

# İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kesirlerde Toplama İşlemine Yönelik Kurulan Problemlerdeki Hataları Belirleyebilme Becerileri<sup>1</sup>

Cemalettin Işık<sup>2</sup>

Tuğrul Kar<sup>3</sup>

Ahmet Işık<sup>4</sup>

Gürsel Güler<sup>5</sup>

## Özet

Bu çalışmada, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının yedinci sınıf öğrencilerinin tamsayı kesir ile basit kesrin toplamına yönelik kurdukları problemlerdeki hataları belirleyebilme becerileri araştırılmıştır. Çalışma yedinci sınıfta okuyan 210 öğrenci ve 61 matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Adaylardan, yedinci sınıf öğrencilerinin kurdukları dört hatalı problem cümlesini değerlendirmeleri istenmiştir. Adayların yanıtları içerik analizine tabi tutularak, her bir problem cümlesinde yer alan hata, türlerine göre sınıflandırılmıştır. Araştırma sonuçları adayların, birim kargaşası ve parça-bütün ilişkisini kuramama hatalarını belirlemede daha fazla güçlük yaşadıklarını ve hatalara yönelik açıklamalarında farklı hatalar sergilediklerini ortaya koymuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Öğretmen adayları, problem kurma, kesirlerde toplama

## Abstract

This study was carried out with 210 seventh-grade students and 61 pre-service elementary mathematics teachers. The aim of this study is to scrutinize the skills of pre-service elementary mathematics teachers to determine errors in problems posed by seventh grade students relating to the addition of fractions. The data were collected through two steps. Firstly, the students were asked to pose problems for the operation  $2\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = ?$ . Secondly, the Error Identification Test (EIT) including four problems posed by the students was applied to the pre-service teachers. It has been determined that pre-service teachers experienced more difficulties in identifying errors related to units confusion and failing in establishing part-whole relation compared to the other types of errors.

**Key Words:** Pre-service teachers, problem posing, fraction sum

<sup>1</sup> Bu çalışmanın bir kısmı X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde bildiri olarak sunulmuştur.

<sup>2</sup>Yrd. Doç. Dr., Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, cisik@atauni.edu.tr

<sup>3</sup>Arş. Gör., Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, tuğrulkar@atauni.edu.tr

<sup>4</sup>Prof. Dr., Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, isik@atauni.edu.tr

<sup>5</sup>Arş. Gör., Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, gguler@atauni.edu.tr

## 1. Giriş

Öğretmen yeterliliklerinin incelendiği çalışmaların temelinde Shulman'ın (1986, 1987) yapmış olduğu araştırmalar yer almaktadır. Shulman (1987) bir konunun, problemin veya durumun nasıl organize edilebileceğinin ve öğrenenlerin farklı beceri ve ilgilerinin bu konu, problem ya da durumlara nasıl adapte edilebileceğinin anlaşılmasında, alan ve pedagoji bilgisini bir araya getiren pedagojik alan bilgisine özel önem verilmesi gerektiğini belirtmiştir. Shulman (1986), pedagojik alan bilgisinin; konu ve kavramların işlevsel gösterimlerinin, öğrenmeyi kolaylaştıran ya da zorlaştıran unsurların, kavram yanlışlarının, kavramlara yönelik farklı temsillerin ve öğrencilerin kavramlara yönelik ön bilgilerinin bilinmesini içerdiğini belirtmiştir. Bu düşünceden hareketle pedagojik alan bilgisinin, kavramlara yönelik sahip olunan bilgidен daha fazlasını gerektirdiği söylenebilir.

Son yıllarda matematik eğitimine yönelik araştırmalar öğretmenin sahip olması gereken bilginin niteliği üzerine yönelmiştir (Newton, 2008). Hill, Rowan, ve Ball (2005) öğretmenlerin sahip olması gereken matematiksel bilginin, öğrencilere açıklama yapma ve öğrenci yanıtlarını analiz edebilmelerine imkan tanınması gerektiğini belirtmiştir. Buna karşın öğretmen veya öğretmen adaylarının kesir işlemlerine yönelik pedagojik alan bilgilerini araştıran çalışmalar (Chick & Baker, 2005; Işık, 2011; Newton, 2008; Özmantar ve Bingölbali, 2009; Toluk-Uçar, 2011; Ward & Thomas, 2007) öğrenci hatalarını belirlemede, nedenlerini açıklamada ve hataları gidermeye yönelik öğretim planlamada birçok güçlük yaşandığını göstermektedir. Chick ve Baker (2005), öğrenci hatalarına yönelik ilköğretim öğretmenlerinin nasıl düşüncüklerini araştıran çalışmalarında, öğretmenlere pay ve paydanın ayrı ayrı toplandığı  $\frac{7}{10} + \frac{2}{5} = \frac{7}{10} + \frac{4}{10} = \frac{11}{20}$  şeklindeki işlemi sunarak, öğrencinin nasıl düşüncüküne yönelik açıklamalar yapmalarını istemişlerdir. Öğretmenlerin çoğunluğunun bu durumun nedenlerini açıklayamadıklarını, sadece işlemsel süreci ve işlemin içerdiği kavramı yeniden tanımladıklarını tespit etmişlerdir. Toluk-Uçar (2011) ilköğretim matematik ve sınıf öğretmeni adaylarının matematik bilgileri ve oluşturdukları öğretimsel açıklamaları değerlendiren çalışmasında adayların  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$  işlemini nasıl açıkladıklarını da analiz etmiştir. Araştırmacı, öğretmen adaylarının çoğunlukla işlemsel anlamaya yönelik açıklamalar yaptıklarını, buna karşın açıklamalarını gerekçelendiremediklerini tespit etmiştir. Newton (2008) öğretmen adaylarının, kesirlerin aynı birimin parçaları şeklinde ifade edilmediği sürece toplanamayacağını anlaşılmasını gerektiren etkinlikteki soruları cevaplamalarını istemiştir. Araştırmacı, öğretmen adaylarının farklı bütünlük üzerinden ifade edilen kesir sayılarının toplanmasının çözüm için uygun bir yaklaşım olmadığını belirlemede güçlükler yaşadıklarını tespit etmiştir.

Ward ve Thomas (2007), ilköğretim matematik öğretmenlerine kesirlerde toplama işlemine yönelik öğrencilerin hatalı yanıtlarını içeren etkinlik sunmuşlardır. Öğretmenlere, bir öğrencinin  $\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$  işlemine  $\frac{5}{8}$  yanıtını verdiği ve bu yanıt için *oyunun ilk yarısında beş atışın üçünü gole çevirdim, ikinci yarı da ise üç atışın ikisini gole çevirdim. Toplamda sekizde beşini gole çevirdim* şeklindeki açıklaması sunularak yapılan işlem ve açıklamayı

değerlendirmelerini istemişlerdir. Öğretmenlerin %66'sının, öğrencinin açıklamasının yanlış olduğunu fark etmelerine rağmen sadece %9'u doğru çözüm için gerekli olan anahtar kavramları açıklayabilmiştir. Buna karşın kavramsal açıklama yapamayan öğretmenler, sorunun ortak paydaya alamamadan kaynaklandığını belirtmişlerdir. Ortak payda kullanılması durumunda işlem  $\frac{9}{15} + \frac{10}{15} = \frac{19}{15}$  şeklinde olacak, ancak  $\frac{19}{15}$  sonucu oyundan elde edilen skorlar ile uyumlu olmayacaktır. Bunun yanında araştırmacılar, kesirlerde toplama işlemine yönelik kavramsal açıklama yapmada öğretmenlerin başarısının düşük olduğunu da ifade etmişlerdir. Özmantar ve Bingölbali (2009), sınıf öğretmenlerine  $\frac{7+5}{14+20} = ?$  işlemine yönelik üç farklı çözüm sunmuşlar ve öğretmenlerden, çözümlerin/işlemlerin doğruluklarını değerlendirmelerini ve varsa hataların neler olduğunu açıklamalarını istemişlerdir. Araştırmacılar, öğretmenlerin kesirler konusunda, ciddi matematiksel zorluklara ve kavram yanlışlarına sahip olduklarını ve yaşanan güçlüklerin; payda eşitleme, sadeleştirme, kesirlerde toplama ve ortak payda kavramı üzerine yoğunlaştığını tespit etmişlerdir.

