Teknoloji Destekli Öğretim Teorik Farkındalığı Geliştirebilir mi? Analizin Temel Teoremi Örneği[1]

Eyüp Sevimli[2] ve Ali Delice[3]

Özet: Bu çalışmanın amacı, teknoloji destekli öğretimin teorik farkındalığa etkisini, yükseköğretim matematiğinin önemli teoremlerinden biri olan Analizin Temel Teoremi (ATT) bağlamında değerlendirmektir. Çoklu yöntem modeline göre yapılandırılan araştırmada, bir öğretim deneyinin etkililiği nitel veri toplama süreçleri üzerinden, var olan durum ile karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir. Bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıf programına kayıtlı olan 84 öğrencisi yansız atama ile iki eşit gruba ayrılmış; bu işlem sonucunda deney grubunda Bilgisayar Cebiri Sistemi (BCS) destekli yaklaşım, kontrol grubunda ise geleneksel yaklaşım takip edilerek öğretim süreci yürütülmüştür. Öğretim süreci öncesi ve sonrasında uygulanan testler ile öğrenim girdi ve çıktıları değerlendirilmiş; sürecin katılımcı gözüyle değerlendirilmesi için görüşme bulgularından yararlanılmıştır. Bulgular, uygulama öncesine kıyasla deney grubundaki öğrencilerin ATT'nin gerek ve yeter şartlarını dikkate alarak integral hesabı gerçekleştirdiğini göstermiştir. Kontrol grubundaki öğrenciler, ATT'yi teorik olarak ifade edebilmelerine karşın, teorik bilgilerin gerekliliklerini çözüm sürecine yansıtamamışlardır. Çalışma sonuçları, sürecin sadece analitik değil aynı zamanda görsel çözümler ile desteklendiği durumlarda, öğrencilerin daha yüksek teorik farkındalığa sahip olabileceğini göstermiştir.

Anahtar Kelimeler: Analizin Temel Teoremi, teknoloji, teorik farkındalık

DOI: 10.16949/turcomat.44905

Abstract: The aim of this study is to evaluate the effect of technology-assisted instruction on theoretical awareness in terms of the Fundamental Theorem of Calculus (FTC), which is one of the important issues of undergraduate mathematics. In this study which is structured with regard to multi-method approach, the impact of the teaching experiment was assessed by using qualitative data on the basis of traditional environment. The research group consists of 84 students from a mathematics teacher training department at a state university; out of these students two groups have randomly been assigned, one as the experimental group and the other as control group. The tests which were carried out before and after implementations, used for determining instructional inputs-outputs and interviews conducted for evaluating students' way of thinking. The findings show that the students in the experimental group, compared to the before treatment, solved integral problems considering with the necessary and sufficient condition of the FTC. Even though students in the control group achieved expressing the FTC, they failed to reflect their knowledge into practice. It has been concluded that a Computer Algebra System may enable to interpret the solution processes not only more analytical but also with a visual sense in the experimental group.

Key Words: Fundamental Theorem of Calculus, technology, awareness of theory

See Extended Abstract

---

[1] Bu çalışma birinci yazarın doktora tezinden türetilmiş olup çalışmanın bir bölümü XI. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde sözlü olarak sunulmuştur.

[2] Yrd.Doç.Dr., Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, eyup.sevimli@gop.edu.tr

[3] Doç.Dr., Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü, alidelice@marmara.edu.tr

1. Giriş

Son yüzyılda bilim ve teknolojideki gelişmelerin öğrenme-öğretme sürecindeki yansımalarını odağına alan pek çok çalışmada, öğretim teknolojilerinin birer öğretim destekleyicisi veya yardımcısı olarak kullanılabileceğine dikkat çekilmiştir (Özyurt, Özyurt, Baki ve Güven, 2013). Başlangıçta, hesap makinesi veya tepegöz gibi var olan teknolojik donanımların öğrenme ortamına getirilmesi suretiyle sınıflar teknoloji ile buluşmuştur. Günümüzde belirli öğretim hedeflerini gerçekleştirmek üzere, amaçlı olarak, bir veya birden fazla disiplin ile uyumlu ara yüzleri içeren öğretim yazılımları sınıflarda yer edinmiştir. Bu noktada teknoloji desteğinden verimli olarak yararlanılabilecek disiplinlerden biri de matematiktir. Tall (1997), matematik sınıflarının teknoloji ile buluşması sürecinde önceleri ticari amaçların güdüldüğünü belirtirken; geliştirilen yazılımların daha çok hesap yapma işlevlerini dikkate aldığına ve mühendislik bölümlerinin ihtiyaçlarına göre geliştirildiğine dikkat çekmektedir. Yazılım mühendisleri ve alan eğitimi uzmanlarının birlikte yürüttüğü çalışmalar sonucunda, teknoloji desteği, görselleme ve hesaplama rollerinin yanı sıra, matematiksel nesnelerin keşfedilmesi veya modellenmesi gibi daha üst düzey bilişsel görevleri gerçekleştirmek üzere kullanılmaya başlanmıştır (Sevimli, 2013). Matematiğin tüm alanları içerisinde, teknoloji kullanımına yönelik çalışmaların en çok ilgilendiği ve yatırımın en çok yapıldığı alan analizdir (Tall, Smith & Piez, 2008). Bu yüzden, teknoloji desteği, yükseköğretim düzeyinde verilen analiz dersleri için ayrıca önemlidir. Çünkü geleneksel sınıflarda işlenen analiz dersleri ağır hesaplama yükü gerektirirken; işlemsel yeterlikler üzerine odaklanan içerik, öğrencilerin kavramsal bilgi yönüyle eksik yetişmelerine neden olmaktadır ve teknoloji desteği ile öğrencilerin cebirsel işlem yükünden kurtarılması hedeflenmektedir (Hughes-Hallett, 1991). Ne var ki analiz dersi sınıflarında teknoloji entegrasyonuna ilişkin görüş ve yaklaşımlar her zaman olumlu değildir. Özellikle pür matematikçiler, yükseköğretim düzeyindeki sınıflarında teknoloji kullanımını; matematiğin soyut doğasına zarar verme, işlemsel becerileri zayıflatma ve teorik bilgiler için bir karşılık oluşturmama, sembolik dilin esnek olarak kullanılamaması ve e-doküman sınırlılığı gibi çekince ve yaklaşımlardan dolayı eleştirmektedir (Alcock & Wilkinson, 2011; Bardelle, 2009; Hughes-Hallet, 1991; Tall, 1997). Bu çekince ve yaklaşımlar öğretim teknolojilerinin gelişim hızına kıyasla, öğrenme ortamlarına entegre edilen teknolojilerin sınırlı kalmasına neden olmuştur (Lavicza, 2007). Matematik eğitimi alanındaki çalışmalarda teknolojinin ileri matematiksel düşünme süreçlerindeki rolünün araştırılması çağrısında bulunulmaktadır (Alcock & Inglis, 2010; Swidan, 2013).Özellikle teknoloji destekli sınıflarda öğrencilerin ispat yapma, teorik farkındalık ve soyut düşünme gibi bazı bilgi ve becerilerinin araştırılması, teknolojinin ileri matematiksel düşünme sürecinde yarar ve sınırlılıkları için bir perspektif oluşturacaktır. Bu çalışma ile analiz dersindeki en önemli teoremlerden biri olan Analizin Temel Teoremi (ATT) için teknolojinin sunduğu fırsatlar veya sınırlılıklar teorik farkındalık üzerinde değerlendirilmiştir. Çalışmada ATT'nin tercih edilme nedeni, bu teoreme ilişkin farkındalık eksikliğinin alan yazında sıkça ifade ediliyor olmasıdır (Thompson, 1994; Camacho, Depool & Santos-Trigo, 2009). Bununla birlikte, türev, belirsiz integral ve belirli integral kavramları arasında ilişkiler ağı oluşturan ATT'nin, öğrenciler tarafından açık bir şekilde anlaşılıyor olması önemlidir. ATT, öğrencilerin belirli integral hesaplarında başvurdukları temel teorem olmakla birlikte, birçok öğrencide gözlenen ortak yanılgı, bu teoremin sadece bir hesap aracıymış gibi, ön gerekliliklerine dikkat edilmeden kullanılması ve teoremin arkasında yatan fikrin göz ardı edilmesidir (Thompson, 1994). Bu çalışma, ATT ile ilgili teorik bilgiye sahip olma ve bu bilgiyi problem çözümünde uygulayabilme arasındaki farkı teknoloji destekli öğretim süreci üzerinden değerlendirileceğinden dolayı önemlidir ve özgün değere sahiptir.

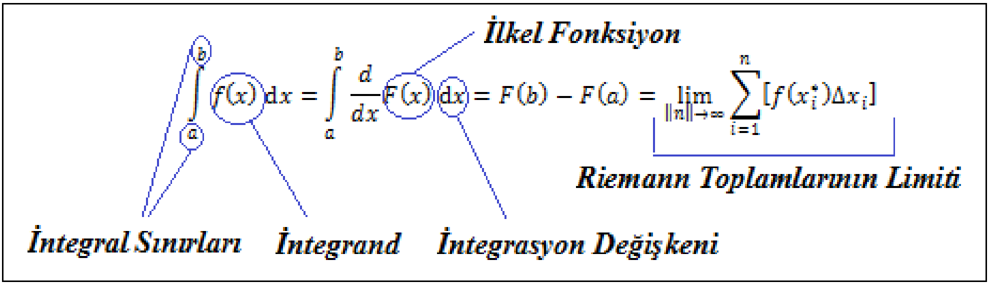
1.1. Analizin Temel Teoremine İlişkin Farkındalık

