

# Dinamik Geometri Yazılımlarındaki Sürüklenme ve Çeşitlerinin Geometri Öğretimindeki Rolü

Nilüfer Y. Köse<sup>1</sup>

Candaş Uygan<sup>2</sup>

Deniz Özen<sup>3</sup>

## Özet

Geometrideki tümdengelimli ve tümevarımsal muhakeme arasındaki etkileşimli süreç içerisinde, dinamik geometri yazılımlarının en temel ve ayırt edici özelliği olan sürüklenme anahtar bir role sahiptir. Sürüklemenin bu anahtar rolünün ortaya çıkarılmasında ise eğitimciler ve araştırmacılara önemli görevler düşmektedir. Bu doğrultuda bu çalışmada dinamik geometri yazılımlarının sürüklenme özelliğinin farklı kullanım amaçları açıklanmış, sürüklenme çeşitleri tanıtılmış ve eğitimcilerin bu süreçteki rolü tartışılmıştır. Kuramsal olarak desenlenen bu çalışmanın Türkiye’deki literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Çalışmada öncelikle sürüklemenin kısa tarihçesine ve geometri öğretimindeki önemine değinilmiş, ardından sürüklenme çeşitlerinin “kurama geçiş” ve “algıya geçiş” sürecindeki rolü açıklanmıştır. Bu sürüklenme çeşitleri parabol konusuna ilişkin örnek bir problem durumu üzerinde tanıtılmış ve süreç içinde öğrencilerde gerçekleştirilecek muhakemeler tartışılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Dinamik geometri yazılımları, sürüklenme çeşitleri, geri-çıkarm, kurama geçiş, algıya geçiş

## 1. Giriş

### 1.1. Sürüklemenin Tarihçesi

Dinamik geometri yazılımlarının geometri öğretiminde yarattığı en önemli yeniliklerden birisi şekillerin sürüklenmesi olmakla birlikte Laborde (1994) hareket fikrinin geometride yeni olmadığını ve geçmişinin antik çağa kadar dayandığını belirtmektedir. Eski Yunan geometricilerinden bazıları eğrileri göstermek için hareketli araçlar tasarlamışlar, ancak o dönemde hareket fikrinin bilim yerine metafiziği içerdiği düşünüldüğünden, fikrin geometrik muhakemeyi engellediği öne sürülerek bu araçlar yasaklanmıştır (Bkouche, 1991, akt. Laborde, 1994; Güven & Karataş, 2005). 17. yüzyılda bu yasaklar kırılırken, geometri alanındaki çalışmalarda hareketli araçlar yaygın olarak kullanılmaya başlanmış, böylelikle matematikçiler geometrik kavramların ve ispatların geliştirilmesinde yeni olanaklar yakalamışlardır. Diğer taraftan geometri öğretiminde hareketi kullanma, ilk kez 1874 yılında, Öklid’in Elementler geometrisi yerine dönüşümler geometrisinin öğretim

<sup>1</sup> Yrd. Doç. Dr., Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, [nyavuzsoy@anadolu.edu.tr](mailto:nyavuzsoy@anadolu.edu.tr)

<sup>2</sup> Arş. Gör., Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, [cuygan@ogu.edu.tr](mailto:cuygan@ogu.edu.tr)

<sup>3</sup> Arş. Gör., Adnan Menderes Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, [deniz.ozen@adu.edu.tr](mailto:deniz.ozen@adu.edu.tr)

ortamlarına girebileceği fikri ile ortaya çıkmıştır. Bu fikri ortaya koyan Meray öteleme hareketi için paralellik kavramından, dönme hareketi için ise diklik kavramından giriş yapılabileceğini belirtmektedir (Laborde, 1994). Bundan 10 sene sonra, Rus matematikçi Kiselyov eş şekillerin özelliklerini tanımlarken “hareket” kavramını açık bir şekilde “İki geometrik şekilden birisi uzayda hareket ettirilerek diğer şekille birebir çakıştırılabiliyorsa bu iki şeklin eş oldukları söylenebilir” (Yaglom, 1962, s.10) biçiminde kullanmıştır. Bu ifade hem geometrik tanımlara farklı bir bakış açısı sunmakta hem de kavramların anlaşılmasında hareket ve sürüklemenin önemini ortaya koymaktadır. Geometride hareketi kullanma düşüncesi 20. yüzyıl içinde de gelişimini sürdürürken bir diğer matematikçi Yaglom (1962) “Geometrik Dönüşümler” isimli kitabında hareket fikrine doğrudan geometrinin tanımında “Geometri geometrik şekillerin, hareket ettirilmeleri sonucu değişmeyen özelliklerini inceleyen bir bilim dalıdır (s. 10)” biçiminde yer vermiştir.

Geometride hareket fikrinin yerleşmesi kuşkusuz bilişim teknolojilerine de yansımıştır. Bu durum 20. yüzyıl içerisindeki teknolojik gelişmelerin geometri alanına getirdiği olanaklar ile kendini göstermeye başlamıştır. Bu tarihsel süreçte ilk olarak televizyon teknolojisi ortaya çıkmış ve Syer, 1945 yılındaki çalışmasında geometrinin hareketli film gösterileri aracılığıyla öğretilebileceği düşüncesini ortaya koymuştur. Gelişimini sürdüren bilişim teknolojileri geometri alanına her geçen gün yeni araçlar ve yaklaşımlar sunarken, son yıllarda dinamik geometri yazılımları geometri öğreniminde ve öğretiminde önemli bir yere sahip olmuştur (Scher, 2000).

## 1.2. Dinamik Geometri Yazılımlarında Sürükleme

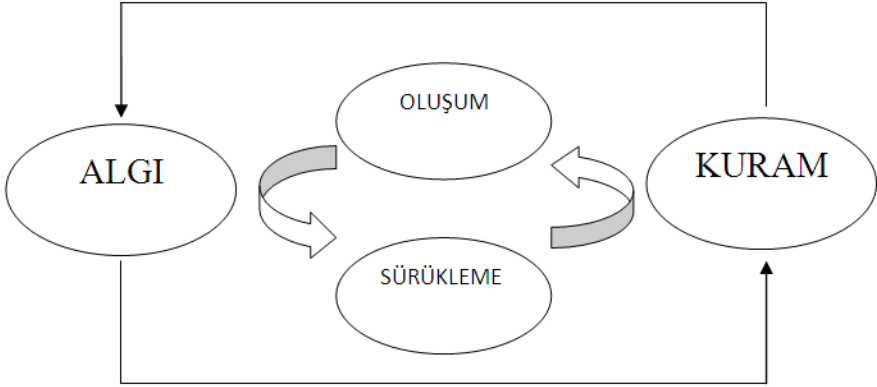
Geliştirilen ilk bilgisayarlarda kullanılan geometri yazılımları statik şekilleri çizmeye olanak sağlarken sürükleme özelliğine sahip değillerdi. Bu yazılımlarda nokta oluşturmak için koordinatları yazma; doğru parçası çizmek için nokta, yön ve uzaklık belirleme; çember oluşturmak için üç nokta seçme işlemleri yapılmaktaydı. Sürükleme işlemi mouse (fare) donanımının gelişimiyle birlikte geometri yazılımlarına girmiş, şekillerin dinamik bir yapıya kavuşmasını sağlamıştır. Böylelikle bu yazılımlar aracılığıyla geometrik yapıların karakterini ve değişmez özelliklerini betimleyen “oluşumlar” meydana getirilmeye başlanmıştır (Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 2002; Scher, 2000).