Bu çalışmalardan farklı olarak Toluk-Uçar (2009) sınıf öğretmeni adayları ile yaptığı araştırmada öğretmen adaylarının kesirleri miktar yerine parça sayısı şeklinde düşündüklerini ve kurdukları problemlerin çözümlerinin kesirlerde toplama yerine doğal sayılarda toplama işlemi gerektirdiğini tespit etmiştir. Ticha ve Hošpesová (2009), öğretmen adaylarını  $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$  işlemine yönelik problem kurdurmuş, daha sonra kurulan problemler içerisinde üç problemi adaylara sunarak değerlendirmelerini istemiştir. Araştırmacı, öğretmen adaylarının verilen işlemin kavramsal boyutunu göz ardı ettiklerini, gerçek yaşam durumları ile verilen işlemi ilişkilendiremediklerini, bir kısmının da çarpma işlemi yerine toplama işlemi gerektiren problemler kurduklarını tespit etmiştir. Işık (2011), ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde çarpma ve bölme işlemine yönelik kurdukları problemlerin kavramsal analizi üzerine odaklanmıştır. Araştırma sonuçları problem kurmada öğretmen adaylarının, tamsayı kesirlerle çarpma ve iki kesrin bölümüne yönelik olarak işlem ve kesir sayılarına anlam yüklemekte eksikliklerinin olduğunu ortaya koymuştur.

Alan yazınında, özellikle kesirlerde toplama işlemine yönelik sınırlı sayıdaki çalışmalar, öğretmen veya öğretmen adaylarının, öğrenci yanıtlarının ardındaki muhakemeyi analiz etmede güçlükler yaşadıklarını ortaya koymaktadır. Öğretmen veya öğretmen adaylarının kesirlere yönelik pedagojik alan bilgilerini araştıran çalışmaların, genel olarak öğretmen veya öğretmen adaylarının problem çözme ve işlemsel süreçte yaptıkları hataların değerlendirilmesi üzerine yoğunlaştığı görülmektedir. Bunun yanında problem kurmaya yönelik yapılan çalışmaların ise öğretmen adaylarının kurdukları problemlerin analizi üzerine odaklandığı görülmektedir. Buna karşın alan yazınında öğretmen veya öğretmen adaylarının, öğrencilerin kesirlerde toplama işlemine yönelik kurdukları problemlerdeki hataları belirleyebilmeleri üzerinden pedagojik alan bilgilerini araştıran bir çalışma ile karşılaşılmamıştır.

Problem kurma bir dizi zihinsel etkinlikleri yerine getirmeyi gerekli kılan bir süreçtir.

Problem kurma, verilen bir durum hakkında incelenecek veya keşfedilecek sorular üretmeyi içerir (Akay, 2006). Leung'a (1993) göre problem kurma, verilen bir problemin yeniden düzenlenmesi, NCTM'ye (2000) göre ise verilen bir durum ya da deneyimden hareketle farklı problemler oluşturmaktır. Genel olarak problem kurma yeni problemler üretme veya verilen bir problemi yeniden oluşturma şeklinde tanımlanmaktadır (Cai & Hwang, 2002; English 2003; Silver, 1994; Ticha & Hošpesová, 2009). Problem kurma; matematiksel kavram ve işlemlerle günlük yaşam arasındaki ilişkinin kurulmasına (Abu-Elwan, 2002; Dickerson, 1999; Rizvi, 2004), temsiller arasındaki geçişlere (English, 1998; Ticha & Hošpesová, 2009; Işık, Işık, ve Kar, 2011) katkıda bulunmaktadır. Dickerson (1999), öğrencilerin kendi problemlerini kurduklarında, problemlerin yapısının altında yatan anlamları ve yaklaşımları fark edebileceklerini, sayı ve kavramlar arasındaki ilişkileri oluşturabileceklerini belirtmektedir. Araştırmacı problem kurmayı da kapsayan öğretim ortamının geleneksel problem çözüme yaklaşımına alternatif sunduğunu belirtmektedir. English (1998), öğrencilerin sembolik matematiksel ifadeleri tanımlayabilme ve günlük yaşam durumları ile ilişkilendirebilme becerilerinin, problem kurma ile değerlendirilip geliştirilebileceğini belirtmiştir. Dolayısıyla problem kurma, sembolik kesir işlemleri ile günlük yaşam arasındaki ilişkinin kurulmasında önemli bir yaklaşım olabilecektir. Işık ve Kar (2012), ilköğretim matematik öğretmenlerinin sayılar öğrenme alanı içerisinde en fazla kesirler alt öğrenme alanında problem kurma etkinliklerine yer verdiklerini tespit etmişlerdir. Kesirler alt öğrenme alanında problem kurma etkinliklerine yer veren öğretmenlerin tamamının, problem kurmanın öğrencilerin kavramsal anlamalarına ve sembolik ifadelerle günlük yaşam arasındaki ilişkinin kurulmasına katkı sağladığı yönünde görüşler belirttiklerini de tespit etmişlerdir. Bunun yanında İlköğretim 1-5. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (MEB, 2009) "kesirlerle toplama ve çıkarma işlemleri gerektiren problemleri çözer ve kurar" (s. 278) kazanımı altında, günlük yaşamla ilişkili seçilen problemlerin çözdürülmesi ve kurdurulması etkinliklerine yer verilmesinin önemi vurgulanmaktadır. İlköğretim 6-8. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (MEB, 2009) da, "kesirlerle işlemler yapmayı gerektiren problemleri çözer ve kurar" (s. 140) kazanımı altında öğrencilerden problemlerin çözümünde kullanılan işlemleri gerektiren benzer problemler kurmaları istenmektedir. Bu ilişkilendirme, öğrencilerin kesirlere yönelik informel bilgileri ile formel öğretim arasındaki bağın kurulmasına da imkan sağlayabilecektir.

Öğretmenlerin kurdukları problemler, öğrencilere fırsatlar sunmakta ve matematiği anlamalarına katkıda bulunmaktadır (Crespo, 2003; Knott, 2010). Gonzales'e (1998) göre, derslerde problem kurma etkinliklerine yer verilmesi, öğretmenlerin öğrencilerine doğru problemler kurmada yapacağı rehberliğe bağlıdır. Öğretim süreci ve öğrenci başarısının, öğretmenin sahip olduğu bilgiden etkilendiği de (Dooren, Verschaffel, & Onghena, 2002; Fennema & Franke, 2006; Hill, Rowan & Ball, 2005; Kulm, 2008; Rizvi & Lawson, 2007; Shulman, 1987) dikkate alınırsa, problem kurmaya yönelik öğretmen veya öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerinin farklı boyutlardan analiz edilmesi önemlidir. Araştırmacılar pedagojik alan bilgisinin, öğrenci hataları ve kavram yanlışlarının

bilinmesini, bu hata ve yanlışların öğretmenler tarafından değerlendirilebilmesini de içerdiğini belirtmektedirler (Ball, 1987; Grossman, 1990; Kinach, 2002; Marks, 1990).

İşık ve Kar (2012), yedinci sınıf öğrencilerinin kesirlerle toplama işlemine yönelik kurdukları problemlerde yedi hata türü sergilediklerini tespit etmişlerdir. Bu hata türleri şunlardır; (i) *Toplanan ikinci kesri bütünün kalanı üzerinden ifade etme*, (ii) *parça-bütün ilişkisini kuramama*, (iii) *işlem sonucuna doğal sayı anlamı yükleme*, (iv) *birim kargaşası*, (v) *toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme*, (vi) *işlemi soru köküne yansıtamama* ve (vii) *tamsayı kesirlerin tam kısımlarına anlam yükleyememe*. İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nda (2009) problem kurmaya yönelik kazanımların varlığı ve yapılacak hatalara yönelik öğrencilere dönütler verileceği de dikkate alındığında, öğretmen adaylarının öğrencilerin bir tamsayılı kesir ile bir basit kesrin toplamına yönelik kurdukları problemlerde görülen bu tür hataları belirleyebilme becerilerinin araştırılması önemli hale gelmektedir. Bu bağlamda çalışmada, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının, yedinci sınıf öğrencilerinin tamsayılı kesir ile basit kesrin toplamına yönelik kurdukları problemlerdeki hataları belirleyebilme becerilerinin araştırılması amaçlanmıştır.