Bugün kendi içerisinde alt bilim dallarına ayrılan ve her geçen gün genişleyen analiz bilimi 17.yüzyılın başlarında şu dört bilimsel probleme cevap bulmak üzere ortaya çıkmıştır. Bunlar; *(1)* ivmenin zamana bağlı bir fonksiyon ile verildiği durumda hız ve alınan mesafenin bulunması veya tersine, mesafenin zamana bağlı bir fonksiyon ile verildiği durumda herhangi bir andaki hız ve ivmenin bulunması), *(2)* verilen bir eğri üzerinden teğet doğrusunun bulunması, *(3)* bir fonksiyondaki maksimum veya minimum değerlerin bulunması, *(4)* eğrilerin sınırladığı bölgenin alanlarının veya yüzey alanlarının sınırladığı bölgelerin hacimlerinin hesaplanmasıdır (Ponce-Campuzano & Maldonado-Aguilar, 2013). Dönemin ünlü matematikçilerinden Newton ve Leibniz'in bu dört temel probleme cevap bulmak üzere giriştikleri uğraşılar sonucunda bugün türev ve integral olarak anılan iki temel konu/kavram keşfedilmiştir. Geleneksel matematikte analiz bilimi, diferansiyel analiz ve integral analizi başlıkları altında incelenmektedir (Türev ve integral kavramları arasında köprü oluşturan ve integral hesabının temel teoremlerinden biri olan ATT; belirli integrali Riemann toplamlarının limitini alarak hesaplamak yerine, integrandı oluşturan fonksiyonun bir ters türevini kullanmak suretiyle belirlenmesini mümkün kılar (Thomas, Weir, Hass & Giordano, 2009, s.356). Newton ve Leibniz birbirlerinden habersiz olarak benzer zamanlarda ATT'yi keşfetmiş, analiz bilimi bu keşif ile yüksek matematiğin günlük hayat ile en çok ilişkilendirilen disiplini olmuştur. ATT iki kısımdan oluşmakta olup; ilk kısımda yer alan $\int_a^x f(t)dt = F(x)$ eşitliği belirli integral ile ters türev arasındaki ilişkiyi gösterirken ikinci kısım, belirli integralin bir ters türev fonksiyonu ile nasıl hesaplanacağını özetlemektedir (Ponce-Campuzano & Maldonado-Aguilar, 2013). Balcı (2008), iki kısımdan oluşan ATT'yi birleştirerek şu şekilde ifade etmiştir:

> *f, [a,b] üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Her x є (a,b) için $F'(x) = f(x)$ olacak biçimde sürekli bir F: [a,b] ⟶IR fonksiyonu varsa, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 'dır. (s.273)*

Yukarıdaki tanımda kolaylıkla görüleceği üzere türev, belirsiz integral ve belirli integral kavramlarını içerisinde bulunduran ATT, aynı zamanda bu kavramlar arasındaki ilişkileri de ortaya çıkarmaktadır. Türk eğitim sisteminde, öğrenciler, integral konusu ile ilk kez lise son sınıfında karşılaşırlar. Bu sınıf düzeyinde integral konusu, sırasıyla belirli integral ve belirsiz integral kavramına ilişkin tanımlar eşliğinde işlenmektedir (MEB, 2013).

Yükseköğretim düzeyindeki analiz derslerinde ve bazı ders kitaplarında integral konusuna giriş, belirsiz integral kavramı ile yapılmaktadır (Sevimli, 2013). Belirsiz integral ile aynı anlama gelen yalnız farklı bağlamlarda kullanılan birden fazla terim vardır. Bunlardan bazıları; karşıt türev, ters türev, ilkel fonksiyona ulaşma sürecidir. Örneğin $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ gösteriminde *F(x)*, *f(x)*'in ters türevi olarak adlandırılır (Şekil 1). *f(x)* 'in $[a,b]$ aralığında sürekli olduğu durumda, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ fonksiyonunun ($a \leq x \leq b$) türevi $F'(x) = f(x)$ olur ve integral, bir ilkel fonksiyona ulaşma süreci olarak kullanılır. O halde $F'(x) = f(x)$ eşitliğini sağlayan bir *f(x)* fonksiyonu bulmak demek, *f(x)* 'in belirsiz integralini bulmak demektir (Balcı, 2008; s.274) Bir fonksiyonun ters türevine ulaşma süreci, "*integrasyon*" olarak adlandırılmaktadır (Hughes-Hallett vd., 2008, s.332). Her türevlenebilen fonksiyonun bir ters türevi mevcut iken, bu ters türeve temel integrasyon yöntemleri ile ulaşılamayabilir (Balcı, 2008; s.273). Bir başka ifadeyle, her türevlenebilen fonksiyonun bir ters türevi vardır fakat bu ters türevleri karşılayan bir cebirsel karşılık yazılamayabilir. Örneğin, "e^{x^2}" fonksiyonunun bir ters türevi yani belirsiz integrali vardır yalnız bunu temel matematiksel fonksiyonlarla ifade etmenin bir yolu yoktur (Thomas vd., 2009, s.603).



Şekil 1. Belirli integral kavramına ilişkin notasyonlar (Sevimli, 2013)

Belirsiz integralin bazı sınır değerleri için hesaplanması sonucunda belirli integral değerine ulaşılır. Ancak integrali alınacak her fonksiyon sınırlı bir aralıkta tanımlanmayabilir veya bir aralıkta sonsuz süreksizliğe de sahip olabilir. İntegral sınırlarından birinin veya her ikisinin de sonsuz olduğu durumlar, birinci tip; integrali alınacak fonksiyonun sınır veya bir iç değerde sürekli olmadığı durumlar, ikinci tip genelleştirilmiş integraller olarak bilinir (Thomas vd., 2009). Genel olarak $\int_a^b f(x)dx$ gösterimi ile sembolize edilen belirli integralin farklı anlamları mevcuttur. Bunlardan bazıları; bir hesap olarak, bir alan olarak, bir birikim olarak, $x=a$ ve $x=b$ arasındaki toplam değişim olarak, bir fonksiyon olarak ve bir soyut nesne olarak belirli integraldir (Oberg, 2000). Bu farklı anlamlarının odağında ortak olarak belirli integralin Riemann toplamlarının bir limiti olması fikri bulunmaktadır. ATT, türevin "*değişim oranı*" anlamının integraldeki yansımasını "*birikimli değişim*" anlamı üzerinden gerçekleştirmektedir. Bu yüzden, bu teoremin öğrenciler tarafından açık bir şekilde anlaşılıyor olması önemlidir

(Thompson, 1994). ATT, öğrencilerin belirli integral hesaplarında başvurdukları temel teorem olmakla birlikte, birçok öğrencide gözlenen ortak durum, bu teoremin sadece bir hesap aracıymış gibi, ön gerekliliklerine dikkat edilmeden kullanılması ve teoremin arkasında yatan fikrin göz ardı edilmesidir (Bajracharya & Thompson, 2014; Thompson, 1994). Bazı araştırmalarda, öğrenciler, integrand'ın, kapalı aralık içerisindeki bir noktada sürekli olmadığı durumlar ile karşılaştırılmıştır (Camacho, Depool & Santos-Trigo, 2009). Öğrenciler, bu problem durumunda, genelleştirilmiş integralin yakınsaklığını araştıracağı yerde, ATT 'yi kullanmaya çalışmışlardır. Bu bulgu, öğrencilerin ATT 'yi her integral probleminde ön gerekliliklerini dikkate almadan ve anlamını sorgulamadan kullandıkları şeklinde yorumlanmıştır (Gonzalez-Martin & Camacho, 2004). Thompson (1994), öğrencilerin ATT 'yi anlamlandırmakta yaşadıkları güçlüğün, özellikle, değişim imgesindeki eksiklikten kaynaklandığı belirtmiştir. Buna göre, bir niceliğin birikimli değişimi ile anlık değişimi arasında sıkı bir ilişki vardır ve bu ilişki dinamik imgeye sahip olan öğrenciler tarafından anlamlandırılabilir (Thompson, a.g.e). Bezuidenhout ve Oliver (2000), öğrencilerin, ATT 'yi anlamlandırabilmek için gerekli olan ön bilgilere sahip olmadıklarını belirtmiştir. Çünkü ATT, fonksiyon (Bezuidenhout & Olivier, 2000), limit (Ferrini-Mundy & Graham, 1994), değişim oranı (Thompson & Silverman, 2008), birikimli değişim (Carlson, Persson & Smith, 2003; Thompson, 1994) gibi farklı matematiksel kavramları içerisinde bulundurur. Bazı kaynaklarda ise öğrencilerin ATT 'yi anlamlandırma sürecinde yaşadıkları zorluğun teorik bilgi eksikliğinden kaynakladığına dikkat çekilmektedir (Camacho, Depool & Santos-Trigo, 2009). Bu bağlamda $\int_a^b f(x)dx$ gösteriminin eşitinin *f(b)-f(a)* veya b-a olduğunu ifade eden öğrenciler, eksik kavramsal davranışlara sahiptir (pseudo-conceptual behavior) denilmektedir (Rasllan & Tall, 2002). ATT'nin teorik olarak anlamlandırılması ve uygulama sürecinde doğru kullanılmasına engel olabilecek çeşitli nedenler bulunmaktadır. Bu nedenler aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Geleneksel sınıflardaki öğretim içeriğinde, integral konusunun cebirsel yorumuna daha çok zaman ayrılmakta, analitik yaklaşımlar daha fazla vurgulanmakta ve integralin farklı anlamlarına yeteri kadar önem verilmemektedir (Sevimli, 2013).
- Bazı araştırmalar, kalem kağıt ile hesaplanması zor olan integrasyon problemlerini dahi başarı ile gerçekleştirebilen geleneksel sınıf öğrencilerinin, temel düzeydeki kavram tanımlarını açıklama ve yorumlamada zorluk yaşadıklarını belirtmektedir (Bajracharya & Thompson, 2014; Bezuindehout & Oliver, 2000; Oberg, 2000). Bu durum, öğrencilerin integral konusunda sınırlı kavram imgelerine sahip olmasından kaynaklanmaktadır (Rasslan & Tall, 2002).
- Geleneksel sınıflarda benimsenen öğrenme döngüsünde "Tanım → Teorem → İspat → Uygulamalar → Test" yaklaşımı ile öğrencilerin integral konusunda daha çok ezbere dayalı uygulamalar yaptığı bilinmektedir (Sevimli ve Delice, 2013). Türkiye'deki lise programlarında geleneksel paradigmanın takip ettiği bu öğrenme döngüsünün matematiksel ilişkileri keşfetme, başka kavramlarla ilişkilendirme, modelleme ve

problem çözme gibi üst düzey matematiksel becerileri desteklemediği belirtilmektedir (MEB, 2013).

İntegral hesabında temel olan ve analizin farklı kavramlarını birleştiren bu teoremin, anlamlandırılması için, pek çok araştırmacının ortak görüşü, çoklu temsil desteğinden yararlanmaktır (Camacho, Depool & Santos-Trigo, 2009; Schnepp & Nemirovsky, 2001; Sevimli, 2013; Swidan, 2013). Thompson ve Silverman (2008) teknoloji desteğinden yararlanılarak sunulan cebirsel ve grafiksel dinamik temsillerin, öğrencilerde ATT'ye ilişkin anlamlı bütünler oluşturabileceğine dikkat çekmiştir.