### 1.2.1. Sürüklemenin Geometri Öğrenimindeki Yeri

Laborde (1995), sürüklemenin “çizim” ve “oluşum” kavramlarının anlaşılmasında önemli bir yeri olduğunu belirtmektedir. Öğrenciler çizim ile geometrik bir yapının tek bir durumunu betimlerken, bu yapının sahip olduğu karakteristik özellikleri ve bu özelliklerin farklı şekillerle olan ilişkilerini ayırt etmekte sıkıntı yaşamaktadırlar. Oluşumlar ise betimlenen geometrik yapının farklı koşullardaki temsillerini sunarak bu yapının değişen - değişmeyen özelliklerinin ve belli parçaları arasındaki ilişkilerin fark edilmesine olanak vermektedir (Arzarello vd., 2002; Battista, 2007; Olivero, 2001). Diğer bir deyişle çizim ile oluşumu birbirinden ayıran en önemli durum, oluşumun belirli özelliklere bağlı olarak oluşturulmuş geometrik bir şekil olmasıdır. Çizim ise herhangi bir geometrik şekli temsil

edebilir (Broutin Tapan, 2010). Çizim ve oluşum arasındaki farkın belirlenmesinde ise sürükleme esastır. Sürükleme altında geometrik yapının bozulup bozulmama durumu öğrenciler tarafından araştırılırken aynı zamanda onların geometrik yapıları, kavramları ve ilişkileri de anlamaları sağlanabilir. Böylelikle öğrenciler geometrik şekil üzerinde algısal düzeydeki düşüncelerini kuramsal düzeye doğru geliştirebilmektedirler.

Algı ve kuram arasındaki ilişki ve geçiş, özellikle geometride olmak üzere, matematiğin birçok konusunun anlaşılmasında önemlidir. Algısal düşünme düzeyi öğrencilerin karşılaştıkları şeklin fiziksel özelliklerine yönelik duyu organları üzerinden gerçekleştirdikleri düşüncelerini ifade ederken, kuramsal düşünme düzeyi belli koşullar içinde geometrik şeklin özelliklerine yönelik varsayım üretme, ispat yapma ve varsayımın doğruluğunu değerlendirme gibi etkinlikleri içermektedir (Arzarello, 2001). Laborde (1999), düzlemsel geometride yapılan statik çizimlerin bir yandan kuramsal, bir yandan da algısal düşünme düzeylerine yönelik etkinlikleri ortaya çıkaran şekilsel- uzamsal özellikleri sunması nedeniyle geometri öğrenim sürecini daha karmaşıktırdığını ve belirsizleştirdiğini belirtir. Buna karşın dinamik geometri yazılımları ile gerçekleştirilen oluşumlar üzerindeki sürükleme işlemi algısal boyuttan kuramsal boyuta geçişi sağlayan hızlandırıcı ve etkinleştirici bir araçtır. Bu araç, ayrıca, öğrencilerin araştırma, varsayım oluşturma, deney yapma ve matematiksel genellemelere ulaşma süreçlerini de desteklemektedir (Arzarello, 2001; Olivero, 1999).



**Şekil 1.** Algısal ve kuramsal düşünmede sürüklemenin yeri (Arzarello vd., 2002).

Arzarello ve arkadaşları (2002) algısal ve kuramsal boyutta düşünceler arasındaki geçiş süreçlerine yönelik kurama geçiş (ascending) ve algıya geçiş (descending) olmak üzere iki süreç tanımlamışlardır. *Kurama geçiş*, bir durumu serbestçe keşfetmek, kuralları ve değişkenleri araştırmak amacıyla şekiller üzerindeki algısal düşünmeden kuramsal düşünmeye geçiş sürecini ifade etmektedir. *Algıya geçiş* (kuramdan algıya geçiş) süreci ise; ortaya konan varsayımları doğrulamak ya da çürütmek amacıyla kuramsal düşünme

düzeyinden şekiller üzerindeki algısal düşünme düzeyine geçişi içermektedir. Bu her iki geçiş süreci bireyin geometri dünyasında çıktığı keşif yolculuğunda deneme-yanılma, varsayım üretme, varsayımın doğruluğunu test etme ve varsayımı genellenme yoluyla kendi matematiksel bilgisini inşa etmesine olanak verir. Bu keşif süreci içinde ise *geri-çıkarm* (*abduction*) muhakemesinin kilit bir rolü vardır.

Geri çıkarm, “hangi kural buna sebep olabilir” üzerine yapılan düşünme sürecini ve tahminleri içermektedir (Pierce, 1960; akt. Olivero, 1999). Pierce geri-çıkarmın, tümevarım ve tündengelimi de kapsayan üç temel muhakemeden birisi olduğunu ifade ederken bu üç süreci daha iyi açıklamak için şu örneği vermiştir: “Belli bir çantanın beyaz bezelye ile dolu olduğu bilinsin. Şu ifadeler üzerinde düşünelim: A) bu bezelyeler beyaz; B) çantadaki bezelyeler beyaz; C) bu bezelyeler bu çantadan.” Bir tündengelim, bilinen B ve C ifadelerinden yola çıkarak A sonucuna ulaşan bir mantık yürütmedir. Bir tümevarımda ise gözlenen A ve C ifadeleri üzerinden B çıkarmı yapılır. Bir geri çıkarmda ise A ve B ifadeleri üzerinden C bilgisine ulaşılır. Geri çıkarm önce gerçeklere bakar, bilgi üretir ancak ürettiği bilginin doğruluğu kesin değildir. Bu yönüyle geri çıkarm muhakemesinin “olasılığa dayalı” bir doğası vardır (Olivero, 1999, s. 4).

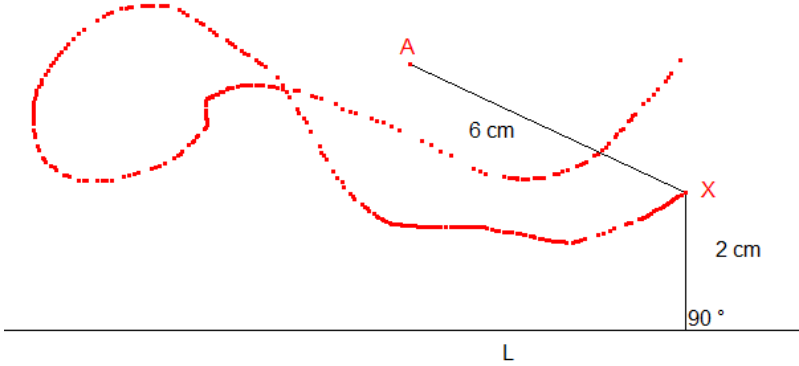
Kurama geçiş ve algıya geçiş süreçleri içinde gerçekleşen geri çıkarm, öğrencilerin gözlemlerle ulaştıkları veriler üzerinde matematiksel sezgilerini sürekli kullanmalarını ve ürettikleri bilginin geçerliliğini görmek için yeni araştırmalar yapmalarını sağlamaktadır. Kurama geçiş, algıya geçiş ve bu süreçler içinde geri çıkarmın gerçekleşmesinde sürüklemenin önemli bir yeri olmakla birlikte, sürüklemenin farklı türleri, süreç içinde farklı görevler sergilemektedir.