## 2. Yöntem

### 2.1. Katılımcılar

Araştırma, Erzurum il merkezindeki yedi ilköğretim okulunun yedinci sınıflarında öğrenim gören 210 öğrenci ve İlköğretim Matematik Öğretmenliği son sınıfta öğrenim gören 61 öğretmen adayı ile yapılmıştır. 2011-2012 güz yarıyılında Erzurum il merkezindeki ilköğretim okulları içerisinde basit seçkisiz örnekleme yoluyla yedi ilköğretim okulu belirlenmiştir. Uygulamaya katılan öğrenciler, altıncı sınıfta ilköğretim matematik dersi öğretim programındaki *kesirlerle toplama ve çıkarma işlemlerini yapar ve kesirlerle işlemler yapmayı gerektiren problemleri çözer ve kurar* kazanımlarını da içeren öğretim sürecini tamamlamıştır.

İlköğretim yedinci sınıf öğrencilerinin yanıtlarından seçilen hatalı problemler, 61 öğretmen adayına 2011-2012 öğretim yılı bahar yarıyılında uygulanmıştır. Adaylara ilköğretim lisans programı çerçevesinde Özel Öğretim Yöntemleri I ve II derslerinin içeriğinde yer alan *...problem ve problem çözme nedir?, problemlerin sınıflandırılması, kesirler ve öğretimi, ilgili öğretim programı, ders öğretmeni ve öğrenci çalışma kitaplarının incelenmesi...* şeklindeki konuların öğretimi yanında problem kurma ve problem kurma etkinlikleri üzerine de öğretim yapılmıştır. Bunun yanında adaylar, okul uygulamalarına katılarak sınıf içi öğretim faaliyetlerini gözlemlene fırsatı da bulmuşlardır. Araştırmaya katılan adaylara, öğretmen adayını simgeleyen ÖA1, ÖA2,...,ÖA61 şeklinde kodlar verilmiştir.

### 2.2. Veri Toplama ve Analizi

Araştırmanın verileri iki aşamada toplanmıştır. Birinci aşamada, ilköğretim yedinci sınıf öğrencilerinden  $2\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = ?$  işlemine yönelik problem kurmaları istenmiştir. İkinci aşamada

ise, öğrencilerin kurmuş oldukları problemler arasından seçilen dört hatalı problemi içeren Hata Belirleme Testi (HBT) öğretmen adaylarına uygulanmıştır.

Alan yazınında araştırmacıların kesirlerle toplama işlemi için tamsayı kesir ile basit kesrin toplamına yönelik benzer işlemlerden yararlandıkları tespit edilmiştir (Darley, 2005; Hasemann, 1981; Herman vd., 2004; Pantziara & Philippou, 2011; Siegler, 2003; Toluk-Uçar, 2009). Bunun yanında İlköğretim 6-8. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programı'nda da benzer işlemlerin, kesirlerde toplamaya yönelik problem çözme ve kurma sürecinde kullanıldığı görülmüştür (MEB, 2009, s. 140). Ayrıca üç ilköğretim matematik öğretmenin görüşlerine de başvurulmuştur. Öğretmenler derslerinde kesir toplamlarına yönelik problem kurma etkinliklerine yer verdiklerini belirtmişlerdir. Öğretmenlerden alınan dönütler de dikkate alınarak verilen işlemin çalışmada kullanılmasına karar verilmiştir. Yedinci sınıf öğrencilerine yeterince zaman tanınarak, çözümünü sadece verilen işlem ile yapılabilecek problem kurmaları istenmiştir.

Işık ve Kar (2012), ilköğretim 7. sınıf öğrencilerinin kesirlerle toplama işlemine yönelik kurdukları problemleri analiz etmişlerdir. Araştırmacılar, iki basit kesrin toplamına yönelik iki, bir tamsayı kesir ile bir basit kesrin toplamına yönelik bir, iki tamsayı kesrin toplamına yönelik bir ve bir tamsayı kesir ile bir doğal sayının toplanmasına yönelik bir madde içeren toplam beş maddeden oluşan Problem Kurma Testi kullanmışlardır. Araştırma sonucunda öğrencilerin kesirlerle toplama işlemine yönelik problem kurmada 7 hata kategorisi tespit etmişlerdir. Elde edilen kategoriler; *işlem sonucuna doğal sayı anlamı yükleme* ( $H_1$ ), *birim kargaşası* ( $H_2$ ), *toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme* ( $H_3$ ), *parça-bütün ilişkisini kuramama* ( $H_4$ ), *toplanan ikinci kesri bütünüün kalanı üzerinden ifade etme* ( $H_5$ ), *işlemi soru köküne yansıtamama* ( $H_6$ ), *ve tamsayı kesirlerin tam kısımlarına anlam yüklememe* ( $H_7$ ) şeklindedir. Bu çalışmada bir tamsayı kesir ile bir basit kesrin toplamına yönelik öğrencilerin kurdukları problemlerdeki hataların öğretmen adayları tarafından belirlenmesi amaçlandığından öğrencilerin Işık ve Kar tarafından yapılan çalışmalarındaki hatalı problemleri kullanılmıştır. Bu amaçla bir tamsayı kesir ile bir basit kesrin toplamı için kullanılan  $2\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = ?$  işlemine yönelik 7. sınıf öğrencilerinin kurdukları problemler arasından seçilen dört hatalı problem cümlesi öğretmen adaylarına sunulmuştur. Bu problem cümleleri, Işık ve Kar tarafından belirlenen yedi hata türünün tamamını içerecek şekilde seçilmiştir. Ayrıca bu süreçte farklı hata türlerini aynı anda barındıran problem cümlelerinin seçilmesine özen gösterilmiştir. Böylece adayların problem cümlelerinde, hangi hata türlerini daha fazla belirleyebildiklerinin de ortaya konulması amaçlanmıştır.

HBT'nin uygulama sürecinde öğretmen adaylarına yapılan açıklamalarda; öğrencilerden kesirlerde toplamaya yönelik sadece verilen işlemler ile çözülebilecek problemler kurmalarının istendiği belirtilmiştir. Testte yer alan dört problem cümlesinin öğrencilerin kurdukları problemler oldukları vurgulanarak, adaylardan verilen toplama işlemi ile problem cümlelerini karşılaştırmaları ve varsa problem cümlelerindeki kavramsal hataları belirleyerek açıklamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının yanıtları içerik analizine tabi

tutulurak, belirtilen yedi hata türüne göre sınıflandırılmıştır. Bunun yanında içerik analizi ile her bir problem cümlesindeki hatalara yönelik yapılan açıklamalarda adayların düştükleri farklı hatalarda ortaya konulmuştur.

İki farklı araştırmacı eş zamanlı ve birbirinden bağımsız olarak, HBT'nin her bir maddesine yönelik öğretmen adaylarının yanıtlarını analiz etmişlerdir. HBT'nin her bir maddesindeki analizler üzerinde sırasıyla; %86,9, %95,1, %96,72 ve %100 oranlarında uyum sağlanmıştır. Analizleri karşılaştırma sürecinde belirtilen hata kategorilerinden herhangi birine girmediği düşünülen yanıtlar ise *diğer* kategorisi altında toplanmıştır. Bu kategori, hataları belirlemek yerine bazı kelimelerin değiştirilmesi suretiyle problem cümlelerinin aynen yazıldığı (örn. “Elif toplam kaç tane kalem satmıştır?” yerine “Elif birinci ve ikinci gün toplam kaç tane kalem satmıştır?” şeklinde yazılması) ve açıklamaların hata analizi için yeterince açık olmadığı durumları içermektedir. Bunun yanı sıra HBT'nin birinci maddesinde beş aday, kalem sayısının kesir sayıları ile ifade edilemeyeceğini dolayısıyla problemde hata olduğunu belirtmişlerdir. Analiz sürecinde araştırmacılar bu tür açıklamaların,  $H_1$  ve  $H_3$  hatalarının her ikisini de kapsayıp kapsamadığı noktasında tereddüt yaşamışlardır. Yapılan son görüşmede, bu tür açıklamaların toplanan kesir sayıları yanında işlem sonucunun da kesir sayısı olmasından dolayı her iki hata türünü de kapsamaması gerektiği üzerinde uzlaşmışlardır. Böylece yapılan analizler üzerinde tam bir fikir birliği sağlanmıştır.