1.2. Teknoloji, Görselleme ve Teorik Farkındalık

Geleneksel yaklaşımların sınırlılıklarına tepki olarak 1980'li yılların sonunda Amerika'da başlayan ve hızla dünyadaki birçok üniversitede karşılık bulan süreç "*Analiz Reform Hareketi*" olarak bilinmektedir. Analiz reform hareketine göre gelişen teknolojinin sunduğu fırsatlar dikkate alınırken; öğretim içerikleri farklı temsiller ile sunum ve günlük hayat ile ilişkiler bağlamında revize edilmelidir (Hughes-Hallet, 1991). Analiz derslerinde kullanılmak üzere, çeşitli öğrenme nesneleri, web destekli öğretim modülleri, bilgisayar cebiri sistemleri ve grafik destekli hesap makineleri geliştirilmiştir. Bilgisayar cebiri sistemleri (BCS), analiz dersi sınıflarında kalem-kâğıt temelli yaklaşımlarla gerçekleştiremeyecek birçok işlevi öğrenciye sunmaktadır (Lavicza, 2007). Örneğin, türev konusundaki değişim, bir noktadaki eğimin bir değişkene göre incelenmesi, limit ile yaklaşımda bulunma süreci, bunlardan sadece bir kaçıdır. Bu yönüyle BCS'lerin, öğrencilere sezgisel düşünme ve çıkarımda bulunma gibi farklı üst düzey bilişsel becerileri kattığı bilinmektedir (Tall, Smith & Piez, 2008). Analiz dersi sınıflarına teknoloji entegrasyonunu konu alan araştırmalarda, BCS'lerin kavram imgelerini geliştirme, kavram yanılgılarını giderme ve kavramsal anlamayı destekleme gibi bazı destekli oluşum görevleri üstelendiği de belirtilmektedir (Alcock & Wilkinson, 2011). Model kurma, grafik oluşturma ve değer tablosu çıkartma gibi ara yüzler sayesinde birçok BCS, matematiksel nesne ve süreçleri görselleme kapasitesine sahiptir. Teknolojinin matematik sınıflarındaki rolünü inceleyen araştırmalar da BCS'lerin geometrik veya nümerik gibi alternatif yaklaşımları desteklemesinden dolayı öğretme-öğrenme sürecinde etkili bir araç olarak kullanılabileceğine dikkat çekmektedir (Lavicza, 2007; Sevimli, 2013; Tall, Smith & Piez, 2008). Peki, ileri matematik konuları veya ileri matematiksel düşünme süreçleri için teknoloji ve dolayısıyla görsel yaklaşımlar olumlu etki değerine sahip midir? Bu sorunun cevabı teknolojinin kullanım durumlarına göre değişirken var olan durumlar üzerinden genel bir kanıya ulaşmak yanıltıcı olabilir. Ancak matematik eğitimi alanında yapılan çalışmalar, teorik farkındalık sürecinde görsellemenin rolü için bir perspektif oluşturmaktadır. Buna göre bir matematiksel sürecin açıklanması ve aktarılması için kullanılabilecek tek dil sembolik yapılardan oluşan sözel temsiller değildir. Fischbein (1993) geometrik şekillerinde bir zihinsel yapı olduğuna işaret ederken matematikteki grafik, diyagram veya şekillerin arkasında gözle görülmeyen ancak matematiksel olarak var olduğu bilinen bir aksiyomatik dilin var olduğunu iddia etmektedir. Bu bağlamda, görsel temsiller de tıpkı sembolik temsiler gibi teorik bilgilerin sunumu, açıklanması ve hatta ispat yapma göreviyle kullanılabilir (Alcock & Inglish, 2010; Bardelle, 2009).

Analiz derslerinde birçok teorem için ifade ve ispatlara yer verilir, bunlar arasından en çok bilenenler Ortalama Değer Teoremi, Rolle Teoremi ve ATT olarak sıralanabilir. Bu teoremlerin bazılarının ispatında grafik veya diyagram gibi görsel temsiller kullanılarak sembolik dilin geometrik karşılıkları ile süreç anlamlandırılmaya çalışılır. Görsel temsiller üzerinden birçok öğrenci teoremin doğruluğunu informel yaklaşımlar ile sezgisel olarak onaylayabilir ancak bir matematikçi bakışı ile ispat henüz tamamlanmamıştır (Alcock & Inglish, 2010). Beklenti teorik bilginin öğrenciler tarafından anlaşılır olması değil aksiyom veya argümanların formel yaklaşımlar kullanılarak ve nesnel bir bakış açısı ile matematik otoriteleri tarafından kabul görmesidir. Bu noktada matematikçiler arasında da farkı bakış açıları mevcuttur. Bazı matematikçiler, çeşitli terminolojiler kullanarak hazırladıkları basılı kaynaklarda, herhangi bir sembolik gösterime ihtiyaç duyulmaksızın görsel temsiller ile ispat sürecinin tamamlanabileceğini iddia etmişlerdir (Alsina & Nelsen, 2010; Bardelle, 2009). Roger Nelson tarafından hazırlanan "*Proofs Without Words I-II*" kitapları bu anlamda yayımlanmış öncü kaynaklardandır (Alsina & Nelson, 2010). Bu kitaplar, içerisinde farklı kaynaklardan toplanmış görsel ispat örneklerini bulundurmaktadır. Görsel temsiller ister yardımcı birer araç isterse sürecin kendisi olarak yer alsın, matematiğin öğrenilmesi ve öğretilmesi sürecinde kullanılmalıdır (Presmeg, 2006). Görselleştirme sürecinin dinamik işlevler içerisinde kullanılabilmesi için teknoloji desteğinden yararlanılması ayrıca önemlidir. Yükseköğretim düzeyindeki matematik sınıflarında teknoloji; hesap-işlem yükünü azaltma, bilgiye ulaşma veya grafik-geometrik çizimleri sağlama görevleri ile kullanılırken; teorik bilgilerin sunumunda teknoloji desteğinden pek yararlanılmamaktadır. Lavicza (2007), matematikçiler ile gerçekleştirdiği görüşmeler sonucunda pür matematikçilerin yükseköğretim sınıflarında BCS kullanımına mesafeli yaklaştıklarını ve genç matematikçilerin öğrenme-öğretme sürecinde teknoloji kullanımına daha yatkın olduklarını belirlemiştir. Gerekçe, teknoloji ile yapılacak somutlaştırma çalışmalarının matematiğin soyut doğasına zarar verebileceği ve görselleştirmelerin süreci eksik resmedeceğidir. Matematikçilerin ileri matematiksel düşünme süreçleri gerektiren ders ve konularda kalem-kağıt tabanlı süreçleri tercih etmesinin bir diğer gerekçesi ise teknoloji ile uyumlu olarak kullanılabilecek materyallerin sınırlı olmasıdır. Ancak araştırmalar, yükseköğretim düzeyindeki geleneksel matematik sınıflarında öğrencilerin teorik bilgileri anlama, yorumlama ve uygulama problemlerinde düşük başarıya sahip olduklarını göstermektedir (Camacho, Depool, & Santos-Trigo, 2009; Hughes-Hallet, 1991). Alcock ve Wilkonson (2011) matematiksel ispatların anlamlandırılabilmesi amacıyla analiz derslerinin teorik kısmı için bir takım elektronik kaynaklar geliştirmiş ve e-ispat olarak adlandırdıkları web-tabanlı öğretim aracının teorik farkındalığı geliştirebileceğini iddia etmişlerdir. İlgili çalışmadaki bulgular, web-tabanlı öğretim sürecinin farklı temsillere ve muhakeme türlerine fırsat sunduğunu göstermiş; böylece teorik farkındalığa olumsuz etki ettiği düşünülen monoton anlatım ve sembolik dil tabanlı süreç gibi geleneksel sınıf özelliklerinden sıyrıldığı ifade edilmiştir (a.g.e). Bu çalışmada ATT 'ye ilişkin farkındalığa

BCS destekli öğretimin etkisi incelenerek, teknolojinin teorik farkındalık gelişimi üzerindeki yansımaları araştırılmıştır.

2. Yöntem

Bir öğretim sürecinin etkililiğinin değerlendirildiği çalışmalarda, nicel-pozitivist paradigmayı dikkate alan araştırmalar, ne kadar sorusuna yön veya büyüklük açısından cevap verebilirken; neden ve nasıl sorularının cevaplanabilmesi için nitel-yorumlayıcı paradigmanın işe koşulması gereklidir. Bu çalışmada bir öğretim sürecinin etkililiği, teorik farkındalık bağlamında değerlendirildiğinden dolayı araştırma planında deneysel desen dikkate alınmış ve nitel veri desteği ile olguların bağlı bulundukları çevre içerisinde bütüncül olarak yorumlanması hedeflenmiştir. Bu yönüyle, çoklu yöntem modelinin 'desen ve veri kaynağı çeşitliliği' ilkesi benimsenerek araştırma planı hazırlanmıştır (Creswell, 2003, s.26).

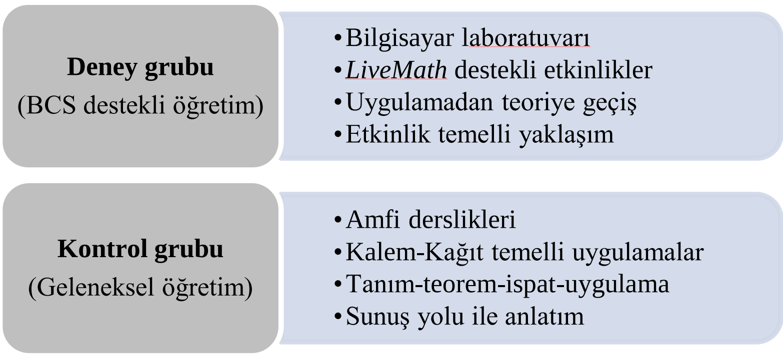
2.1.Çalışma Grubu

Araştırma, 2011-2012 eğitim-öğretim yılında bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği ikinci sınıf programına kayıtlı olan 84 öğrenci üzerinde yürütülmüştür. ATT konusu integral ünitesi altında işlendiğinden dolayı çalışma grubundaki öğrenciler integral ünitesinin işlendiği Analiz II dersine de kayıtlıdır. Çalışma grubundaki öğrenciler Analiz-I dersini, sunuş yolu ve soru cevap tekniği ile öğrenimin gerçekleştiği geleneksel sınıflarda işlemiştir. Öğrenciler, daha önce bir ders içeriği kapsamında, herhangi bir öğretim teknolojisi kullanmadıklarını veya teknoloji destekli bir öğretim sürecinde yer almadıklarını, ifade etmişlerdir. Çalışmanın yürütüldüğü program, yükseköğretime geçiş için yapılan merkezi sınavlardan alınan puanlar bakımından tercih edilebilecek bölümler arasında üst sıralarda yer almaktadır. Araştırmaya katılan öğrenciler arasından yansız atama ile iki uygulama grubu oluşturulmuş; gruplardan biri deney ($n=42$) diğeri kontrol grubu ($n=42$) olarak belirlenmiştir. Deney ve kontrol gruplarının karşılaştırılabilir olup olmadıklarını belirlemek üzere grupların bir önceki dönem aldıkları Analiz I dersi geçme notları dikkate alınmış; iki grubun ders geçme puan ortalamalarının birbirine benzer olduğu gözlenmiştir (*100 puan üzerinden*$\bar{X}_{Deney}$=58.6, $\bar{X}_{Kontrol}$=60.4). Çalışma grubunda yer alan öğrencilerin benzer özellikleri şu şekilde sıralanabilir: gönüllü katılımcı olmak, öğretim sürecinin en az %70'inde yer almak, çalışma kapsamında uygulanan testlerin tamamına katılmış olmak.