### 1.2.2. Sürüklenme Çeşitleri

Araştırmacılar (Olivero, 1999; Arzarello, 2001; Arzarello vd, 2002) sürüklemeyi algısal ve kuramsal düşünme süreçleri üzerindeki rollerine göre 7 sınıfa ayırmıştır. Bunlar *rastgele sürüklenme* (*wandering dragging*), *amaçlı sürüklenme* (*guided dragging*), *kısıtlı sürüklenme* (*bound dragging*), *gizli geometrik yer sürüklenmesi* (*dummy locus dragging*), *geometrik yeri işaretleyerek sürüklenme* (*line dragging*), *bağımlı sürüklenme* (*linked dragging*) ve *sürüklenme testi* (*dragging test*) olarak ele alınmıştır. Arzarello ve arkadaşları (2002) bu sürüklenme çeşitlerinin öğrenciler tarafından keşfetme, varsayımda bulunma, varsayımı doğrulama ve savunma gibi farklı amaçlarla kullanıldığını vurgulamaktadırlar. Örneğin rastgele ve amaçlı sürüklenme daha çok keşif aşamasında kullanılırken, gizli geometrik yer sürüklenmesi bir varsayım oluşturulmasında, sürüklenme testi ise varsayımın doğruluğunun araştırılmasında kullanılabilir. Bu bölümde, sürüklenme çeşitleri örnek bir problem durumu üzerinde ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

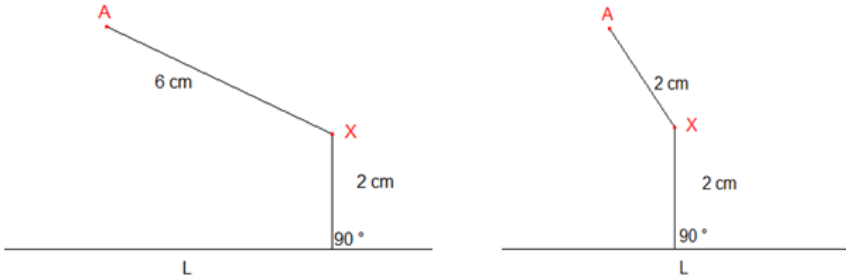
**Problem Durumu:** Bir doğruya ve bu doğru üzerinde olmayan bir noktaya eşit uzaklıkta olan noktalar kümesini araştırınız.

“Rastgele” (wandering) sürüklenme, oluşum üzerindeki temel bir noktayı, değişik ve ilginç görünümde şekiller ortaya çıkarmak amacıyla ekran üzerinde rastgele/serbestçe sürüklemeyi içermektedir (Arzarello, 2001; Arzarello vd., 2002; Olivero, 1999, 2001). Bu sürüklenme çeşidi, başlangıç sürüklenme stratejisidir (Leung, 2008).



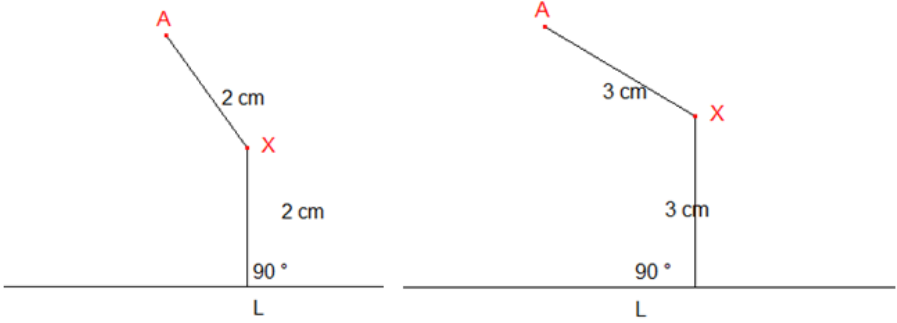
Şekil 2. Rastgele sürüklenme örneği.

“Amaçlı” (guided) sürüklenme, oluşum üzerindeki temel noktaların, özel bir şekil oluşturmak amacıyla sürüklenmesi işlemidir (Arzarello, 2001; Arzarello vd., 2002; Olivero, 1999, 2001). Şekil 3’te A noktasına ve L doğrusuna eşit uzaklıkta olması için X noktasının “amaçlı” sürüklendiği görülmektedir.



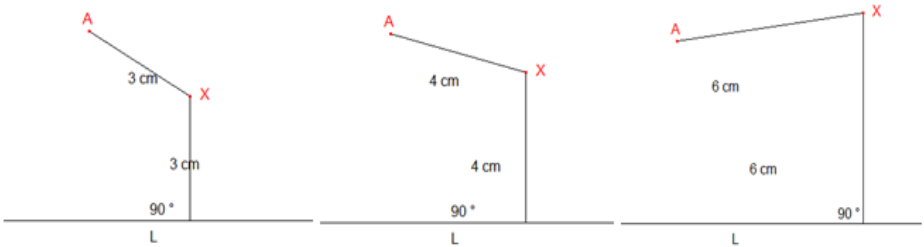
Şekil 3. Amaçlı sürüklenme örneği.

“Kısıtlı” (bound) sürükleme, oluşum üzerindeki bir noktayı, üzerindeki şeklin keşfedilen özelliğini bozmayacak biçimde sürükleme işlemidir. Şeklin keşfedilen özelliğini kaybetmeme amacı, hareketi sınırlandırdığı için nokta “yarı sürüklenbilir (semi-draggable)” olarak ifade edilmektedir (Arzarello, 2001; Arzarello vd., 2002; Olivero, 1999, 2001). Şekil 4’te A noktasına ve L doğrusuna olan uzaklıklarının eşitliğini koruyacak biçimde X noktasının “kısıtlı” sürüklendiği görülmektedir.



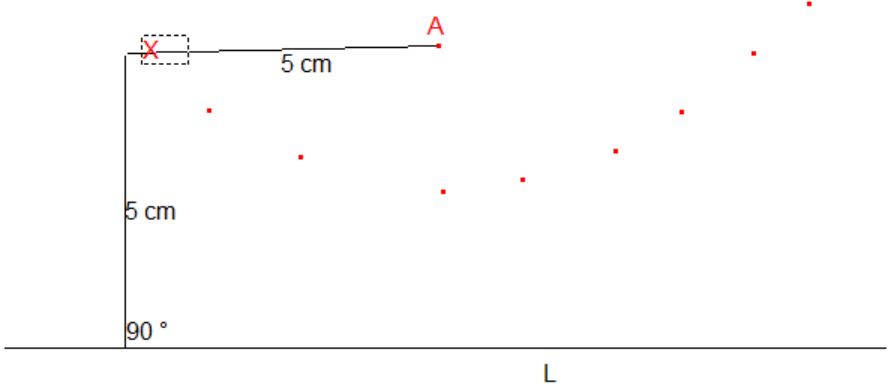
Şekil 4. Kısıtlı sürükleme örneği.

