Syntheses [Panoramas and Syntheses]*. Societe Mathematique de France, Paris, 14.
- Moussafir, J. (2006). On computing the entropy of braids. *Funct. Anal. Other Math.*, 1, 37-46.
- Yurttaş, S. Ö. (2011). Dynnikov coordinates and pseudo-Anosov braids. *Doktora tezi*, Liverpool Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Liverpool, 168.
- Meral, A. (2021). Dynnikov coordinates on punctured torus. *Turkish Journal of Mathematics*, 45(2), 661-677.