2.2. Öğrenme Ortamları

Analiz dersi her iki grupta da dördü teorik ikisi uygulama olmak üzere toplam altı ders saatinde işlenmektedir. Bu ders kapsamında gerçekleştirilen uygulamalar altı hafta (6x6=36 ders saati) sürmüş ve araştırmacılar tarafından yürütülmüştür. Araştırma üzerinden elde edilecek bulguların anlamlı olarak yorumlanması için uygulama gruplarında takip edilen öğretim içerikleri ve yaklaşımlarının detaylı olarak açıklanması önemlidir. Bu bağlamda deney grubundaki öğrenciler BCS-destekli öğretim ortamında, kontrol grubundaki öğrenciler ise geleneksel öğretim ortamında integral ünitesini işlemişledir.

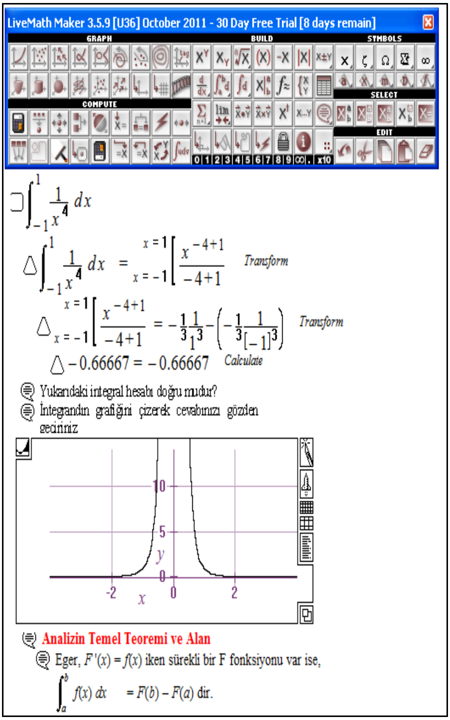
Geleneksel öğrenme ortamında referans alınan içerik ve yaklaşımlar belirlenirken, Analiz-I dersini yürüten öğretim üyesinin işleyişi, ders notları ve kullandığı ders kitabı takip edilmiştir. Bu bağlamda geleneksel sınıf ortamındaki ders işlenişi gözlem, öğretim içerikleri ise doküman analizi yardımıyla değerlendirilmiştir. Geleneksel sınıflarda, teorik ve uygulamalı dersler benzer olarak sunuş yoluyla, herhangi bir yazılım ya da etkinlikten yararlanılmadan öğretmen merkezli olarak işlenmekte, yer yer soru cevap tekniğinden yararlanılmaktadır. Geleneksel sınıflarda kullanılan ve kontrol grubunda da takip edilen ders kitabının içerik özellikleri şu şekilde özetlenebilir: konu anlatımında tanım-teorem-ispat-uygulama sırası dikkate alınmaktadır, ağırlıklı olarak cebirsel temsilleri içermektedir, sembolik dil daha sık kullanılmaktadır, örnekler ve uygulamalar kağıt-kalem temellidir (Şekil 2).



Şekil 2. Öğrenme ortamlarının genel karakteristikleri

BCS destekli öğrenme ortamlarında teknolojinin analiz dersi sınıflarına entegrasyonu sürecindeki işlem adımları dikkate alınmış bu bağlamda öğretim içeriği ile uyumlu olan ve uygulama sürecini yürüten araştırmacıların da teknolojik alan bilgisine sahip oldukları bir yazılıma ihtiyaç duyulmuştur. BCS destekli öğrenme ortamlarında takip edilen kaynak, reform yaklaşımına göre düzenlenmiş olan ve konuların farklı temsiller eşliğinde, teknoloji desteği ile sunulmasının önerildiği bir analiz ders kitabıdır (Hughes-Hallet vd., 2008). İntegral kavramının soyut doğasının oluşturulduğu teorik derslerde, araştırmacılar BCS'den yararlanarak, ilgili konularda görsel muhakemeyi destekleyecek içerikleri, sınıfa sunmuştur; bu dersler, sınıf ortamında yürütülmüştür. Kontrol grubundaki uygulama dersleri, bilgisayar laboratuvarında etkinlik temelli ve çalışma yaprağı destekli olarak yürütülmüştür.

Kolay anlaşılır bir ara yüze sahip olan, hesaplama sürecinde işlem basamaklarını gösteren, keşfettirici yaklaşımları destekleyen, grafik çizme, öteleme ve döndürme komutlarını uygulayabilen *LiveMath* yazılımı BCS destekli öğrenme ortamlarında kullanılmak üzere tercih edilmiştir. Örneğin, bu yazılım ile ATT'yi keşfettirmek isteyen öğretici, teoremin gerek ve yeter şartlarını, bir durum teorisi araç çubuğuna girerek, farklı girdiler için hangi sonuçlara ulaşılabileceğini öğrencilerden test etmesini isteyebilir. Böylece, matematiksel gerçekleri sistemde tanımlayan ve bu sistemin farklı girdiler için sonuçlarını deneyen öğrencilere, kavramın farkına varma fırsatı sunabilir. Şekil 3'te verilen ve deney grubunda sunulan etkinlik örneğinde, ATT 'nin teori ve uygulamadaki karşılığı, cebirsel ve görsel muhakeme süreçleri üzerinden değerlendirilmiştir. Böylece türev ve integral arasındaki cebirsel ilişkinin arkasında yatan geometrik anlamın BCS destekli ortamda kavratılması hedeflenmiştir.



Şekil 3. BCS destekli öğrenme ortamında sunulan bir *LiveMath* etkinliği

2.3. Veri Toplama ve Analiz Süreci

Veri toplama sürecinde kullanılan teknikler test ve görüşmedir. Öğretim uygulaması öncesi ve sonrasında uygulama gruplarının ATT'ye ilişkin teorik bilgilerini ve bu bilgilerin uygulama sürecindeki kullanımını değerlendirmek üzere İntegral Yeterlik Testi'nden (İYT) yararlanılmıştır. İYT, integral konusundaki kavramsal-işlemsel yeterlikleri ve öğrenme alanlarındaki yeterlikleri değerlendirme ihtiyacına karşılık, araştırmacı tarafından geliştirilen yazılı bir testtir. İYT, içerisinde limit-integral ilişkisi, türev-integral ilişkisi ve integralin nümerik, geometrik veya analitik yorumu gibi farklı bağlamları içermesine rağmen bu çalışma kapsamında testin türev ve integral kavramları arasındaki ilişkisini konu alan boyutu dikkate alınmıştır. İYT ile türev-integral ilişkisi değerlendirilirken, Thompson'un (1994) ATT'yi kullanma ve yorumlama için kullandığı problem durumları referans alınmıştır. ATT'ye yönelik teorik farkındalığı değerlendirmek için kullanılan İYT'de iki farklı özelliğe sahip toplam 8 problem durumu bulunmaktadır. Bu özellikler teori bilgisi ve uygulama bilgisi olup; Şekil 4'te örneklendirilmiştir. İYT'de, ATT kullanılarak çözülebilecek problemlerin yanı sıra, fonksiyonun süreksiz olduğu ve bu yüzden genelleştirilmiş (has olmayan) integral ile çözülmesi gereken problem durumlarına da yer verilmiştir. Böylelikle öğrencilerin teorik bilgilerini farklı problem durumlarında nasıl işe koştukları da değerlendirilmek istenmiştir.

Teori bilgisi	**Uygulama bilgisi**
Soru-5: Analizin Temel Teoremine göre eğer *f(t)* fonksiyonu [a,b] aralığında______ ve $F'(t)=f(t)$ ise $\int_a^b f(t)dt =$______olur.	**Soru-9:** $\int_{-1}^{2} \frac{1}{(x-1)^{2/3}}dx$ integralini hesaplayınız?

Şekil 4. ATT'ye yönelik teori ve uygulama bilgisini içeren bir soru

İYT, uzun deneme çalışmaları sonucunda yüksek geçerlik-güvenirlik ile geliştirilmiştir. Matematik eğitimi alanında doktorasını tamamlamış beş uzmandan alınan görüşler çerçevesinde, deneme çalışmalarından sonra yeniden düzenlenen testin uygulamaya hazır halinin, ölçmeyi hedeflediği davranışlar yönüyle, kapsam ve görünüş geçerliğine sahip olduğu belirlenmiştir. İYT'nin güvenirliğini test etmek için, değerlendiriciler arası güvenirlik analizinden de yararlanılmıştır. Üç farklı değerlendiricinin kodlama sürecindeki uyuşma yüzdelerinin, tüm test için %80'den daha yüksek, türev-integral ilişkisi boyutu için %84'ten daha yüksek olduğu belirlenmiştir. Test verileri araştırmacıların fikir birliği sağladıkları çözüm kategorileri altında betimsel istatistik yardımı ile yüzde cinsinden sunulmuştur.

Öğrencilerin öğretim ortamlarını kendi tecrübeleri doğrultusunda değerlendirmelerini sağlamak ve bir süreç olarak teorik farkındalığın incelenebilmesi için görüşmelerden yararlanılmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmeler her gruptan birer öğrenci ile yürütülmüş ve görüşmeye seçilen öğrenciler katılımcı olarak adlandırılmıştır. Amaçlı örnekleme tekniğine göre seçilen katılımcılar, İYT'deki çözüm kategorilerinde yer aldıkları grupları en yüksek oranlarda temsil etmektedir. Transkripsiyonu gerçekleştirilen görüşmelerden önemli olan bölümler çalışma içerisinde, doğrudan alıntılama yolu ile sunulmuştur.