“Gizli geometrik yer” (dummy locus) sürüklemesi, şekil üzerindeki temel bir noktayı, şeklin keşfedilen özelliğini bozmayan bir yol üzerinde sürükleme işlemidir (Arzarello, 2001; Arzarello vd., 2002). Ancak bu yolun belirttiği geometrik yer, kullanıcı tarafından henüz fark edilmemiştir. Arzarello’dan farklı olarak, Olivero (1999, 2001) da kendi sınıflandırmasında aynı sürükleme çeşidini, “hidden path (saklı yol)” ve “soft locus” sürükleme olarak isimlendirmiştir. Gizli geometrik yer sürüklemesi, algısal düşünme düzeyinden kuramsal düşünme düzeyine doğru geçişi kolaylaştırmaktadır. Bu aşamada öğrenciler üzerinde çalıştıkları geometrik yapıyı zihinlerinde görselleştirmeye başlayarak yapının özelliklerine yönelik tahminler üretebilirler. Örneğin Şekil 5’te A noktasına ve L doğrusuna eşit uzaklıkta belirlenen X noktasının sürüklenmesi, görünmez bir yol üzerinde gerçekleşmektedir.



Şekil 5. Gizli geometrik yer sürüklemesi örneği.

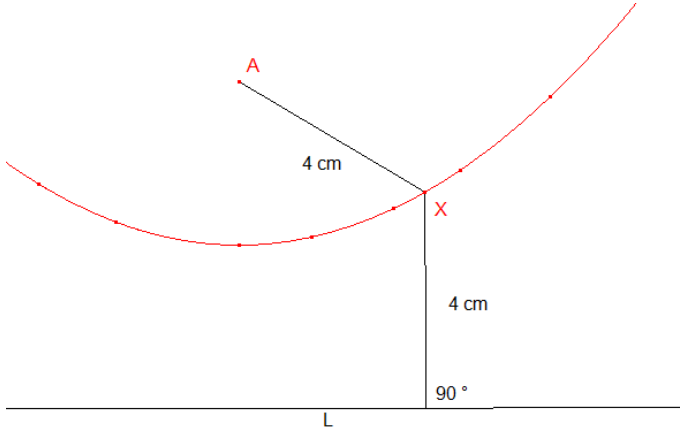
“Geometrik yeri işaretleyerek” (line) sürüklenme, gizli geometrik yer sürüklenmesi sırasında görünmeyen geometrik yerin noktalarla işaretlenerek görünür kılınması işlemidir (Arzarello, 2001; Arzarello vd., 2002; Olivero, 1999). Şekil 6’da bu sürüklenme çeşidine örnek verilmiştir.



**Şekil 6.** Geometrik yeri işaretleyerek sürüklenme örneği.

Verilen problem durumu üzerinde gerçekleştirilen gizli geometrik yer sürüklenmesi ve geometrik yeri işaretleyerek sürüklenme sırasında öğrenciler kurama geçiş süreci içinde geri çıkarım yapabilirler. Bu süreçte, problem durumundaki ön koşullar (X noktasının A noktasına ve L doğrusuna uzaklıklarının eşit olması) ve gözlemlerden elde edilen olası gerçekler (işaretlenen noktaların parabol üzerinde olabileceği) doğrultusunda geri çıkarımlar gerçekleştirilebilir. Bu verilerden yola çıkılarak yapılan bir geri çıkarımda, şu bilgiye ulaşılabilir: “Bir doğruya ve bu doğru üzerinde olmayan bir noktaya eşit uzaklıktaki noktalar kümesi bir parabol belirtir.” Bu bilginin doğruluğu henüz kesin değildir. Çünkü bilgiye, geometrik yeri işaretleyerek sürüklenme sırasında belirlenen noktaların bir parabol üzerinde olabileceği tahmini üzerinden ulaşılmıştır. Bu sebepten ulaşılan bilgi bir varsayım özelliği göstermektedir. Bu varsayımı güçlendirmek için “bağımlı” sürüklenmeden yararlanılır.

Bağımlı (linked) sürüklenme, bir noktanın belli bir şekil üzerinde sürüklenmesi işlemidir (Arzarello, 2001; Arzarello vd., 2002; Olivero, 1999). Bir anlamda sürüklenme, Şekil 7’de görüldüğü gibi, bir şekle bağlı olarak gerçekleştirilmektedir.



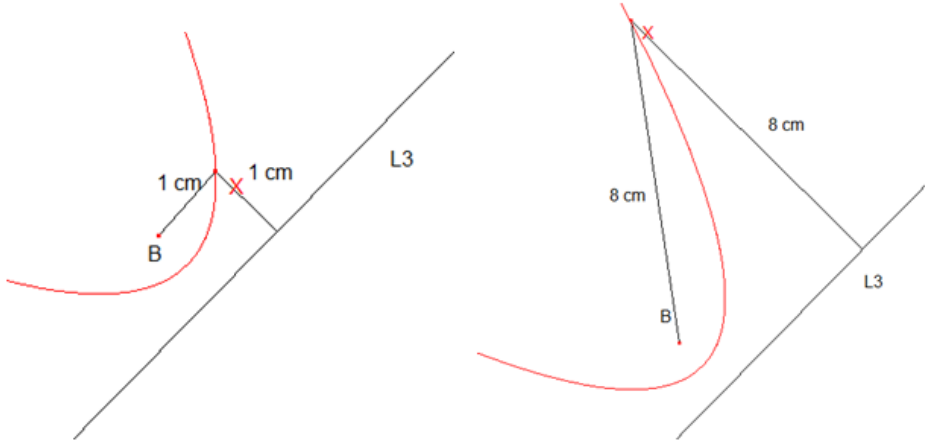
**Şekil 7.** Bağımlı sürüklenme örneği.

Şekil 7’de üzerinde bağımlı sürüklenme yapılan parabol eğrisinin, öğrenciler tarafından doğrudan oluşturulmasına yönelik bir araç yazılımlarda bulunmayabilir. Böylesi bir durumda, öğretmen tarafından oluşturulan bir parabol öğrencilere sunulabilir ve onların bağımlı sürüklemeler yapmaları sağlanabilir.

Bağımlı sürüklenme geri çıkarım ile ulaşılan varsayımların doğruluğunu desteklemede ya da reddetmede önemli bir yere sahiptir. Bu aşamada kurama geçiş süreci devam ederken, son olarak, ortaya konan matematiksel sonuçların farklı durumlar için geçerli olup olmadığını incelemek amacıyla sürüklenme testi kullanılmaktadır.