### 3. Bulgular

#### 3.1. HBT'nde yer alan problem cümlelerindeki hataların analizine yönelik bulgular

HBT'nde yer alan dört problem cümlesindeki hatalara yönelik açıklamalar şu şekildedir;

Problem kurulması istenen  $2\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = ?$  işleminin sonucu bir kesir sayısıdır. HBT'nin birinci maddesindeki problem cümlesini yazan öğrenci, soru kökünü *Elif toplam kaç tane kalem satmıştır?* şeklinde oluşturmuştur. Bu ifadeyle öğrencinin işlem sonucuna doğal sayı anlamı yüklemeye çalışarak  $H_1$  hata türünü sergilediği görülmektedir. Bunun yanında problem cümlesindeki toplanan kesir sayılarına,  $2\frac{1}{3}$  tane tahta kalemi ve  $\frac{2}{5}$  tane daha kalem ifadeleriyle de doğal sayı anlamı yüklenmiştir. Dolayısıyla yazılan birinci problem cümlesinde  $H_3$  hatası da bulunmaktadır.

İkinci problem cümlesinde öğrenci eklenen su miktarını  $\frac{2}{5}$  daha su konuldu ifadesi ile karşılamaya çalışmıştır. Problem cümlesinde havuzun  $\frac{2}{5}$ 'si kadar su konulduğu mu yoksa  $\frac{2}{5}$  ton, litre vb. mi kastedildiği açık değildir. Bu yönüyle problem cümlesinde kesir sayısına yüklenen birim anlamının oluşturulmadığı görülmektedir. Bunun yanında  $2\frac{1}{3}$  tamsayı kesri bütünden daha fazla miktarı belirtmesine rağmen bu durum, öğrenci tarafından problem cümlesinde göz ardı edilmiştir. Öğrenci tamsayı kesri havuzun  $2\frac{1}{3}$ 'ü su doludur

ifadesi ile karşılaşmaya çalışarak, mevcut çokluktan daha büyük çokluğu oluşturmuştur. Bu yönüyle problem cümlesinde  $H_4$  hata türünün de sergilendiği görülmektedir.

Üçüncü problem cümlesinde öğrenci  $2\frac{1}{3}$  kesir sayısını, *2 liranın  $\frac{1}{3}$ 'ünü* ifadesi ile karşılaşmaya çalışmıştır. Öğrenci problem cümlesinde tamsayılı kesrin tam kısmı ile kesir kısmını çarpmayı gerektiren sözel ifadelere yer vermiştir. Dolayısıyla yazılan problem cümlesinde  $H_7$  hata türü bulunmaktadır. Bunun yanında problem cümlesinde kullanılan *kumbaramda  $\frac{2}{5}$  kadar param vardır* ifadesinde,  $\frac{2}{5}$  kesir sayısına yüklenen birim anlamının oluşturmadığı da görülmektedir. Dolayısıyla problem cümlesinde  $H_2$  hata türü de bulunmaktadır.

Dördüncü problem cümlesinde, *paranın  $2\frac{1}{3}$ 'ü ile okul kıyafetleri aldık* ifadesi ile  $H_4$  hatasının, problem cümlesinin devamında kullanılan *kalan paranın  $\frac{2}{5}$ 'i ile* ifadesi ile de  $H_5$  hatasının yapıldığı görülmektedir. Bunun yanında öğrenci *babamın ne kadar parası kalmıştır?* ifadesi ile toplama işlemini soru köküne yansıtamamıştır. Dolayısıyla problem cümlesinde  $H_6$  hatası da bulunmaktadır. Bu açıklamalarla birlikte araştırmada kullanılan 7. sınıf öğrencileri tarafından kurulan hatalı problemler ve içerdikleri hata türleri Tablo 1'de sunulmuştur.

**Tablo 1.** HBT'nde yer alan hatalı problem cümleleri ve içerdikleri hata türleri

Problem Cümleleri	Hata Türleri
Elif birinci gün $2\frac{1}{3}$ tane tahta kalemi satıyor. İkinci gün ise $\frac{2}{5}$ tane daha kalem satıyor. Buna göre Elif toplam kaç tane kalem satmıştır?	$H_1, H_3$
Bir tatil köyündeki havuzun $2\frac{1}{3}$ 'ü su doludur. Ancak suyun yüksekliği yeterli olmadığından havuza $\frac{2}{5}$ daha su konuldu. Havuzun ne kadar su ile doludur?	$H_2, H_4$
Annemin verdiği 2 liranın $\frac{1}{3}$ 'ünü kumbarama attım. Benim kumbaramda $\frac{2}{5}$ kadar param vardır. Bu durumda kumbaramda ne kadar param olur?	$H_2, H_7$
Babam ile alışverişe gittiğimizde paranın $2\frac{1}{3}$ 'ü ile okul kıyafetleri aldık. Kalan paranın $\frac{2}{5}$ 'i ile de kitap, defter ve kalem aldık. Babamın ne kadar parası kalmıştır?	$H_4, H_5$ $H_6$



## 3.2.Öğretmen Adaylarının Problem Cümlelerindeki Hataları Belirleyebilmelerine Ait Bulgular

### 3.2.1. Birinci Problem Cümlesindeki Hataların Belirlenmesine Yönelik Bulgular

Öğretmen adaylarının, HBT'nin birinci problem cümlesindeki  $H_1$  ve  $H_3$  hata türlerini belirleyebilmelerine ait dağılım Tablo 2'de sunulmuştur.

**Tablo 2.** HBT'nin birinci problem cümlesindeki hataların belirlenmesine ait dağılım

	$H_1$	$H_3$	Hatasız	Diğer
Aday Sayısı	47(77,05)	52 (85,25)	4(6,56)	3(4,92)

\* Tablodaki değerler 61 aday üzerinden hesaplanarak frekans(yüzde) şeklinde sunulmuştur.

Tablo 2'ye göre, dört aday problem cümlesinde hata olmadığını ifade etmiştir. Öğretmen adaylarının %85,25'i  $H_3$  hatasını, %77,05'i ise  $H_1$  hatasını belirleyebilmiştir. Adayların toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yükleme hatasını belirleyebilme başarılarının, işlem sonucuna doğal sayı anlamı yükleme hatasını belirleyebilme başarılarına göre nispeten daha yüksek olduğu söylenebilir.  $H_1$  ve  $H_3$  hatalarının her ikisini de belirleyen ÖA18'in yanıtı Şekil 1'de verilmiştir.

→ Tahta kalemin  $2\frac{1}{3}$  ünü satıyor. Yani bir tane tahta kalemin  $\frac{1}{3}$  ünü satamaz. Kalemi parçalayıp satamaz.

→ Kaç tane kalem satmış kesir ifadesi işleminde yanlış bir ifade elindeki kalemlerin miktarını satmış demektir.

#### Şekil 1. ÖA18'in HBT'nin birinci problemine yönelik açıklamaları

HBT'nin birinci problem cümlesinde  $H_3$  hatasını belirleyen 52 öğretmen adayının 14'ü (%26,9) açıklamalarında parça-bütün ilişkisinin göz ardı edildiği  $H_4$  hatasını yapmışlardır. ÖA41'in bu duruma yönelik yanıtı Şekil 2'de verilmiştir.

Hata 1:  $2\frac{1}{3}$  tane tahta kalem olmaz. Elif birinci gün elinde olan tahta kalemlerin  $2\frac{1}{3}$  ünü satıyor.  
Hata 2: İkinci gün ise  $\frac{2}{3}$  tane daha kalem değil, ikinci gün ise yine elindeki kalemlerin  $\frac{2}{3}$  ünü satıyor demelidir.

#### Şekil 2. ÖA41'in HBT'nin birinci problemine yönelik açıklamaları

Öğretmen adayı,  $2\frac{1}{3}$  tane tahta kalem olamayacağını belirterek  $H_3$  hata türünü belirleyebilmiştir. Açıklamasının devamında bu hatanın birinci gün elinde olan tahta kalemlerin  $2\frac{1}{3}$  ünü satıyor ifadesi ile düzeltilebileceğini belirtmiştir. Bu durumda elindeki

kalem sayısından daha fazla sayıda kalemi satması parça-bütün ilişkisi açısından anlamlı değildir.

Bunun yanında problem cümlesinde  $H_3$  hatasını belirleyen adayların  $15\%$ (%28,8) açıklamalarında  $2\frac{1}{3}$  tamsayılı kesrinin anlamlı olabilmesi için başlangıç miktarının bilinmesinin gerekli olduğuna yönelik ifadelere yer vermişlerdir. 15 adayın 4'ü ise açıklamalarında  $H_4$  hatasını yapmıştır. ÖA17'nin bu duruma yönelik yanıtı Şekil 3'te verilmiştir.