3. Bulgular

Araştırma bulguları sunulurken grupların uygulama öncesi ve sonrasında ATT'yi bilme ve problem çözümünde uygulayabilme başarıları ile çözüm içerikleri ayrı ayrı değerlendirilmiştir. Test bulgularının ardından, teorik farkındalığın bir süreç olarak derinlemesine açıklamak üzere yarı-yapılandırılmış görüşmelerden elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

3.1. Teorik Farkındalığın İYT Bulgularına Göre Karşılaştırılması

Öğrencilerin, öğretim uygulaması öncesi İYT'ye verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular, öğrencilerin lise düzeyindeki integral bilgilerine ışık tutmaktadır. Buna göre, her iki grupta ATT'yi kullanan öğrencilerin tamamı bu teoremin şartlarının dikkate almadan, ters türev hesabı ile çözüm gerçekleştirmiştir. Uygulama gruplarına "$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^4} dx$ *integralini hesaplayınız?*" sorusu yöneltilmiş, istisnasız tüm öğrenciler $f(x) = \frac{1}{x^4}$ fonksiyonun ters türevini alarak sınırları bu ters türevde yerine koymaya çalışmıştır. Bu sorudaki çözüm içerikleri incelendiğinde öğrencilerin herhangi bir grafikten yararlanmadıkları, ilgili aralıkta fonksiyonun sürekliliğini test edecek bir yola başvurmadıkları ve benzer yollarla yanlış sonuçlara ulaştıkları belirlenmiştir.

Tablo 1. İYT cevaplarına göre uygulama sonrasında grupların ATT'yi bilme ve kullanma başarıları

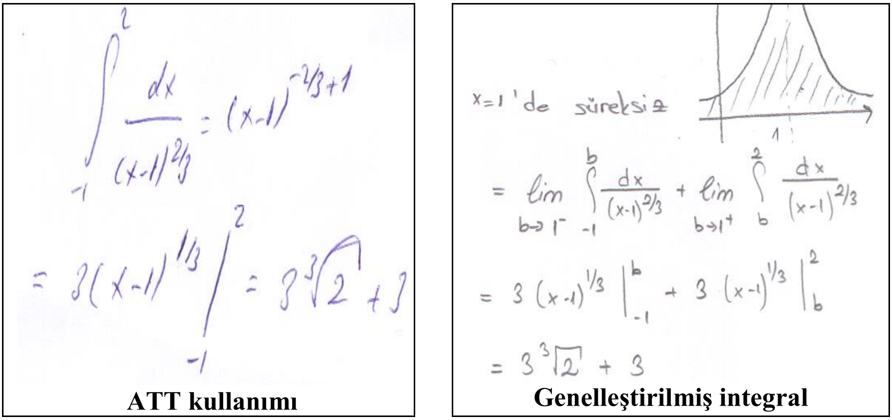
	Deney		***Kontrol***	
Durum	Frekans	Yüzde	Frekans	Yüzde
Teoriyi doğru ifade etme	36	86	23	64
Teoriyi problem çözümünde kullanma	30	71	11	26

Uygulama sonrasında, deney grubundaki öğrencilerin %86'sı, kontrol grubundaki öğrencilerin ise %64'ü ATT'yi teorik olarak doğru ifade edebilmiştir. Bu öğrenciler ters türevi alınacak fonksiyonun ilgili aralıkta sürekli olması gerektiğine dikkat çekmiş; $F'(x)=f(x)$ iken $\int_{a}^{b} f(x)dx$ integralinin eşitinin $F(b) - F(a)$ olacağını belirtmiştir. ATT'yi kullanabilme şartlarının teorik olarak farkında olan öğrencilerin pratikteki çözüm davranışlarının farklı olduğu gözlenmiştir. Deney grubundaki cevapların %71'i, kontrol grubundaki cevapların ise %26'sında integrali alınacak foksiyonun ilgili aralıktaki süreksizlik noktaları dikkate alınmış ve genelleştirilmiş integral ile doğru cevaba ulaşılmıştır (Tablo 1). ATT'nin kullanılabilme şartlarını sağlamayan ve ilgili aralıktaki bir noktada süreksiz olan bir problem durumuna, verilen yanıtlar Tablo 2'de özetlenmiştir.

Tablo 2. "$\int_{-1}^{2} \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$ integralini hesaplayınız?" sorusuna verilen yanıtların çözüm içerik ve yaklaşımlarına göre yüzde olarak karşılaştırılması

	Çözüm Yaklaşımı			
(%)	Analitik		Görsel	
Çözüm içeriği	***Deney***	***Kontrol***	***Deney***	***Kontrol***
Genelleştirilmiş integral	23	26	48	-
ATT kullanımı	19	55	-	14
Iraksak integral	-	5	10	-

Öğrenciler, $\int_{-1}^{2} \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$ integralini hesaplarken genelleştirilmiş integral, ATT kullanımı veya ıraksak integral çözüm içeriklerinden birini izlemiştir. Çözüm içeriklerine ek olarak öğrencilerin cebirsel veya grafiksel temsillerden yararlanma davranışları da değerlendirilmiş, böylece çözümlerde analitik veya görsel yaklaşımlardan hangisinin takip edildiği incelenmiştir. Analitik veya görsel yaklaşımlarla integrand'ın kritik noktalardaki süreksizliğini belirleyebilen ve ikinci tipten genelleştirilmiş integral tanımını kullanan öğrenciler doğru çözüm içeriklerini takip edebilmiştir. Doğru cevaba ulaşan öğrenciler deney grubunda görsel yaklaşımları (%48), kontrol grubunda ise analitik yaklaşımları (%26) daha sık tercih etmiştir (Tablo 2). Kontrol grubunda görsel yaklaşımları kullanmasına rağmen fonksiyonun süreksiz olduğu noktaları grafikte tespit edemeyen öğrencilerin var olduğu görülmüştür. Kontrol grubundaki her üç öğrenciden ikisi, fonksiyonun ilgili aralıkta süreksiz olduğu noktaları içermesine rağmen, ATT'yi kullanmak suretiyle yanlış çözüm adımlarını takip etmiştir (%69). Bu problem durumu için ATT'yi yanlış yerde kullanan öğrenci yüzdesi, deney grubunda daha düşüktür (%19). Bir diğer yanlış cevap içeriği "*ıraksak integral*" olup; bu kategoride değerlendirilen cevaplarda öğrencilerin genelleştirilmiş integralleri limiti olmayan ıraksak integral tipleri ile sınırladığı gözlenmiştir. Deney grubundaki öğrencilerin %10'u, kontrol grubundaki öğrencilerin %5'i ıraksak integral kategorisinde değerlendirilen çözüm içeriklerini kullanmışlardır. İntegrasyon sınırında veya sınırları arasındaki bir noktada süreksizliğe sahip olan integrand'ın, genelleştirilmiş tipteki integral olduğunun farkında olan öğrenciler çözüm sürecine devam etmeme gerekçelerini limitin olmayışına bağlamışlardır. Öğrenci çözümlerinden elde edilen ve Şekil 5'te sunulan kesitlerde çözüm içerikleri örneklendirilmiştir.



ATT kullanımı **Genelleştirilmiş integral**

Şekil 5. ATT kullanımı ve genelleştirilmiş integral kategorisinde değerlendirilen çözüm örnekleri

"$\int_{-1}^{2} \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$ *integralini hesaplayınız?"* sorusuna verilen yanıtlar ATT'nin kullanım farkındalığını anlamak için önemlidir. Çünkü Şekil 5'te aynı soru için ATT'yi kullanan ve genelleştirilmiş integral içeriğini takip eden öğrenciler, farklı yollar ile doğru sonuca ulaşmıştır. Sonuç doğru olsa da bu problem durumu için ATT'yi kullanan öğrencilerin farkındalık sahibi olmadığı ve yanlış içerikleri takip ettiği gözlenmiştir. İntegrasyon aralığının bir noktasında süreksiz olan fonksiyonların integrallerine genelleştirilmiş integral hesabı ile ulaşmak gerekirken (Thomas vd., 2009); "*ATT kullanımı*" kategorisindeki çözüm içeriğini takip eden öğrenciler bu süreksizliği dikkate almamışlardır. Şekil 5'teki "*genelleştirilmiş integral*" çözüm örneğinde deney grubundaki öğrenci, *x=1* noktası civarında integrand fonksiyonunun nasıl davrandığını merak ettiğinden veya cebirsel çözümü görsel olarak da desteklemek amacıyla grafik temsilini kullanmıştır. Deney grubundaki öğrenci integral hesabını eğri altında kalan alan anlamı üzerinden yorumlarken limit ile yaklaşımda bulunmaktadır. Şekil 5'te yer alan ve geleneksel gruptaki bir öğrenciye ait olan "*ATT kullanımı*" çözümünde öğrenci *x=1* noktasındaki süreksizliğe rağmen, ters türevleme yoluyla hesabı gerçekleştirmiştir. Bu soruda ATT kullanımı şartları sağlanmadığından genelleştirilmiş integral ile çözüm içeriği takip edilmelidir ve sonlu bir limit değerine ulaşıldığından integral yakınsaktır. Genelleştirilmiş integral sonucunun yakınsak olması bu limit değerinin, integral sınırları ve fonksiyon grafiği altında kalan alan şeklinde yorumlanabileceğini göstermektedir. Cebirsel ve grafiksel temsillerin ilişkilendirilmesiyle ortaya çıkan bu yorumun deney grubundaki öğrenciler tarafından daha sık kullanıldığı belirlenmiştir.