Şekil 8’de görülmekte olan “sürüklenme testi” (dragging test), önceki aşamalarda ulaşılan matematiksel sonuçlar üzerinden yeni oluşumların yapılması ve bu oluşumların sürüklenerek sonuçların test edilmesi işlemidir (Arzarello, 2001; Arzarello vd., 2002; Olivero, 1999, 2001). Örnek olarak, bir noktaya ve doğruya eşit uzaklıktaki noktalar kümesinin parabol olabileceği varsayımına ulaşan öğrenciler, verilen farklı paraboller üzerinde aldığı noktaları sürükleyerek varsayımlarını test ederler. Bu aşamada, kuramsal düşünme boyutunda elde edilenlerin değerlendirilmesi amacıyla tekrar algısal düşünme boyutuna geçiş yapılmaktadır (algıya geçiş süreci). Sürüklenme testi yardımıyla, farklı oluşumlar üzerinde tekrar algısal boyutta incelemeler yapan öğrenciler, matematiksel genellemelere ulaşabilir ya da daha önce ulaştığı sonuçların farklı durumlar için geçerli olmadığını görebilir.



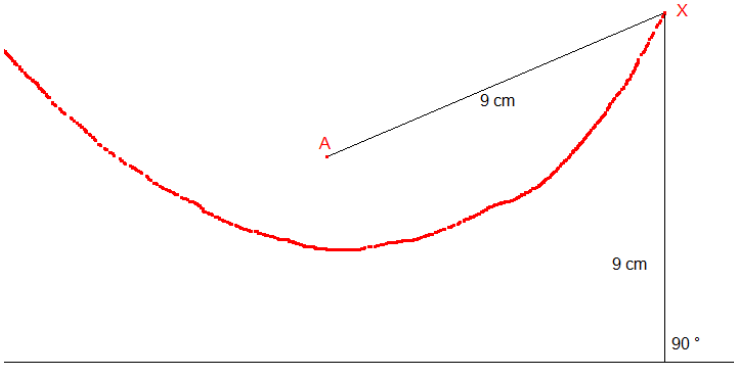


**Şekil 8.** Sürüklenme testi örneği.

Çalışmanın bu bölümüne kadar, araştırmacıların (Arzarello, 2001; Arzarello vd., 2002; Olivero, 1999, 2001) dinamik geometri yazılımlarının (DGY) sürüklenme özelliğine yönelik sundukları 7 sürüklenme çeşidi açıklanmıştır. Baccaglioni-Frank (2009) ise sürüklenme çeşitlerini bu araştırmacıların sınıflandırmasını da göz önünde bulundurarak sürüklenme şemaları olarak adlandırmış ve temelde 4 ana başlıkta ele almıştır: “Rastgele” (wandering) sürüklenme, “özellikleri koruyarak” (maintaining) sürüklenme, “iz bırakarak” sürüklenme (dragging with trace activated) ve “sürüklenme testi” (dragging test).

Baccaglioni-Frank (2009)’in, rastgele sürüklenme ve sürüklenme testi için yaptığı tanımlar, 7 sürüklenme çeşidi tanımlayan araştırmacıların bu iki sürüklenme çeşidi için yaptıkları tanımlarla örtüşmektedir. Bununla birlikte, özellikleri koruyarak sürüklenme, bir geometrik şeklin keşfedilen bir özelliğini kaybetmeyecek biçimde, üzerindeki temel bir noktayı sürüklenme şeklinde tanımlanmıştır (Baccaglioni-Frank, 2009). Bu sürüklenme çeşidi diğer araştırmacıların sınıflandırmasındaki kısıtlı sürüklemeyi ve gizli geometrik yer sürüklemesini kapsayan daha geniş bir içeriğe sahiptir. Bu nedenle, gizli geometrik yer sürüklemesinde ortaya çıkan geri çıkarım süreci, Baccaglioni-Frank’ın sınıflandırmasında, özellikleri koruyarak sürüklenme sırasında gerçekleşebilmektedir.

İz bırakarak sürüklenme ise, belli bir noktayı arkasında iz bırakacak şekilde sürüklenme işlemidir. Bu sayede üzerinde sürüklenme yapılan geometrik yer çizilmiş olur. Bu sürüklenme çeşidi de Arzarello ve diğerleri (2002) ile Olivero (1999)’nun sınıflandırmasındaki geometrik yeri işaretleyerek sürüklemenin işlevini üstlenmektedir (Şekil 9).



**Şekil 9.** İz bırakarak sürüklenme örneği.

İz bırakma (tracing) aracı, çoğu zaman şekillerin düzgün biçimlerde ortaya konmasına olanak vermeyebilir. Buna karşılık bu araç yardımıyla yapılan sürüklenme sürecinde öğrenciler adım adım araştırdıkları geometrik yapıyı zihinlerinde görselleştirebilirler ve bu yapıya ilişkin varsayımlar oluşturabilirler. Geometrik yeri işaretleyerek sürüklemeye benzer işlemler geometrik yerin kullanıcı tarafından tek tek noktalarla işaretlenmesi şeklinde gerçekleştirilirken, “iz bırakarak” sürüklemeye bu işlemler daha hızlı bir şekilde gerçekleştirilebilir. Bu sürüklenme çeşidi, geometrik yeri işaretleyerek sürüklemeye olduğu gibi kuramsal düşünme ve geri çıkarım sürecini desteklemektedir.

## 2. Sonuç ve Tartışma

Öklid geometrisi ile dinamik bir geometri sistemini içeren yapılar iki farklı dünya olarak ele alınmakta ve bu iki dünya arasındaki ilişkiler pek çok araştırmacı tarafından “deneyimsel-teorik bağlantı problemi” olarak ifade edilmektedir (Baccaglioni-Frank& Mariotti, 2010; Lopez-Real& Leung, 2006). Tümdengelimli muhakemeyi içeren, hiyerarşik olarak düzenlenen, formal bir aksiyomatik yapı ve mantıksal bir bağlılık içerisindeki Öklid geometrisi ile sürüklenme gibi fiziksel bir deneyim sunan dinamik bir ortam bir araya geldiğinde bu iki dünya arasındaki geçiş önemlidir. Bu geçişteki köprü ise dinamik geometri yazılımları ve bu yazılımların en temel özelliği olan sürüklemedir (Baccaglioni-Frank& Mariotti, 2010). Bu tür ortamlar öğretmenlere, öğrencilerinin anlamalarını desteklemek ve geliştirmek için yeni anlayışlar ve yöntemler sunar. Ancak sürüklenme ve sürüklemenin uygun kullanımı ne öğretmenler ne de öğrenciler için açık ve anlaşılır değildir. Nitekim Arzarello ve diğerleri (2002) Cabri ile ilk tanışan farklı düzeylerdeki pek çok öğrencinin sürüklemeyi başlangıç aşamasında çok fazla kullanmadığını belirtmektedir. Benzer şekilde Rolet (1996) de bazı öğrencilerin oluşumlarını bozmaktan korktukları için daha bölgesel sürüklemelere bağlı kalmayı tercih ettiklerini ifade etmiştir (Restrepo,2008). Öğrenciler gibi öğretmenler ve öğretmen adayları için de sürüklemenin uygun kullanımı problemlili olabilmektedir. Örneğin Tapan (2006) dinamik geometri yazılımları kullanırken