Burada kalem sayısında tane kelimesi kullanılmamalıdır. Bu öğrenciyi yanlış anlamaya sebep eder. Çünkü  $2\frac{1}{3}$  tane kalem olmaz.  $\frac{2}{3}$  tane kalem de olmaz. Kesirlerde tane kelimesi doğal sayıların ifo desür. Dolayısıyla buradaki kesirler aslında başlangıçta verilmiş ge reken kalem sayısının 1 gün  $2\frac{1}{3}$  tane satıldığı, 2 gün ise  $\frac{2}{3}$  tane satıldığı olmalıdır.

### Şekil 3.ÖA17'nin HBT'nin birinci problemine yönelik açıklamaları

Öğretmen adayı  $2\frac{1}{3}$  tane kalem olamayacağını, kesir sayısını ifade edebilmek için ise kalem sayısının başlangıçta verilmesi gerektiğini belirtmektedir. Açıklamasının devamında ise tamsayılı kesrin başlangıçtaki mevcut kesir sayısı üzerinden  $2\frac{1}{3}$ 'ünün satıldığı şeklinde ifade edilmesi gerektiğini belirtmiştir. Dolayısıyla aday açıklamasında  $H_4$  hatasını sergilemiştir. Bunun yanında diğer adaylar ise 3 kutu kalem vb. şeklinde başlangıç miktarının belirtilmesi gerektiğini ve tamsayılı kesrin 2 kutu ve 3. Kutunun  $\frac{1}{3}$ 'inin satıldığı vb. ifadelerle oluşturulması gerektiğini belirtmişlerdir.

### 3.2.2. İkinci Problem Cümlesindeki Hataların Belirlenmesine Yönelik Bulgular

Öğretmen adaylarının, HBT'nin ikinci problem cümlesindeki  $H_2$  ve  $H_4$  hatalarını belirleyebilmelerine ait dağılım Tablo 3'te sunulmuştur.

**Tablo 3.** HBT'nin İkinci Problem Cümlesindeki Hataların Belirlenmesine Ait Dağılım

	$H_2$	$H_4$	Hatasız	Diğer
Aday Sayısı	31(50,82)	42(68,85)	2(3,28)	3(4,92)

\* Tablodaki değerler 61 aday üzerinden hesaplanarak frekans(yüzde) şeklinde sunulmuştur.

Tablo 3'e göre, iki aday problem cümlesinde hata olmadığını ifade etmiştir. Öğretmen adaylarının %50,82'si  $H_2$  hatasını, %68,85'i ise  $H_4$  hatasını belirleyebilmiştir. Adayların birim kargaşası hata türünü belirleyebilme başarılarının, parça-bütün ilişkisini kuramama hata türünü belirleyebilme başarılarına göre daha düşük olduğu görülmektedir.  $H_2$  ve  $H_4$  hatalarının her ikisini de belirleyen ÖA4'ün yanıtı Şekil 4'te verilmiştir.

Hata1: Burada: İfrençü bütünü kavrayamaz veya yanlış algılar. Havuz bir bütün ise onun  $\frac{2}{5}$  ünün bahsedilemez.

Hata2: Havuza  $\frac{2}{5}$  kadar su hangi bütün esas alınacak öklüüp koyuluyor belli değir. Havuzun  $\frac{2}{5}$  si kadar su daha konuldu denebilir.

#### Şekil 4. ÖA4'ün HBT'nin ikinci problemine yönelik açıklamaları

HBT'nin ikinci problem cümlesinde 5 aday (%8,2) soru kökünde yer alan *havuzun ne kadarı su ile doludur?* ifadesinin hatalı olduğunu, *kaçta kaç doludur?* şeklinde değıştırilmesi gerektiğini belirtmişlerdir. ÖA57'nin bu duruma yönelik yanıtı Şekil 5'te verilmiştir.

Hata 1) Problemin son cümlesi "Son durumda havuzun kaçta kaç doludur?" şeklinde olmalıdır.

#### Şekil 5. ÖA57'nin HBT'nin ikinci problemine yönelik açıklamaları

### 3.2.3. Üçüncü Problem Cümlesindeki Hataların Belirlenmesine Yönelik Bulgular

Öğretmen adaylarının, HBT'nin üçüncü problem cümlesindeki  $H_2$  ve  $H_7$  hata türlerini belirleyebilmelerine ait dağılım Tablo 4'te sunulmuştur.

**Tablo 4.** HBT'nin üçüncü problem cümlesindeki hataların belirlenmesine ait dağılım

	$H_2$	$H_7$	Hatasız	Diğer
Aday Sayısı	37(60,65)	58(95,10)	1(1,64)	2(3,28)

\* Tablodaki değerler 61 aday üzerinden hesaplanarak frekans(yüzde) şeklinde sunulmuştur.

Tablo 4'e göre, bir aday problem cümlesinde hata olmadığını ifade etmiştir. Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu *tamsayı kesirlerin tam kısımlarına anlam yükleyememe* şeklindeki  $H_7$  hatasını belirleyebilmiştir. Bunun yanında birim kargaşası şeklindeki  $H_2$  hatasını belirleyebilme oranı ise %60,65'tir. Problem cümlesinde yer alan her iki hatayı da belirleyen ÖA35'in yanıtı Şekil 6'da verilmiştir.

Bu problemde öğrenci  $2\frac{1}{3}$  kesirini  $2\frac{1}{3}$  olarak almış. Problemi buna göre kurmuştur. "Benim kumbaramda  $\frac{2}{5}$  kadar" diyor. Burada  $\frac{2}{5}$  i kadar olduğunu ifade etmemiştir. Burada annenin verdiği paranın  $\frac{2}{5}$  i mi var, yoksa başka bir miktarın  $\frac{2}{5}$  i mi anlattığını bilmiyor.

#### Şekil 6. ÖA35'in HBT'nin üçüncü problemine yönelik açıklamaları

HBT'nin üçüncü problem cümlesinde H<sub>7</sub> hatasını belirleyen 58 adayın yedisi (%12,07), bu hata türüne yönelik açıklamalarında H<sub>4</sub> hatasını yapmıştır. ÖA42'nin bu duruma yönelik açıklamaları Şekil 7'de verilmiştir.

Annemin verdiği 2 tırarın  $\frac{1}{3}$  dediği zaman  $2\frac{1}{3}$  i yani  $\frac{2}{3}$  i ifade etmiş dur. Oysa problemde ifade edilen şeyi  $2$  tır  $\frac{1}{3}$  kesiridir. Problemi şu şekilde düzelttik. Anne bu hafta iki gün üst üste para vermiştir. İlk gün parasının  $2\frac{1}{3}$  ini kumbarasına almıştır. İkinci gün ise parasının  $\frac{2}{5}$  sini vermiştir. Toplamda kumbaramda annenin parasının kaçta kaçını biriktirmiştir.

#### Şekil 7. ÖA42'nin HBT'nin üçüncü problemine yönelik açıklamaları

HBT'nin üçüncü problem cümlesinde H<sub>7</sub> hatasını belirleyen 58 adayın 12'si (%20,69), bu hata türünü düzeltirken H<sub>2</sub> hatasını yapmıştır. Aynı zamanda bu adayların problem cümlesinde yer alan birim kargaşası hata türünü tespit edemedikleri de görülmüştür. ÖA39'un bu duruma yönelik açıklamaları Şekil 8'de verilmiştir.

⇒ Burada soruda 2 tırarın  $\frac{1}{3}$  denektir. Anne aslında verilen kesin tam sayılı kesir. Tam sayılı kesri anlayamamıştır soruda. Problemin düzeltilmiş şekli:  
Annemin verdiği  $2\frac{1}{3}$  kadar parayı kumbarasına attım. Benim kumbaramda  $\frac{2}{5}$  kadar vardı. Annemin verdiği para ile birlikte kumbaramda ne kadar parayı vardı?

#### Şekil 8. ÖA39'un HBT'nin üçüncü problemine yönelik açıklamaları

### 3.2.4. Dördüncü Problem Cümlesindeki Hataların Belirlenmesine Yönelik Bulgular

Öğretmen adaylarının, HBT'nin dördüncü problem cümlesindeki H<sub>4</sub>, H<sub>5</sub> ve H<sub>6</sub> hata türlerini belirleyebilmelerine ait dağılım Tablo 5'te sunulmuştur.

**Tablo 5.** Dördüncü problem cümlesindeki hataların belirlenmesine ait dağılım

	H <sub>4</sub>	H <sub>5</sub>	H <sub>6</sub>	Hatasız	Diğer
Aday Sayısı	41(67,21)	58(95,08)	54(88,52)	1(1,64)	0(0)

\* Tablodaki değerler 61 aday üzerinden hesaplanarak frekans(yüzde) şeklinde sunulmuştur.