3.2. Teorik Farkındalığın Görüşme Bulgularına Göre Karşılaştırılması

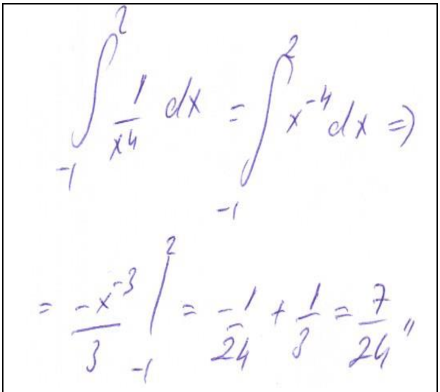
İYT'deki bulgularda geleneksel gruptaki öğrencilerin ATT'den yararlanırken ATT'nin şartlarını dikkate almadığı belirlenmiştir. Yalnız bunun sistematik bir hata mı yoksa dikkat eksikliğinin neden olduğu bir zorluk mu olduğu belirlenemediğinden ve İYT cevaplarının gerekçelerini analiz etme ihtiyacından dolayı yarı-yapılandırılmış görüşmelere başvurulmuştur. Öğretim süreçlerinin öğrencilerin ATT'yi kullanma bilgi ve farkındalıklarını nasıl etkilediğini değerlendirilmek üzere, deney ve kontrol grubundan sırasıyla çözümleri "*genelleştirilmiş integral*" ve "*ATT kullanımı*" kategorisinde değerlendirilen birer katılımcı ile görüşme gerçekleştirilmiştir. İYT bulgularına göre deney grubundaki katılımcı (**K**$_{Deney}$) görsel yaklaşımları, kontrol grubundaki katılımcı (**K**$_{Kontrol}$) ise analitik yaklaşımları daha sık kullanmaktadır. Görüşme içeriğinde katılımcıların uygulama öncesinde karşılaştıkları bir problem durumunu tekrar yorumlamaları istenmiştir. Görüşmelerden yapılan doğrudan alıntılar şu şekildedir:

Araştırmacı: $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^4}\,dx$ *integralini hesaplayınız?" problemi için bir çözüm öneriniz?*

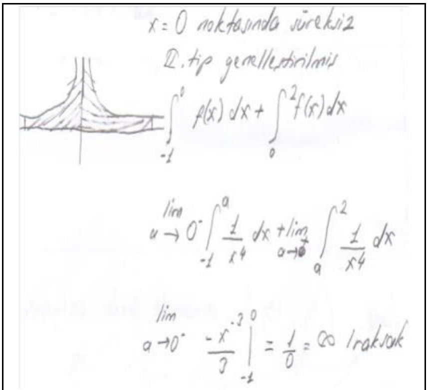
K$_{Deney}$ **:** *ATT uygulanmadan önce sınırlara bakmak gerekiyor, integralinin alınması için a dan b ye sürekli olmalıdır. Bu problem için genelleştirilmiş integral kullanmalıyız. 0 noktasında bir baca oluşuyor.*

K$_{Kontrol}$**:** *Tam emin değilim. Süreklilik varsa fonksiyon integrallenebilirdi galiba,(*katılımcı, $y=\frac{1}{x^4}$ fonksiyonunun grafiğini çizer*)…Evet sıfır noktasında tanımsız, yalnız altta kalan alanı yaptığım işlem veriyor bence…*

Öncelikle gruplara göre ATT'yi kullanma bilgi ve farkındalıkları incelendiğinde **K**$_{Deney}$'in teorik bilgilerini görselleme eğiliminde olduğu görülmektedir. **K**$_{Deney}$, integrand'ın pozitif olduğu durumlarda genelleştirilmiş integrale karşılık gelen bir limit değerinin olmayışını eğri altında kalan alanın bir reel sayı olmamasıyla ilişkilendirmiştir. Şekil 6'da görüldüğü üzere **K**$_{Deney}$, görüşme sorusunun ATT ile çözülemeyeceğini fark etmiş ve genelleştirilmiş integralin yakınsaklık ve ıraksaklığını geometrik anlamları üzerinden yorumlayabilmiştir.



K$_{Kontrol}$: ***ATT kullanımı***



K$_{Deney}$: ***Genelleştirilmiş integral***

Şekil 6. $\int_{-1}^{2}\frac{1}{x^4}dx$ sorusu için deney ve kontrol grubundaki katılımcıların örnek çözümleri

Görüşme bulguları, dikkat eksikliğinden dolayı **K**$_{Kontrol}$'un çözüm sürecinde ATT'yi hemen kullanmaya çalıştığını göstermiştir. **K**$_{Kontrol}$'a fonksiyonun süreksiz olduğu noktanın varlığı hatırlatıldığında ise, bunun ihmal edilebileceğini belirtmiştir. **K**$_{Kontrol}$, bu problemi çözerken $y=\frac{1}{x^4}$ fonksiyonunun grafiğini çizmiş ve fonksiyonun süreksiz olduğu 0 noktasını göstererek "*noktanın alanı yok bu ihmal edilebilir*" argümanını kullanmıştır. Oysa limit sonluysa genelleştirilmiş integralin yakınsadığı söylenebilir ve genelleştirilmiş integral değeri limit değerine eşitlenir (Dernek, 2009, s.312). Yalnız yukarıdaki soruda integrand $x=0$ noktasında süreksiz olup $x \to 0^-$ limiti sonsuz olduğundan ıraksaktır. Bu noktada **K**$_{Kontrol}$'un, süreci anlamlandırmak için yararlandığı görsel öğeler bilişsel karmaşaya yol açmıştır. **K**$_{Kontrol}$, bu çıkarımını "süreksizlikte, kaldırılabilir süreksizlikler var, buradaki süreksizlikte ihmal edilebilir" argümanı ile desteklemeye çalışmıştır. **K**$_{Kontrol}$'a Riemann toplamları ve eğri altında kalan alan arasındaki ilişki hatırlatılarak, aslında $x \to 0^-$ olduğunda $f(x)\Delta x$ dikdörtgen alanının sonsuza yaklaştığı hatırlatıldığında, bu notasyonu hiçbir zaman tam olarak anlamlandıramadığını ifade etmiştir.

Bu çalışmada BCS destekli veya geleneksel öğretim yaklaşımlarının benimsendiği sınıflarda, öğrencilerin, teorik bilgiyi uygulama sürecine nasıl yansıttıkları değerlendirilmek istenmektedir. Bu yüzden katılımcıların öğrenim gördükleri sınıfları, kendi perspektiflerinden ve teorik farkındalık bağlamında değerlendirmesi önemlidir. Görüşmelerden yapılan doğrudan alıntılar şu şekildedir:

Araştırmacı: *Teorik bilgiyi problem durumunda kullanma sürecini ders gördüğünüz sınıf ortamına göre değerlendiriniz?*

K$_{Deney}$**:** *Her şey bir yana matematiğin sanal dünyada da olsa karşılığını gördüğümde mutlu oldum, teknoloji teorik bilgilerin sınıf ortamında monoton şekilde sunulmasının önüne geçiyor. Bence teknoloji rutin işlem adımlarında bile öğrenci heyecanını canlı tutuyor…LiveMath yazılımında fareyi hareket ettirerek süreksizlik noktalarına yaklaşıyorum, farklı temsilleri kullanıyorum ve türev ile integral arasındaki geçişleri grafikleri üzerinden daha kolay yorumlayabiliyorum…Bazı BCS etkinliklerinde uygulamadan teoriye gidiliyor olması teorik bilgileri akılda kalmasını kolaylaştırıyor.*

K$_{Kontrol}$**:***Aslında analiz derslerinde teori ve uygulama arasında ilişki kurarken ben de zorlanıyorum, bana iki farklı ders gibi geliyor ve daha çok uygulama derslerinde öğrendiğimiz kural ve işlemler aklımda kalıyor, her ne kadar uygulama derslerine daha az zaman ayrılıyor olsa da… Her teorik bilgi için olmayabilir ancak Analizin Temel Teoremi gibi uygulama derslerinde doğrudan karşılığını gördüğümüz önemli konularda görselleme için teknolojiden yararlanılmalıdır.*

Katılımcı görüşleri öğrenme-öğretme sürecinde teorik farkındalığa etki ettiği düşünülen iki başlığı öne çıkmaktadır. Bunlar; teorik bilginin sunumunda tercih edilen yaklaşımlar ve teori-uygulama dengesidir. Bilginin sunumu sürecinde, BCS desteğinden faydalanılması gerektiği hem **K**$_{Deney}$ hem de **K**$_{Kontrol}$ tarafından ifade edilmektedir. Katılımcılar daha çok teknolojinin bir görselleme aracı olarak kullanılması gerektiğine dikkat çekmekte ve teorinin anlaşılırlığına katkı yapacağını düşünmektedir. **K**$_{Kontrol}$'den farklı olarak **K**$_{Deney}$, yazılımların "*bilgi sunumunda durağan değil dinamik olma*" özelliğine dikkat çekmiş böylece ATT'deki girdi ve çıktı fonksiyonlarındaki anlık değişimleri daha kolay anlamlandırdığını ifade etmiştir. **K**$_{Deney}$, BCS desteği ile integral konusunun işlenmesi sürecini tecrübe ettiğinden dolayı, teknolojinin bilgi sunumunda kişiye sağladığı duyuşsal motivasyonları da göz önünde bulundurmaktadır. **K**$_{Kontrol}$ ise matematiğin teorik anlamda soyut ve aksiyomatik bir dile sahip olduğunu belirtmekte bu yüzden bir görselleme aracı olarak teknolojinin sadece belirli teorilerde kullanılabileceğine dikkate çekmektedir. **K**$_{Kontrol}$ integral problemlerinin çözümünde teorik bilgileri değil, uygulama derslerinde öğrendikleri kural ve formülleri referans aldığını belirtmektedir. Teorik bilgileri uygulamada kullanmama gerekçesini de uygulamaların yetersiz olması ve teoriyle yeteri kadar ilişkilendirilememesine bağlamaktadır.

4. Tartışma, Sonuç ve Öneriler

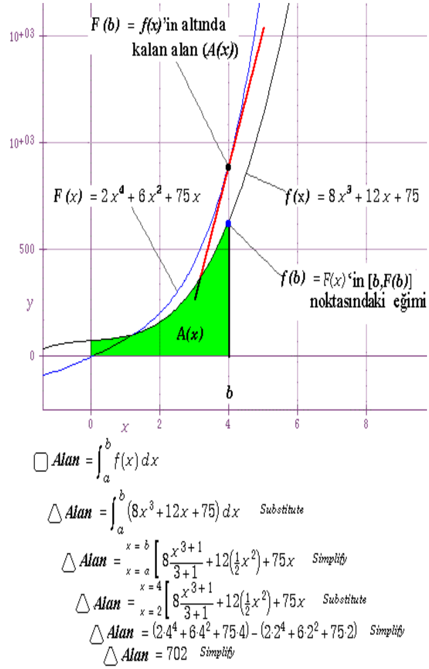
Bu çalışma ile elde edilen bulgular, ATT'ye yönelik teorik farkındalıkta özellikle öğretim içerik ve yöntemlerinin belirleyici olduğunu ortaya koymuştur. Geleneksel yaklaşımın izlerini taşıyan bir sınıf ortamında öğrenim gören kontrol grubu öğrencilerinin, ATT'yi teorik olarak ifade edebilmelerine rağmen teorik bilgilerin gerekliliklerini çözüm sürecine yansıtamamaları düşündürücüdür. Teorik baskınlığa sahip klasik analiz ders kitaplarında, öğrencilerin ATT veya diğer bazı teoremler için farkındalıklarını arttıracak ve rutin bir bilgiyi yeniden yorumlayarak öne çıkaracak yeterli problem durumu/senaryosu bulunmayabilir. Öte yandan, geleneksel sınıflarda takip edilen öğrenme döngüsü