ortaöğretim öğretmen adaylarının öğrencilerine sundukları görevleri kağıt-kalem ortamındaki etkinlikleri temel alarak oluşturduklarını ve sürüklemeye oldukça sınırlı yer verdiklerini saptamıştır. Tapan çalışmasında sürükleme kullanımı “doğrulamak ya da çürütmek için sürükleme (déplacement pour valider ou invalider)”, “varsayım oluşturmak için sürükleme (déplacer pour conjecturer)” ve “açıklamak için sürükleme (déplacer pour constater)” olmak üzere üç şekilde tanımlamıştır. Doğrulamak ya da çürütmek için sürüklemeye öğrenenin, gerçekleştirdiği oluşumun geçerliliğinin araştırılması amaçlanırken, varsayım oluşturmak için sürüklemeye öğrenene sunulan bir problemde istenilen durumun tanımlanması için araştırma yapmak amaçlanır. Açıklamak için sürüklemeye ise sabit olan geometrik bir özelliğin açıklanmasına odaklanılır (Tapan, 2006). Tapan’ın bu sınıflandırılmasının yanı sıra bu çalışma kapsamında da detaylı olarak açıklanan ve literatürde sıklıkla karşılaşılan farklı sürükleme çeşitleri de bulunmaktadır (Olivero, 1999; Arzarello, 2001, Arzarello vd., 2002; Baccaglini-Frank, 2009). Bu sürükleme çeşitleri parabol konusu ile ilgili örnek bir problem durumu üzerinde incelenmiştir. Daha bütüncül bir bakış açısıyla bakmak amacıyla farklı sürükleme sınıflandırmaları ve bu sürüklemelerin amaç ve işlevleri Tablo 1’de sunulmuştur.

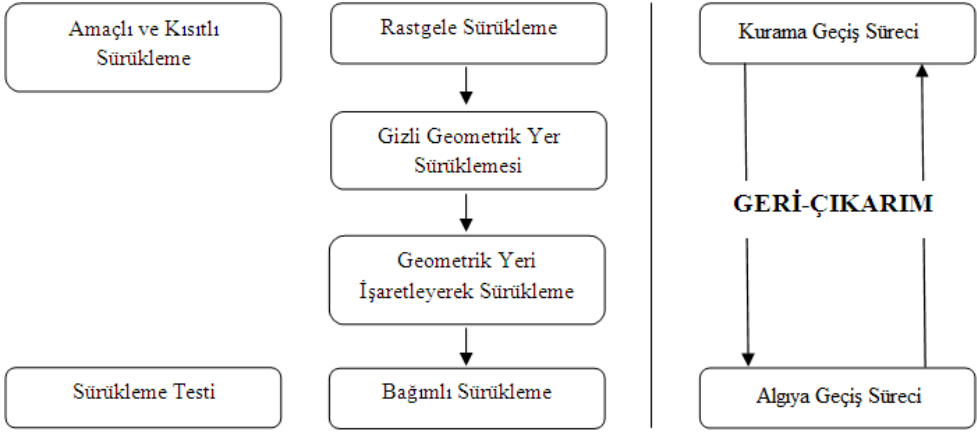
Tablo 1’de görüldüğü gibi rastgele, amaçlı ve kısıtlı sürükleme verilen bir durum ile ilgili inceleme ve keşif yapmak için kullanılmaktadır. Gizli geometrik yer sürüklemesi, görünmeyen belli bir geometrik yer üzerinde gerçekleşen bir sürükleme çeşididir. Bu süreç içinde, sezgi ve ön bilgilerin kullanımı ile keşfedilen yeni bilgiler üzerinden geri çıkarım yapılabilir (Arzarello vd., 2002). Geometrik yeri işaretleyerek sürükleme ve iz bırakarak sürükleme ise, gizli geometrik yer sürüklemesinde görünmez olan geometrik yeri görünür kılmaktadır. Bu sayede yapılan tahmin ve çıkarımlar tekrar gözden geçirilirken kuramsal düşünme sürecinin gelişmesine katkı sağlanabilmektedir.

Bağımlı sürükleme, öğrenene gizli geometrik yer sürüklemesi ve geometrik yeri işaretleyerek sürükleme ile oluşturduğu düşüncelerini kontrol etme olanağı vermektedir. Bu sürükleme aracılığıyla geri çıkarım üzerinden ortaya konan bilgilerin doğru olma olasılıkları da güçlendirilebilmektedir. Sürükleme testi ise, geri çıkarım ile ulaşılan bilginin doğruluğunun değerlendirilmesidir. Bu sebepten kuramsal düşünme boyutundan algısal düşünme boyutuna geçiş olan algıya geçiş sürecinin gerçekleşmesini sağlar. Üzerinde çalışılan duruma yönelik yeni oluşumlar yapılarak bu oluşumlar üzerindeki noktalar, bilginin doğru olup olmadığını görmek amacıyla sürüklenir. Daha sonra yapılan gözlemler üzerinden tekrar kuramsal düşünceler gerçekleştirilerek bilgi ya doğrulanır ya da değiştirilir (Olivero, 1999).

**Tablo 1.** Sürüklenme çeşitleri ve özellikleri

Sürüklenme Amacı	Sürüklenme İşlemi	Arzarello (2001), Arzarello vd., (2002), Olivero (1999)	Baccaglioni-Frank (2009)
Farklı şekiller keşfetmek.	Bir şekil üzerindeki temel bir noktayı serbestçe sürüklenme	Rastgele Sürüklenme	Rastgele Sürüklenme
Belli özelliğe bir şekil oluşturmak.	Şekil üzerindeki temel bir noktayı o şekle belli bir özellik verecek şekilde	Amaçlı Sürüklenme	-
Keşfedilen özelliği içeren farklı şekiller oluşturmak.	Keşfedilen özelliği bozmadan şekil üzerindeki temel bir noktayı sürüklenme	Kısıtlı Sürüklenme	Özellikleri Koruyarak Sürüklenme
	Keşfedilen özelliği bozmadan şekil üzerindeki temel bir noktayı görünmeyen bir yol üzerinde	Gizli Geometrik Yer Sürüklemesi	
Bir önceki aşamada üzerinde sürüklemeler yapılan geometrik yeri görünür yapmak.	Şeklin özelliğini bozmadan yapılan sürüklemelerde izlenen yolu nokta koyarak ya da iz bırakarak görünür yapma	Geometrik Yeri İşaretleyerek Sürüklenme	İz Bırakarak Sürüklenme
Geometrik yere ilişkin yapılan varsayımı desteklemek.	Şeklin temel bir noktasını görünür bir şekil ya da geometrik yer üzerinde sürüklenme	Bağlı Sürüklenme	-
Ulaşılan bilginin geçerliliğini farklı oluşumlar üzerinde test etmek.	Keşfedilen özellik ve geometrik yerden yola çıkarak farklı örnek durumlar üzerinde sürüklemeleri tekrarlama	Sürüklenme Testi	Sürüklenme Testi

Yapılan sürüklemeler sırasında gerçekleşen kurama geçiş, algıya geçiş ve geri çıkarım süreçlerini Şekil 10'da sunulmuştur.



**Şekil 10.** Sürüklemeler sırasında gerçekleşen kurama geçiş ve algıya geçiş süreci (Arzarello vd., 2002; Olivero, 1999).