Tablo 5'e göre, bir aday problem cümlesinde hata olmadığını ifade etmiştir. Öğretmen adaylarının %67,21'i parça-bütün ilişkisinin kurulamadığı H<sub>4</sub> hatasını belirleyebilmiştir. Bu hata türü problem cümlesindeki diğer hata türlerine göre oransal olarak daha az belirlenebilmiştir. Öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğu H<sub>5</sub> ve H<sub>6</sub> hatalarını belirleyebilmiştir. ÖA6'nın üç hata türüne yönelik açıklamaları Şekil 9'da verilmiştir.

Paranın  $2\frac{1}{5}$ 'ü ile okul kıyafetleri alınmış. Bu durumda  $2\frac{1}{5}$  bütünde büyük olduğundan dolayı mevcut paradan daha fazla parayı vermiş diye mantıksal olarak mümkün değildir. Ayrıca problemde kalan paranın demiş. Gerçek para kalmasın ki zaten kalan demesi sorunu gerektirir. Bir de problemin sonunda ne kadar parası kalmıştır? diye soruyor. Bu da toplama işlemi karşılamıyor. Bunun yerine ne kadar para harcamıştı şeklinde sorulabilir.

#### Şekil 9. ÖA6'nın HBT'nin dördüncü problemine yönelik açıklamaları

H<sub>5</sub> hatasını tespit eden 58 öğretmen adayının 16'sı (%27,59) açıklamalarında *kalan* kelimesinin problem cümlesinde uygun ifade olmadığını vurgulamışlardır. Adaylar *paranın  $\frac{2}{5}$ 'i ile de kitap, defter ve kalem aldık* şeklinde ifade edilmesi gerektiğini belirterek H<sub>4</sub> hatasını yapmışlardır. Mevcut paranın  $2\frac{1}{3}$ 'ünün kullanılması parça-bütün açısından anlamlı değildir. Bu durumun farkında olmayan adayların devamında H<sub>5</sub> hatasını gidermek için toplanan ikinci kesri bütün üzerinden ifade etmeleri, H<sub>4</sub> hatasına düşmelerine neden olmuştur. ÖA28'in bu duruma yönelik açıklamaları Şekil 10'da verilmiştir.

Kalan paranın  $\frac{2}{5}$ 'i ifadesi uygun değil. Bu durumda işlem sorunu olur. Verilen işlemlerde toplama olduğu için  $\frac{2}{5}$  kesri paranın tamamı üzerinden ifade edilebilir. Yani paranın  $\frac{2}{5}$ 'i ile de kitap, defter ve kalem aldık denilmesi uygun olacaktır.

#### Şekil 10. ÖA28'in HBT'nin dördüncü problemine yönelik açıklamaları

#### 4. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının yedinci sınıf öğrencilerinin tamsayılı kesir ile basit kesrin toplamına yönelik kurdukları problemlerdeki hataları belirleyebilme becerileri araştırılmıştır. Öğretmen adaylarına sunulan dört problem cümlesinde yedi hata bulunmaktadır. Problem cümlelerindeki hataların odağında; kesir sayılarının uygun birimler ile ifade edilememesi, doğal sayılardaki alışkanlıkların kesir sayılarına genellenmesi ve kesir sayılarının belirttiği parça-bütün ilişkisinin anlaşılmasının yer aldığı söylenebilir. Öğretmen adaylarının birim kargaşası ve parça-bütün ilişkisini kuramama hata türlerini belirlemede, diğer hata türlerine göre daha fazla güçlük yaşadıkları tespit edilmiştir. Bunun yanında adayların tespit ettikleri diğer hatalara yönelik açıklamalarında, bu hataları sergiledikleri de görülmüştür. Bu sonuçlar yapılan çalışmalarda (Ball,1990; Işık, 2011; Redmond & Utley, 2007; Rizvi, 2004; Simon, 1993; Toluk-Uçar, 2009; Zembat, 2007) öğretmen adaylarının kesir işlemlerine uygun problem kurmada güçlükler yaşadıkları sonucunu desteklemektedir. Bunun yanında gerek öğrencilerin kurdukları problemlerdeki hatalar, gerekse adayların yaptıkları açıklamalardaki hatalar, araştırmacılar tarafından belirtilen (Charalambous, Delaney, Hsu, & Mesa, 2010; Işık & Kar, 2012; Zembat, 2007) kesir işlemlerine yönelik güçlüklerin kesir öğrenimindeki güçlüklerden ayrı değerlendirilemeyeceği ve köklerinin kesir kavramlarına dayandığı sonuçlarıyla da benzerlik göstermektedir.

GBT'nin birinci problem cümlesindeki  $H_1$  ve  $H_3$  hataları, toplanan kesir sayılarına ve işlem sonucunda elde edilen kesir sayısına doğal sayı anlamı yüklenmesiyle ilgilidir. Buna karşın öğretmen adaylarının % 6,56'sı bu hataların her ikisinin de farkına varamamış, %22,95 ve % 14,75'i de sırasıyla  $H_1$  ve  $H_3$  hatalarını belirleyememiştir. Bunun yanında toplanan kesir sayılarına doğal sayı anlamı yüklenmesi hatasının işlem sonucuna doğal sayı anlamı yüklenmesi hatasına göre tespit edilme başarısının nispeten daha yüksek olduğu görülmüştür. Problem cümlesinde yer alan  $2\frac{1}{3}$  tane tahta kalem ve  $\frac{2}{5}$  tane daha kalem şeklindeki ifadelerin hataları belirlemede adaylara kolaylık sağladığı düşünülebilir. Çünkü tahta kaleminin süresiz çokluk olması, kesir sayıları yerine doğal sayılar ile ifade edilmesi gerektiğini açıkça ortaya koymaktadır.  $H_3$  hatasına yönelik yapılan açıklamaların nitel analizlerinden, öğretmen adaylarının yeni hatalar sergiledikleri de tespit edilmiştir.  $H_3$  hatasını tespit eden adayların bazılarının açıklamalarında parça-bütün ilişkisini göz ardı ettikleri görülmüştür. Bazı adaylar  $2\frac{1}{3}$  tane tahta kalem ifadesi yerine tahta kalemlerden oluşan çokluğun belirli kısmı anlamıyla (*elinde bulunan kalemlerin  $2\frac{1}{3}$ 'ünü satıyor gibi*.) problemin ifadesinin düzeltilebileceğini belirtmişlerdir. Ancak *elinde bulunan kalemlerin  $2\frac{1}{3}$ 'ü* ifadesi, tamsayılı kesir olması sebebiyle mevcut kalemlerden daha fazlasının satılmasını gerektirir. Mantıksal açıdan ise bu durum mümkün değildir. Yine  $H_3$  hatasını belirleyen adayların bazıları açıklamalarında  $2\frac{1}{3}$  tamsayılı kesrinin anlamlı olabilmesi için başlangıç miktarının bilinmesi gerektiğine vurgu yapmışlardır. Buna karşın verilen işleme

yönelik başlangıç miktarı bilinmeden de problemler kurulabilecektir. Tam sayılı kesirlerin litre, ton, saat gibi sürekli çokluklar üzerinden ifade edilmesi durumunda, başlangıç miktarının bilinmesine ihtiyaç duyulmayabilir. Ayrıca bu tür bir kullanım, parça-bütün ilişkisini kuramama hata türünü de giderebilir. Kesir sayıları doğal sayılarla ifade edilemeyecek çoklukları ifade etmek için kullanılmaktadır. Kerslake (1986), öğrencilerin kesirlere yönelik yaşadıkları güçlüklerin temelinde kesirlerin bir sayı olarak algılanamaması, bunun yerine daha çok bir şeklin/bütünün belli bir kısmı veya bir miktarı şeklinde görülmesinin yer aldığını belirtmiştir. Bazı öğretmen adaylarının açıklamalarında bu anlayışı yansıtmaları, kesirleri daha çok bir şeklin/bütünün belli bir kısmı veya bir miktarı anlamıyla düşündüklerine işaret etmektedir. Bu yönüyle öğretmen adaylarında kesirlerin farklı anlamlarına yönelik sınırlı anlayışın olduğu söylenebilir.