(Tanım→Teorem→İspat→Uygulamalar→Test) öğrencilerin analiz dersi konularını daha çok tanım veya kurala dayalı olarak öğrenmelerine, bu tanım veya kuralların uygulanması için gerekli ön şart ve kabullere dikkat etmemelerine yol açıyor olabilir. Nitekim Alcock ve Inglish (2010), görsel öğelerin kullanılmadığı geleneksel içerik ve yaklaşımların, öğrencileri kural temelli düşünmeye ve ezbere sevk ettiğini belirtmektedir. Anlamlandırılmayan ve bir kural olarak kabul edilen bilgiler, teorinin uygulama sürecindeki yansımasını yani teorik farkındalığı olumsuz etkilemektedir. Bu çıkarımı destekleyen görüşme verilerden birinde, kontrol grubundaki bir öğrenci, analiz dersinde teori ve uygulama bölümleri arasında ilişki kurarken zorlandığını ve zihninde sanki iki farklı dersmiş gibi kodladığını belirtmektedir. Bu bulgular, Gonzalez-Martin ve Camacho'nun (2004) çalışma sonuçlarıyla benzerlik gösterirken, analitik muhakeme baskınlığındaki süreçlerin farkındalık eksikliğine yol açtığı düşünülmektedir. ATT'yi bilme ve uygulayabilmeye yönelik sorulara verilen cevaplar, matematik bilgisini yorumlayamayan öğrencilerin cebirsel temsil baskınlığıyla çalışma eğiliminde olduklarını göstermektedir (Tablo 1). Thompson ve Silverman (2008) cebirsel ve grafik gösteriminden yararlanılarak açıklanan ATT'nin, öğrencilerde anlamlı bütünler oluşturabileceğini belirtmiştir.

Uygulama öncesi ve sonrasındaki bulgular karşılaştırıldığında, hem geleneksel hem BCS destekli öğretim ortamlarında yer alan öğrencilerin belirli oranlarda gelişim kaydettikleri söylenebilir. Çünkü uygulama öncesinde hem deney hem kontrol grubundaki hiçbir öğrenci fonksiyonun tanım kümesini ve sürekli olduğu aralığı dikkate almamış; uygulama sonrasında her iki grupta da belirli oranlarda farkındalık görülmüştür. Türk Eğitim Sisteminde öğrenciler türev ve integral konusu ile ilk kez lise düzeyinde karşılaşmaktadır (MEB, 2013). Bu noktada uygulama öncesindeki bulgular öğrencilerin lise düzeyindeki integral çözüm davranışlarını özetliyor olabilir. Görüşme bulguları da bu çıkarımı desteklemektedir. Örneğin uygulama öncesindeki İYT çözümlerini değerlendiren **K**$_{Kontrol}$, önceki öğrenme yaşantılarına dikkat çekmiş ve "*Lisedeyken örneğin bir fonksiyon sorusunu çözdüğümde fonksiyonun tanım aralığı veya özellikleri ile ilgili giriş bilgilerine pek bakmazdım, üniversitede bu yönümün geliştiğini düşünüyorum*" demiştir. Yükseköğretime geçiş sınavlarına yönelik hazırlanan yardımcı kaynak ve kurslar öğrencilerin işlem tabanlı düşünmelerine yol açmış olabilir. İntegral konusunun ilk kez ele alındığı bu düzeyde, eksik veya yanlış yapılandırılan bilgilerin izlerini tamamlamak veya silmek yeni öğrenilen bilgilere kıyasla daha fazla zaman alacaktır. Bu yüzden yükseköğretim matematiğine temel oluşturan lise bilgilerinin, kavramsal ilişkilendirmeler yoluyla öğrencilere sunulması önemlidir.

Bulgular bölümünde paylaşılan veriler, kontrol grubuna kıyasla deney grubundaki öğrencilerin, ATT kullanımına ilişkin problemlerde daha başarılı olduklarını göstermiştir. Deney grubunu kontrol grubundan ayıran en önemli iki özellik, öğretim içeriğinde öğrencilerin uygulamadan teoriye geçişi sağlayan bazı problem durumları ile yüzleştirilmeleri ve öğretim teknolojisi olan BCS'nin kullanılmasıdır. BCS destekli etkinlikler ile belirli integralin birikimli toplamlar (Thompson, 1994), eğri altında kalan alan (Rasslan & Tall, 2002) ve türevin tersi (Swidan, 2013) anlamlarını tecrübe eden deney grubundaki öğrenciler, analitik ve görsel muhakemeleri bir arada, ilişkilendirerek kullanmış bu yönüyle analitik muhakemeye dayalı çözümlerde bulunan kontrol grubu öğrencilerine kıyasla daha başarılı olmuşlardır.

Deney grubunda *LiveMath* yazılımı ile sunulan içeriklerde ATT'ye ilişkin uygulama problemleri iki farklı şekilde çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır Bu çözümlerden birinde integrand fonksiyonunun bir ters türevi kullanılırken diğerinde Riemann toplamlarının limitini alınarak hesap yapılmıştır. Riemann toplamlarının limiti ile hesaplanan integral problemlerinde, teknoloji desteği anlık değişim imgesinin canlı tutulmasını sağlamaktadır. Thompson (1994), ATT'yi anlamlandırmakta güçlük yaşayan öğrencilerin özellikle bir niceliğin birikimli değişimi ile anlık değişimi arasındaki ilişkiyi açığa çıkaracak şekilde dinamik imgelerle desteklenmesi gerektiğini belirtmekte bu çalışmadaki bulgularda bu öneriyi desteklemektedir. Şekil 7'de verilen ve BCS destekli öğretim ortamlarında kullanılan etkinlik örneğinde eğim, anlık değişim ve alan arasındaki dinamik ilişkiler bir integral hesabı üzerinden çoklu temsiller kullanılarak açıklanmaya çalışılmıştır. Görüşmeye alınan deney grubundaki bir öğrencinin teorik farkındalık için resim temsilleri yerine dinamik görselleri tercih etmesi de teknolojinin süreçteki destekli oluşum rolünü açığa çıkarmaktadır.



Şekil 7. *LiveMath* çalışma yaprağından bir örnek

Çalışma bulgularında teknolojinin teorik farkındalık üzerindeki olumlu yansımalarına dikkat çekilirken, bu bulgunun nedeni, ilgili literatürde, teknolojik araçların görsel süreçleri öne çıkarmasıyla açıklanmaktadır (Camacho, Depool& Santos-Trigo, 2009; Hughes-Hallet, 1991; Swidan, 2013). Matematik eğitimi literatüründe, görselleme ve ispat süreçlerinin bir arada kullanıldığı pek çok çalışma ile karşılaşmak mümkündür (Alcock & Inglish, 2010; Alcock & Wilkinson, 2011; Alsina& Nelsen, 2010; Bardelle, 2009). Bu çalışmalardan bazıları sözel temsil kullanmadan görsel temsiller yoluyla yapılan ispatların kavramsal anlama, muhakeme ve süreç farkındalığı sağladığını göstermektedir (Bardelle, 2009). Bu çalışmada ispat süreçleri üzerinde bir işlem gerçekleştirilmediğinden ilgili literatür ile uyumluluk tartışılamayabilir; ancak bulgular ATT'nin ifade ve ispatında kullanılan dilleri açıklaması yönüyle önemlidir. Yükseköğretim düzeyindeki matematik derslerinde öğretim üyesi genelde ders kitabı veya ders notları üzerinde bir teoriyi ifade ve ispat eder. İfade ve ispatlar genelde dersin içeriği ve öğretim üyesinin tercihlerine göre kelime ve notasyonların değişen oranlarda birleşiminden oluşmakta ve sembolik bir dil ile sunulmaktadır (Alcock & Inglish, 2010). Gelenekçi matematikçilerin yükseköğretim düzeyinde teknoloji kullanımına mesafeli durma gerekçeleri görsel ispatların sınırlı olması ve birçok yönüyle sözel ispatlara bağlı olmasıdır (Bardelle, 2009). Oysa ilgili alandaki araştırmalar, bazı öğrencilerin matematiksel gerçekleri anlama ve yorumlama sürecinde analitiğe kıyasla görsel muhakemeyi daha fazla tercih ettiklerini göstermiştir (Presmeg, 2006; Sevimli, 2013). Bu çalışmalardan birinde Bardelle (2009), teorik bilgileri anlama ve ispat yapma açısından başarısız olan öğrencilerin, görsel-semiyotik sistemlerin kullanıldığı sınıf ortamlarında daha fazla gelişim kaydettiklerini belirlemiştir. Bu noktada teknoloji destekli öğretim yaklaşımları, öğrencilerin bilişsel veya bireysel farklılıkları için daha fazla alternatif sunmakta olup; önemli olan şey teknolojinin amaç değil öğretime yardımcı bir araç olarak öğrenme-öğretme sürecinde yer almasıdır (Lavicza, 2007; Tall, Smith& Piez, 2008). BCS destekli öğretim süreçlerinde analitik ve görsel muhakemenin ilişkilendirilerek kullanılması analiz dersi konularında yaşanan zorlukları indirgeyebilir. Türev, ters türev alma ve integral kavramları arasındaki ilişkiler, teknoloji entegrasyonunun sağlandığı sınıflardaki öğrenciler tarafından görsel temsillerin etkin kullanımı ile başarılı bir şekilde yorumlanabilir (Sevimli & Delice, 2013).