Bir geometri laboratuvarı olarak ele alabileceğimiz dinamik geometri yazılımları öğrencilere deney yapma ve keşfetme yoluyla matematiksel bilgiyi yeniden inşa etme olanağı sunmaktadır. Bu süreç içerisindeki rastgele, amaçlı, kısıtlı ve gizli geometrik yer sürüklemeleri algısal düşünmeden kuramsal düşünme boyutuna geçişi (kurama geçiş) sağlamaktadır. Bunun yanında geometrik yeri işaretleyerek sürükleme ile bağımlı sürüklemelerde öğrenciler kuramsal boyutta varsayımlar ortaya koyarken, sürükleme testi kuramsal düşünmeden algısal düşünme boyutuna geçişe (algıya geçiş) olanak vermektedir. Bununla birlikte, Baccaglioni-Frank (2010, 2011) de çalışmalarında sürükleme çeşitlerinden özellikleri koruyarak sürüklemeyi ele almış ve bunun kurama geçiş ve varsayım oluşturma sürecine katkı sağladığını vurgulamıştır.

Tüm bu muhakeme süreçleri içerisinde basit bir geometrik çizimi/deseni bir geometrik şekilden ayırabilmeye yardımcı olma ile başlayan sürükleme özelliği aynı zamanda öğrencilerin geometrik yapıların oluşumu ile “milieu”<sup>38</sup> arasında sürekli bir etkileşim kazanmasına ve bu etkileşim ile kendi matematiksel bilgisini de geliştirmesine izin verir (Restrepo, 2008). Bu etkileşim içerisinde farklı sürükleme çeşitlerinin kullanımı bir problemin çözümü için farklı yaklaşımlar ve sonuçlar sunar. Dolayısıyla “milieu” bağlamında bu durum sürükleme çeşitlerini öğretimin odağı haline getirirken, aynı zamanda sürüklemeyi sınıf kültürünün bir parçası ve tüm öğrenciler için erişilebilir bir araç haline getirmektedir (Arzarello vd., 2002). Burada ortaya çıkan en önemli soru ise kuşkusuz öğretmenin rolüdür.

Öğretmenlerin sınıfta yazılımı nasıl kullanacakları, öğrencileri için hangi sürükleme çeşitlerini hangi aşamada yönlendirecekleri ve onların matematiksel kavramları kazanmalarına nasıl yardımcı olacakları oldukça önemlidir. Diğer bir deyişle sürüklemenin bir geometri öğrenim aracına dönüştürülmesinde ve öğrenciler tarafından etkili bir şekilde kullanılmasında öğretmenlere önemli görevler düşmektedir. Kuşkusuz bu durum öğretmenlerin rolünü daha da zorlaştırmakta ve karmaşıklştırmaktadır. Öğrenci, ortam ve etkinliklerin yapısına göre dinamik geometri yazılımlarının ve bu yazılımlardaki sürükleme çeşitlerinin kullanımı farklılaşsa da temelde öğretmenlerin bu rolünü bir nebze de kolaylaştırmak amacıyla takip eden bölümde bazı önerilerde bulunulmuştur.

### 3. Öneriler

İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı incelendiğinde, öğretmenlerden öğrencilerin problem çözme, akıl yürütme, iletişim kurma ve ilişkilendirme gibi önemli becerileri geliştirmesi beklenmektedir. Bu araştırmada vurgulanan dinamik geometri yazılımının sürükleme özelliğinin ve farklı sürükleme çeşitlerinin kullanımının geometride keşif, akıl yürütme, varsayım oluşturma ve genellemelere ulaşmada sağladığı katkılar, öğretmenlerin öğrencilerinin bu becerilerini geliştirmelerine ve matematiksel bilgi inşalarına yardımcı olacaktır. Öğrencilerin geometrik yapıları kurama geçiş–algıya geçiş süreci içerisinde keşfetmesini sağlamak amacıyla, öğretmenlerin dinamik geometri yazılımlarındaki sürükleme aracını öğretim sürecine etkili bir şekilde entegre edebilmelidir. Bu noktada öğretmenlerin, geometri öğretiminde dinamik geometri yazılımlarını kullanmalarına yönelik teknolojik pedagojik alan bilgilerinin geliştirilmesi önemli bir konudur.

Yapılan bu çalışmada sürükleme çeşitlerinin ayrıntılı bir şekilde açıklanması için geometrik yer keşfi ile ilgili örnek bir problem durumu ele alınmıştır. Sürükleme türlerinin özellikle bu tür problemlerde etkili bir şekilde kullanılabileceği ve bu sayede öğrencilerin muhakeme becerilerinin desteklenebileceği düşünülmektedir. Öğretmenler geometrik yer ile ilgili benzer problemleri dinamik geometri yazılımlarında öğrencilerine sunarak onların bu yapıları sürükleme çeşitleri aracılığıyla keşfetmelerini ve zihinlerinde anlamlandırmalarını sağlayabilirler.

Bir öğrencinin algı ve kuram arasındaki geçişleri yapabilmesi geometrideki birçok konuyu anlamasına temel oluşturmaktadır. Özellikle geometrik oluşumlarda yazılımların sürükleme özelliği sayesinde öğretmenler öğrencilerini farklı sürükleme çeşitleri kullanmaya teşvik etmelidirler. Bu yolla onların yeni ve farklı bakış açıları kazanmaları sağlanarak, geometrik ilişkileri kurmaları kolaylaştırılabilir. Bunların sağlanabilmesi için öğretmenlere hem sınıf içinde yeterli düzeyde teknolojik alt yapı, hem de matematik yazılımlarındaki yenilikleri takip edebilmeleri için hizmet içi eğitimler sağlanmalıdır.

Literatür incelendiğinde geometri öğrenim sürecinde sürüklemenin kullanımı ve çeşitleri konusunda öğretmen rolünün ne olması gerektiğine yönelik araştırmaların eksik kaldığı görülmektedir. Ayrıca literatürde sürükleme çeşitlerine yönelik yapılan sınıflandırmaların tamamının 2 boyutlu dinamik geometri yazılımlarındaki sürüklemeleri

---

kapsaması da dikkat çekicidir. Bu bağlamda araştırmacılara Cabri 3D gibi yazılımlardaki sürüklenme çeşitlerinin sınıflandırılmasına ve bu süreçteki öğretmen rolüne odaklanmaları önerilebilir.

\* Öğrencinin sahip olduğu bilgilerin, öğrenme ortamında var olan materyal ve bireylerin (akran, öğretmen, vs.) bir bileşkesi konumundaki kelimenin sözlük anlamıyla Fransızca da çevre, ortam gibi anlamlara gelmektedir. Fransızca kökenli olan bu terimi tam olarak ifade eden Türkçe bir kelime bulunmamaktadır. (bkz. Arslan, Baran & Okumuş, 2011).