Bütün hatalar içerisinde öğretmen adaylarının tespitinde en fazla güçlük yaşadıkları hata kategorileri  $H_2$  ve  $H_4$ 'tür. Öğretmen adaylarının HBT'nin iki, üç ve dördüncü maddelerinde  $H_2$  ve  $H_4$  hatalarını belirleyebilme başarı oranlarının %70'in altında olduğu görülmüştür. Her iki hata kategorisini aynı anda içeren HBT'nin ikinci problem cümlesinde başarı oranı daha da düşüktür. Bu problem cümlesinde adayların yaklaşık yarısı  $\frac{2}{5}$  daha su konuldu ifadesindeki  $H_2$  hatasını, yaklaşık üçte biri de *havuzun  $2\frac{1}{3}$ 'ü su doludur* ifadesindeki  $H_4$  hatasını belirleyememiştir. Lin (2010), miktarların doğal sayılarla temsil edilmesinin kolayca anlaşılabilirdiğini, buna karşın kesirlerin miktarlar arasındaki ilişkiyi göstermesinden dolayı anlaşılmasında daha fazla güçlük yaşandığını belirtmektedir. Çalışmada  $H_4$  hata türünün tespitinde daha fazla güçlük yaşanması, kesirlerin belirttiği miktarlar arasındaki ilişkinin anlaşılmasında öğretmen adaylarının güçlükler yaşadıklarına işaret etmektedir. Bunun yanında HBT'nin ikinci problem cümlesinde bazı adaylar açıklamalarında problemin soru kökünde yer alan *ne kadarı* ifadesinin yerine *kaçta kaç* ifadesinin gelmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Ancak tamsayı kesirlerin bütünü belirli kısmı anlamıyla birim kullanılmadan ifade edilmesi, soru kökünde yer alan kaçta kaç veya ne kadarı şeklindeki ifadeleri anlamlı kılmamaktadır (Havuzun ne kadarı/kaçta kaç doludur?  $2\frac{11}{15}$ 'i doludur gibi...). Bu tür anlam kargaşaları, kesir sayılarına uygun birimler atanarak (Örn.,  $2\frac{1}{3}$  ton gibi...) giderilebilecek ve havuzda ne kadar su bulunduğu sorusuna kesirlerin toplamı ile cevap verilebilecektir.

Öğretmen adayları yedi hata türü içerisinde en fazla  $H_5$ ,  $H_6$  ve  $H_7$  hata türlerini belirleyebilmiştir. Bu hata türleri sırasıyla toplanan ikinci kesrin bütünü kalanı üzerinden ifade edilmesi, işlemin soru köküne yansıtılmaması ve tamsayı kesirlerin tam kısımlarının göz ardı edilmesi ile ilişkilidir. Bu hata türlerinin verilen işlem ile sözel ifade arasındaki eşleme ile tespit edilebilecek olması, hataların belirlenmesindeki yüksek başarının nedeni olarak düşünülebilir (Örn., *kalan paranın  $\frac{2}{5}$ 'i* ifadesinin adaya çarpma işlemini çağrıştırması). Benzer şekilde kesir sayılarının tam kısımlarının sözel cümlelere aktarılamaması içinde aynı durum söz konusudur (Örn., *2 liranın  $\frac{1}{3}$ 'ünü* ifadesinin  $2\frac{1}{3}$

yerine  $2x\frac{1}{3}$  işlemini çağrıştırması). Mack (1995), öğrencilerin sözel ifadelerle karşılık gelen tamsayılı kesir oluştururken kesrin tam kısmını göz ardı ettiklerini belirtmiştir ( $1\frac{1}{3}$  kesri,  $\frac{1}{3}$  şeklinde yazılmaktadır). Benzer şekilde Yanik, Holding, ve Flores (2008), öğrencilerin tamsayılı kesirlerin tam kısımlarını anlamlandırmakta zorlandıklarını ve basit kesir gibi düşündüklerini belirtmektedirler. Kurulacak problemlerde, matematiksel ifadeye yer alan sayı, parantez ve değişkenler yanında işlemleri karşılayacak sözel ifadelerin oluşturulması da gerekir. Adayların yaklaşık %89'u kurulan problem cümlesindeki soru kökünün toplama işlemini karşılamadığını tespit edebilmiştir. Buna karşın adayların %10'undan fazlasının matematiksel dil ile sözel ifadeler arasındaki eşlemeyi kuramaması, temsiller arasındaki geçişlerde güçlüklerinin olduğunu göstermektedir.

Öğrencilerin problem kurma becerilerinin geliştirilmesi, doğal sayılardan kesirlere ve kesirlerden de kesir işlemlerine geçişlerinin sağlanması, öğretmenlerin problem kurma becerilerine ve kesir kavramları ile işlemlerine yönelik kavramsal anlamalarına bağlıdır (Luo, 2009). Ticha ve Hošpesová (2009) öğretmen adaylarının yeterliliklerini geliştirmenin önemli yollarından birinin, problem kurmayla ilişkili becerilerinin geliştirilmesi olduğunu belirtmişlerdir. Crespo (2003), öğretmen adaylarının matematiksel ve pedagojik boyutlarını düşünmeden problemler kurduklarını ve kurulan problemlerin çözülebilirliğini araştırmadıklarını belirtmiştir. Bu bağlamda öğretmen adaylarının hatalara yönelik ifadelerinde farklı hatalar sergilemeleri, açıklamaların matematiksel ve pedagojik yanının yeterince dikkate alınmadığını göstermektedir. Öğretim sürecinde öğrencilerin kurdukları problemlere yönelik verilecek bu tür dönütlerin, bazı hataları gidermeye yardımcı olması yanında, bazı hataları da beraberinde getireceği söylenebilir. Araştırmanın verileri, bir tamsayılı kesir ile bir basit kesrin toplamını içeren 7. sınıf öğrencileri tarafından kurulmuş dört problem cümlesinden elde edilmiştir. Bu durum çalışmanın sınırlılığı olarak düşünülebilir. Gelecekte farklı kesir sayılarını kapsayan ve olası farklı hata türlerini de içeren problem cümleleri üzerinden çalışmanın kapsamı genişletilebilir. Lisans düzeyindeki derslerde problem kurma etkinliklerine yönelik öğrenci yanıtlarında görülen hataların analizlerine yer verilebilir. Nitel yaklaşımlar ile bazı adayların hatalara yönelik açıklamalarında, farklı hatalar sergilemelerine neden olan düşünce yapıları da ortaya çıkarılabilir. Yapılabilecek bu tür çalışmaların sonuçları da dikkate alınarak, yaşanan güçlükleri gidermek için deneysel çalışmalar da yürütülebilir.



## **Skills of Pre-Service Elementary Mathematics Teachers for Determining Errors in Problems Posing Related to Addition Operation with Fractions**

### **Extended Abstract**

Problems posed by teachers provide opportunities for students and contribute to their understanding of mathematics (Crespo, 2003; Knott, 2010). According to Gonzales (1998), including problem posing activities in classes is dependent on the guidance teachers provide to students for correctly posing problems. Considering also that the teaching process and student success are affected by teacher knowledge (Dooren, Verschaffel, & Onghena, 2002; Fennema & Franke, 2006; Hill, Rowan, & Ball, 2005; Kulm, 2008; Rizvi & Lawson, 2007; Shulman, 1987), the analysis, through various dimensions of teachers' or pre-service teachers' pedagogical content knowledge for problem posing, is important. Researchers indicate that pedagogical content knowledge also includes knowledge about student errors and misconceptions, and the teachers' ability to assess these errors and misconceptions (Ball, 1987; Grossman, 1990; Kinach, 2002; Marks, 1990). Within this context, this study aims to research the skills of pre-service elementary mathematics teachers to determine errors in problems posed by seventh grade students relating to the addition of fractions.

The research has been conducted on 210 seventh-grade students in seven elementary schools in Erzurum and 61 pre-service elementary mathematics teachers in their final year for Elementary School Mathematics Teaching.

The data for the research have been collected in two stages. In the first stage, seventh-grade students were asked to pose problems for the operation  $2\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = ?$ . In the second stage, the pre-service teachers were subjected to the Error Identification Test (EIT) comprised of four problems containing errors selected from those posed by the students. The problem sentences contain seven types of errors as specified by Işık and Kar (2012); they are: attributing natural number meaning to the result of the operation ( $H_1$ ), confusion about units ( $H_2$ ), attributing natural number meaning to the added fractional numbers ( $H_3$ ), in establishing part-whole relation ( $H_4$ ), expressing the added second fraction over the remainder of the whole ( $H_5$ ), failing in expressing the operation in the question root ( $H_6$ ) and failing in attributing meaning to integers in case of fractions including integers ( $H_7$ ). In the explanations given to the pre-service teachers in the process of the application of the EIT, it was stated that the students had been asked to pose problems relating to addition of fractions using only the operations provided to them. It was emphasized that the four problem sentences in the test were comprised of problems posed by the students, and the pre-service teachers were asked to compare the addition operation with the problem sentences, and to identify and explain any misconceptions in the problem sentences. The responses of the pre-service teachers have been subjected to content analysis and have been

---

categorized according to the aforementioned seven types of errors. Additionally, using content analysis, the various errors made by pre-service teachers in explaining the errors in each of the problems sentences, have also been presented.