## Dragging Types in Dynamic Geometry Software

### Extended Abstract

As the most fundamental and distinguishing feature of dynamic geometry software applications, dragging has a key role in the interactive process between the deductive and inductive reasoning in geometry. In this regard, educators and researchers have an important role in revealing the role of dragging in reasoning processes. The static drawings in planar geometry make geometry learning complicated as they present the figural – spatial characteristics that bring about the activities for both theoretical and perceptual levels of thinking. However, the constructions prepared in the dynamic geometry software applications and the dragging operation performed on these constructions function as an accelerating and activating tool that enables the transition from the perceptual dimension to the theoretical dimension. This tool also promotes students' processes of research, hypothesis generation, experimentation, and reaching mathematical generalizations.

This theoretical study first presented a brief history of dragging and its significance for geometry teaching and then discussed various categorizations of dragging in the relevant literature and their roles in ascending and descending processes. In this regard, the study examined a sample problem case about the parabola subject and discussed the sample applications of dragging types for this problem and the reasoning processes that could be performed by students.

Processes of ascending and descending have a key role among thinking processes in perceptual and theoretical dimension. The process of *ascending* refers to the transition process from perceptual thinking towards theoretical thinking on figures in order to freely explore a situation and to investigate the rules and variables. The process of *descending* involves moving from theoretical thinking towards perceptual thinking on figures in order to verify or refute the assumptions set out. The transition between these two processes facilitates the realization of back-inference, which is an important form of reasoning like inductive and deductive thinking.

Studies in the relevant literature categorize dragging into seven types based on the processes of ascending and descending: wandering dragging, guided dragging, bound dragging, dummy locus dragging, line dragging, linked dragging, and dragging test. Wandering dragging, guided dragging, bound dragging, and dummy locus dragging facilitate the operation of ascending process, which is the transition from perceptual thinking to theoretical thinking dimension. Also, while students can come up with assumptions in the theoretical dimension by means of line dragging and linked dragging, dragging test facilitates the process of descending, which involves moving from theoretical thinking towards perceptual thinking. On the other hand, some researchers classify dragging into four categories: wandering dragging, maintaining dragging, dragging with trace activated, and dragging test. In this categorization, while maintaining dragging contains the

---



features of guided dragging and dummy locus dragging, dragging with trace activated performs the roles of line dragging and linked dragging. By means of the contributions of dragging feature of dynamic geometry software, which is highlighted by this study, and of the use of different dragging types to exploring, reasoning, generating assumptions and reaching generalizations in geometry, teachers could help students improve these skills of theirs.

It is essential that teachers efficiently integrate the dragging tool of dynamic geometry software into the process of teaching so that students explore geometric structures in the process of ascending-descending. Therefore, improving teachers' technological pedagogic subject area knowledge for their use of dynamic geometry software applications in teaching geometry is an important issue. In addition, reasoning skills can be promoted by the efficient use of dragging types particularly in problems that involves exploring geometric locus. By presenting students similar problems of geometric locus with dynamic geometry software, teachers can have students explore and mentally visualize these structures. On the other hand, all of the studies on dragging types cover the dragging applications in 2-dimensional dynamic geometry software. Therefore, future studies could focus on classifying dragging types in software like Cabri 3D and the role of teachers.

**Key Words:** Dynamic geometry software, dragging types, abduction, ascending process, descending process

### **Kaynaklar/References**

- Arslan, S., Baran, D. & Okumuş, S., (2011). Brousseau'nun matematiksel öğrenme ortamları kuramı ve adidaktik ortamın bir uygulaması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (NEF-EFMED)*, 5(1), 204-224.
- Arzarello, F. (2001). Dragging, perceiving and measuring: physical practices and theoretical exactness in Cabri environments, *Proceedings Cabriworld 2, Montreal, Plenary Lecture*.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 34(3), 66-72.
- Baccaglioni-Frank, A. (2009). [Conjecturing and proving in dynamic geometry after an introduction of the dragging schemes](#). In *Proceedings of the 10th International Conference of the Mathematics into the 21st Century Project*, Dresden, Germany, September 2009, pp. 31-36. ISBN: 83-919465-9-2.
- Baccaglioni-Frank, A. (2010). Conjecturing in dynamic geometry: A model for conjecture-generation through maintaining dragging. *Doctoral dissertation*, University of New Hampshire, Durham, NH. Published by ProQuest ISBN: 9781124301969.
- Baccaglioni-Frank, A. (2011). Abduction in generating conjectures in dynamic geometry through maintaining dragging. In *Proceedings of the 7th Conference on European Research in Mathematics Education*, February 2011, Rzeszow, Poland.
- Baccaglioni-Frank, A. & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* , 15 (3), 225-253

- Battista, M. T.(2007). The development of geometric and spatial thinking. In Lester, F. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). NCTM. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Güven, B & Karataş, İ. (2005). Dinamik geometri yazılımı Cabri ile oluşturmacı öğrenme ortamı tasarımı: bir model. *İlköğretim Online E-dergi*, 4(1), 62-72.
- Laborde, C. (1994). Enseigner la géométrie: Permanences et révolutions. In C. Gaulin, B. Hodgson, D. Wheeler, & J. Egsgard (Eds.), *Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education* (pp. 47-75). Les Presses de L'Université Laval, Sainte-Foy, PQ, Canada.
- Laborde, C. (1995). Designing tasks for learning geometry in computer-based environments. In: L. Burton & B. Jaworski (eds) *Technology in mathematics teaching: a bridge between teaching and learning*, Chartwell-Bratt, 35-68.
- Laborde, C. (1999). The hidden role of diagrams in pupils' construction of meaning in geometry. In C. Hoyles, J. Kilpatrick (Eds), *Meaning and Communication*, Kluwer.
- Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13:135-157.
- Lopez-Real, F. & Leung, A. (2006). Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(6), 665-679.
- Olivero, F. (1999). 'Cabri-Géomètre as a mediator in the process of transition to proofs in open geometric situations'. In W.Maull & J.Sharp (Eds), *Proceedings of the 4th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, University of Plymouth, UK*.
- Olivero, F. (2001). Conjecturing in open geometric situations using dynamic geometry: an exploratory classroom experiment, *Research in Mathematics Education*, 3(1), 229-246.
- Restrepo, A. M. (2008). Genese instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème, Doktora Tezi, Université Joseph Fourier École Doctorale des Mathématiques, Grenoble, <http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/33/42/53/PDF/These-Restrepo.pdf>
- Scher, D. (2000). Lifting The curtain: The evolution of the Geometer's Sketchpad. *The Mathematics Educator*, 10(1), 42-48.
- Tapan, M. S. Différents types de savoirs mis en oeuvre dans la formation initiale d'enseignants de mathématiques à l'intégration de technologies de géométrie dynamique, Doktora Tezi, Université Joseph Fourier École Doctorale des Mathématiques, Grenoble, [http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/13/35/69/PDF/These\\_TAPAN.pdf](http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/13/35/69/PDF/These_TAPAN.pdf)
- Tapan Broutin, M. S. (2010). Bilgisayar etkileşimli geometri öğretimi : Cabri Geometri ile dinamik geometri etkinlikleri, Bursa: Ezgi Kitabevi.
- Yaglom, I. M. (1964). Geometric Transformations. *Allen Shields (Translator), Mathematical Assn of Amer*; 1st Edition.