According to the findings of the research, it may be stated that the errors in the problem sentences are focused on the following factors: failing to express fractions with appropriate units, the proclivities for natural numbers being generalized over to fractions, and failing in establishing part-whole relation. It has been determined that pre-service teachers experienced more difficulties in identifying errors related to units confusion and failing in establishing part-whole relation compared to the other types of errors. Furthermore, it was observed that pre-service teachers displayed these errors as well when providing explanations for other errors they identified. These results support the findings in research (Ball, 1990; Işık, 2011; Redmond & Utley, 2007; Rizvi, 2004; Simon, 1993; Toluk-Uçar, 2009; Zembat, 2007) which indicate that pre-service teachers experienced difficulties in problem posing related to fractional operations. Additionally, both the errors in the problems posed by the students and the errors in the explanations provided by the pre-service teachers display a parallelism to the results by researchers (Charalambous, Delaney, Hsu, & Mesa, 2010; Işık & Kar, 2012; Zembat, 2007) which indicate that problems with fractional operations cannot be assessed separate from the teaching of fractions, and that it has its roots in the concepts of fractions.

The data for the research has been obtained from four problems sentences. This may be considered as a limitation of the study. The scope of the study may be widened via the situations including different erroneous problems. Furthermore, other potential error types may be detected through the problems to be posed by the students for the addition operation in fractions. Analysis of errors observed in student answers relating to problem posing activities may be included in undergraduate level courses. And by recognizing the results of such types of studies, experimental studies may be conducted to eliminate the problems experienced.

**Key Words:** Pre-service elementary mathematics teachers, problem posing, addition of fractions

---

---

**Kaynaklar/References**

- Abu-Elwan, R. (2002). Effectiveness of problem posing strategies on prospective mathematics teachers' problem solving performance. *Journal of Science and Mathematics Education*, 25(1), 56-69.
- Akay, H. (2006). *The examination of the effect of mathematics instruction with problem posing approach on students' academic achievement, problem solving ability and creativity* (Unpublished doctoral dissertation). Gazi University, Ankara, Turkey.
- Ball, D. L. (1987). Research on teaching mathematics: Making subject matter part of the equation. In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching. Teachers' knowledge of subject matter as it relates to teaching practices* (Vol 2) (pp.1-48). Greenwich, England: JAI Press.
- Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, 90(4), 449-466.
- Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 401-421.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12, 117-151.
- Chick, H. L., & Baker, M. K. (2005). Investigating teacher's responses to student misconceptions. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.2, pp. 249-256). Melbourne, Victoria, Australia: PME.
- Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in pre-service teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 243-270.
- Darley, J. W. (2005). *Ninth grader's interpretations and use of contextualized models of fractions and algebraic properties: A classroom-based approach* (Unpublished doctoral dissertation). University of South Carolina, Columbia, SC.
- Dickerson, V. M. (1999). *The impact of problem posing instruction on the mathematical problem solving achievement of seventh graders* (Unpublished doctoral dissertation). Emory University, Atlanta, GA.
- Dooren, W. V., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2002). The impact of pre-service teachers' content knowledge on their evaluation of students' strategies for solving arithmetic and algebra words problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 319-351.
- English, L. D. (1998). Children's problem posing with informal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 83-106.
- English, L. D. (2003). Problem posing in elementary curriculum. In F. Lester & R. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem solving* (pp. 187-198). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
-

- Fennema, E., & Franke, M. (2006). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws, (Ed), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.147-164). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Gonzales, N. A. (1998). A blueprint for problem posing. *School Science and Mathematics*, 94(2), 78- 85.
- Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York, NY: Teachers College Press.
- Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational Studies in Mathematics* 12, 71-87.
- Herman, J., Ilucova, L., Kremsova, V., Pribyl, J., Ruppeldtova, J., Simpson, A., Stehlikova, N., Sulista, M., & Ulrychova, M. (2004). *Images of fractions as process and images of fractions in processes*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway.
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Işık, C. (2011). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kesirlerde çarpma ve bölmeye yönelik kurdukları problemlerin kavramsal analizi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 41, 231-243.
- Işık, C., & Kar, T. (2012). Matematik dersinde problem kurmaya yönelik öğretmen görüşleri üzerine nitel bir çalışma. *Milli Eğitim Dergisi*, 194, 199-215.
- Işık, C., & Kar, T. (2012). 7. Sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine kurdukları problemlerin analizi. *İlköğretim Online*, 11(4), 1021-1035. <http://ilkogretim-online.org.tr> adresinden alınmıştır.
- Işık, C., Işık, A., & Kar, T. (2011). Öğretmen adaylarının sözel ve görsel temsillere yönelik kurdukları problemlerin analizi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30, 39-49.
- Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, England: NFER-Nelson.
- Kinach, B. M. (2002). A cognitive strategy for developing pedagogical content knowledge in the secondary mathematics methods course: Toward a model of effective practice. *Teaching and Teacher Education*, 18, 51-71.
- Knott, L. (2010). Problem posing from the foundations of mathematics. *TMME*, 7, 413-432.
- Kulm, G. (2008). Teachers' mathematics knowledge. *School Science and Mathematics*, 108, 2-3.
- Leung, S. S. (1993). *The relation of mathematical knowledge and creative things to the mathematical problems posing of prospective elementary school teachers on tasks differing in numerical information content* (Unpublished doctoral dissertation). University of Pittsburg, Pittsburg, PA.
- Lin, C. Y. (2010). Web-based instruction on pre-service teachers' knowledge of fraction operations. *School Science and Mathematics*, 110(2), 59-70.

- Luo, F. (2009). Evaluating the effectiveness and insights of pre-service elementary teachers' abilities to construct word problems for fraction multiplication. *Journal of Mathematics Education*, 2(1), 83-98.
- Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(5), 422-441.
- Marks, R. (1990). Pedagogical content knowledge. From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, 41(3), 3-11.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], (2009). *İlköğretim matematik dersi 1-5. Sınıflar öğretim programı*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], (2009). *İlköğretim matematik dersi 6-8. Sınıflar öğretim programı ve kılavuzu*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of pre-service elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, 45(4), 1080-1110.
- Özmantar, M. F., & Bingölbali, E. (2009). Sınıf öğretmenleri ve matematiksel zorlukları. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 8(2), 401-427.
- Pantziara, M., & Philippou, G. (2011). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 61-83.
- Redmond, A., & Utley, J. (2007). *Prospective elementary teachers understanding of and attitudes towards the division of fractions*. Paper presented at the Research Council on Mathematics Learning Annual Convention, Oklahoma City, OK.
- Rizvi, N. F. (2004). Prospective teachers' ability to pose word problems. <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/Journal/rizvi.pdf> adresinden alınmıştır.
- Rizvi, N. F., & Lawson, M. J. (2007). Prospective teachers' knowledge: Concept of division. *International Education Journal*, 8(2), 377-392.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Siegler, R. S. (2003). Implications of cognitive science research for mathematics education. In J. Kilpatrick, W. B. Martin & D. E. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 219-233). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 233-254.
- Ticha, M., & Hošpesová, A. (2009). *Problem posing and development of pedagogical content knowledge in pre-service teacher training*. Paper presented at the meeting of CERME 6, Lyon, France.

- Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, 25(1), 166-175.
- Toluk-Uçar, Z. (2011). Öğretmen adaylarının pedagojik içerik bilgisi: Öğretimsel açıklamalar. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 2(2), 87-102.
- Ward, J., & Thomas, G. (2007). What do teachers know about fractions? In *Findings from the New Zealand Numeracy Development Projects* (pp. 128–138). Wellington, New Zealand: Learning Media.
- Zembat, İ. Ö. (2007). Working on the same problem-Concepts; with the usual subjects- pre-service elementary teachers. *İlköğretim Online*, 6(2), 305-312. [Online]: <http://ilkogretim-online.org.tr/vol6say2/v6s2m22.pdf> adresinden alınmıştır.
-