Çalışma sonuçları, ATT'ye ilişkin teorik farkındalığın öğretim yaklaşımına göre değiştiğini göstermiştir. Buna göre her iki gruptaki öğrencilerin çoğunluğu ATT'ye ilişkin doğru tanım bilgisine sahip iken bu bilginin uygulama problemlerine yansıtılması sürecinde deney grubu öğrencileri daha başarılıdır. Hem öğretim uygulaması öncesinde hem de sonrasında kontrol grubundaki öğrenciler, teorik bilgilerin gerekliliklerini çözüm sürecine yansıtamamışlardır. Kontrol grubundaki öğrencilerin büyük çoğunluğu genelleştirilmiş integral ile çözümün gerçekleştirilmesi gereken problemlerde,"*integrand'ın belirlenen aralıkta tanımlı veya sürekli olmasına bakılmaksızın, ters türevleme işlemi yoluyla*",ATT'yi kullanmış ve bu anlamda teorik bilgilerini farklı bağlamlara transfer edememişledir. Deney grubunda integral konusunun analitik ve görsel yaklaşımlar üzerinden ele alınması, bu gruptaki öğrencilerin problem durumu ile uyumlu olan (ATT veya genelleştilmiş integral) çözüm sürecini tercih etmelerini sağlamıştır. Sonuçlar, integral hesabında değişim oranı, birikimli toplamlar veya alan gibi farklı dinamik imgeleri ilişkilendirerek kullanan deney grubu öğrencilerinin, baskın olarak cebirsel yaklaşımı referans alan kontrol grubu öğrencilerine kıyasla daha yüksek teorik farkındalığa sahip olduğunu göstermiştir. Bu çalışmada, teorik bilginin uygulama sürecindeki yansıması için BCS destekli öğretimin etkisi incelenirken; araştırmanın odağı gereği, teknolojinin soyutlama, modelleme ve ispat yapma gibi üst matematiksel becerileri nasıl etkilediğine değinilmemiştir. Bu alanda yapılacak bir çalışma, teorik farkındalık kadar önemli olan diğer ileri matematiksel düşünme süreçleri için bir çerçeve oluşturacağından ve alan yazındaki bir boşluğu dolduracağından dolayı önemlidir. Öte yandan ilgili alan yazında teknolojinin öğrenme ortamına entegrasyonu için pek çok öneride bulunulurken; bu çalışma ile (BCS destekli öğretim modülü hazırlanırken) tecrübe edilen bir gerçek, teknoloji ile sunumu destekleyen etkinlik, problem durumu veya bilişsel görev gibi öğretim içeriklerinin çok sınırlı olduğudur. Bu bağlamda gerek matematik eğitimcileri gerek öğretim teknolojisi uzmanlarına, öğrenme-öğretme sürecini destekleyecek e-içerikler üzerinde çalışmaları önerilmektedir.

Can Technology-Assisted Instruction Improve Theoretical Awareness? The Case of Fundamental Theorem of Calculus

Extended Abstract

Among all disciplines of mathematics, Calculus is the discipline which has the most investments. Studies on the use of technology are mostly related with calculus, compared to other disciplines of mathematics (Tall, Smith & Piez, 2008). Therefore, technology support is extra important for the calculus courses at the tertiary level. Because of the fact that calculus courses in traditional classes requires a heavy calculation load, the content focusing on procedural skills leads students to become inadequate in terms of conceptual knowledge (Hughess-Hallet, 1991). It is aimed to unburden students of the Algebraic operation load with the technology support. It is also stated that Computer algebra systems (CAS) play scaffolding roles such as development of concept images, eliminating the misconceptions and supporting conceptual understanding. However, the views and approaches to technology integration in the classrooms of calculus course are not always positive. Some mathematicians have a biasness that using technology in the undergraduate level classes may harm the abstract nature of mathematics and weaken the operational skills (Alcock & Wilkinson, 2011; Bardelle, 2009; Hughes-Hallet, 1991; Tall, 1997). With this study, the opportunities and limitations offered by technology for Fundamental Theorem of Calculus (FTC), one of the most important theorems in Calculus, are evaluated on theoretical awareness. FTC apart from being student's fundamental theorem in which they apply in integral calculus, the common misconception observed in students is; the use of this theorem just as a means of calculation, without paying attention to its prerequisites and ignoring the concepts behind the theorem (Thompson, 1994). The research has a unique value because the difference between understanding FTC and applying the theorem to solve problems is assessed through technology assisted instruction process.

Multi-method approach, which is a combination of qualitative data support and experimental study was adopted as a research design. The study has been carried out under the Calculus II course of 2011-2012 spring semesters. Participant of the study consists of 84 students enrolled under mathematics teaching program at a state university; and groups have been assigned randomly as one group being Experimental Group ($n = 42$) and the other is being Control Group ($n = 42$) respectively. To determine whether Experimental and Control groups are comparable or not, passing grades of the course Calculus I were taken into account and it was observed that average passing score of the two groups were similar (Out of 100 Points $\bar{X}_{Experimental}$=58.6, $\bar{X}_{Control}$=60.4). Practices carried out under Calculus II was carried out by researchers and lasted six weeks. Integral subject in the experimental group was presented with the help of CAS through multiple representation centered teaching approach and provided access to instructional technology for each student. As for the control group; the regular flow of the course (traditional approach) was continued. Learning inputs and outputs have been assessed with the implementation of

Integral Proficiency Test before and after the instruction process. Both problems including the equivalents of the theories and applications of FTC (Fundamental Theorem of Calculus) and the problem cases in which functions are discontinuous and boundaries are infinite are also included in the Integral Proficiency Test. Interviews with three students selected according to sampling techniques from each group was performed to assess the responses to the test within the frame of awareness. Descriptive statistics and direct quotation method were used for data analysis.

Findings before application obtained from Integral Proficiency Test (IPT) have showed that all the students using FTC in both groups performs anti-derivative solution without taking the conditions of the theorem into account. Findings after application of IPT have revealed that, 86% of the students in the experimental group, and 64% of students in the control group has theoretical awareness of the FTC. These students have stated that function whose anti-derivative is going to be taken must be checked whether it is in relevant range continuously. It has been observed that students aware of the conditions to be able to use FTC theoretically have different behaviors of practical solutions. In the answers of experimental group, 71% of the experimental group students were able to determine the discontinuity in the critical points of integrand either with algebraic or graphical approach and were able to come up with the correct answer with improper integral (Table 2). However, in the control group the percentage of students who did not take the discontinuous points of functions into account were observed to be high (55%). Students in the control group; despite expressing the FTC theoretically, they could not reflect the requirements of theoretical knowledge to the solution process. Some theorems on integral and handling the proofs for those theorems through geometric process in the experimental group are important to make sense of abstract relations. In the integral problems calculated with the limit of Riemann sums, technology support keeps the instantaneous rate of change image alive. Thompson (1994), noting that the students who have difficulty making sense of FTC should be supported with dynamic images especially in a way that could reveal the relationship between accumulated change and instantaneous rate of change, and supports this proposal with the findings in this study. The results of the study showed that students who use different dynamic images such as accumulated change or area under the curves by associating in experimental group have predominantly higher theoretical awareness compared to control group of students who take the algebraic approach as a reference.

Kaynaklar/References

Alcock, L., & Inglis, M. (2010). Visual considerations in the presentation of mathematical proofs. *Seminar.net-International Journal of Media, Technology and Lifelong Learning, 6,* 43-59.

Alcock, L., & Wilkinson, N. (2011). *e-Proofs: Design of a resource to support proof comprehension in mathematics. educational designer*, *1(*4). http://www.educationaldesigner.org/ed/volume1/issue4/article14/pdf/ed_1_4_alcock_11.pdf adresinden 17 Mayıs 2014 tarihinde erişilmiştir.

Alsina, C., & Nelsen R. (2010). An invitation to proofs without words. *European Journal of Pure and Applıed Mathematıcs, 3*(1), 118-127.

Bajracharya, R. R., & Thompson, J. R. (2014). Student understanding of the fundamental theorem of calculus at the mathematics-physics ınterface. Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. http://timsdataserver.goodwin.drexel.edu/RUME-2014/rume17_submission_46.pdf. adresinden 8 Temmuz 2014 tarihinde erişilmiştir.

Balcı, M. (2008). *Genel Matematik* (5. Baskı). Ankara: Balcı yayınları.

Bardelle, C. (2009). Visual proofs: an experiment. *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education*, Lyon:France.

Bezuidenhout, J., & Olivier, A. (2000). Students' conceptions of the integral. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Hiroshima: Japan.

Camacho, M., Depool, R., & Santos-Trigo, M. (2009). Students' use of Derive software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. *CBMS Issues in Mathematics Education, 16*, 35-67.

Carlson, M. P., Persson, J., & Smith, N. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: The fundamental theorem of calculus. *In Proceedings of the 2003 Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education - North America* (Vol 2, pp. 165-172). Honolulu, HI: University of Hawaii.

Creswell, J. (2003). *Research design. Qualitative, quantitative and mixed methods approaches*, 2nd edt. Sage: Thousand Oaks.

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. In J. J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning.* Washington, D. C.: Mathematical Association of America.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.

Gonzalez-Martin, A. S., & Camacho, M. (2004). What is first-year mathematics students' actual knowledge about improper integrals? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*(1), 73-89.

Hughes-Hallett, D. (1991). Visualization and calculus reform. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), Visualization in teaching and learning mathematics, MAA Notes.

Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., McCallum, W. G. et al. (2008). *Calculus: Single variable* (5th Edition). New York: Wiley.

Lavicza, Z. (2007). Factors influencing the integration of Computer Algebra Systems into university-level mathematics education. *International Journal for Technology in Mathematics Education, 14*(3) 121-129.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013). *Ortaöğretim matematik dersi 9-12. sınıflar öğretim programı*. Ankara: MEB Talim Terbiye Başkanlığı Yayınları.

Oberg, R. (2000). *An investigation of under graudate calculus students understanding of the definite integral* (Unpublished PhD Dissertation). The University of Montana.

Özyurt, Ö., Özyurt, H., Baki, A. ve Güven, B. (2013). Integration into mathematics classrooms of an adaptive and intelligent individualized e-learning environment: implementation and evaluation of UZWEBMAT. *Computers in Human Behavior, 29*, 726–738.

Ponce-Campuzano, J. C., & Maldonado-Aguilar, A. M. (2013). The fundamental theorem of calculus within a geometric context based on Barrow's work. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45*(2), 293-303. doi:10.1080/0020739X.2013.822586.

Presmeg, N. C. (2006). A semiotic view of the role of imagery and inscriptions in mathematics teaching and learning. In: Navotná J., Moraová H., Krátká M., & Stehliková N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 1, pp. 19-34). Prague: Czech Republic.

Rasslan, S., & Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. In Cockburn A.; Nardi, E. (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 4, pp. 89-96). Norwich: England.

Schnepp, M., & Nemirovsky, R. (2001). Constructing a foundation for the fundamental theorem of calculus. In A. A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 90-102). Reston, VA: NCTM.

Sevimli, E. (2013). *Bilgisayar cebiri sistemi destekli öğretimin farklı düşünme yapısındaki öğrencilerin integral konusundaki temsil dönüşüm süreçlerine etkisi* (Yayımlanmamış doktora tezi). Marmara Üniversitesi, Türkiye.

Sevimli, E. ve Delice, A. (2013). An investigation of students' concept image and integration approaches to definite integral: Computer Algebra System. In Lindmeier A.; Heinze, A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 4, pp. 201-209). Kiel: Germany.

Swidan, O. (2013). Perceiving calculus ideas in a dynamic and multi- semiotic environment - The case of the antiderivative. *CERME 8*, Antalya, Turkey.

Tall, D. O. (1997). Functions and Calculus. In A. J. Bishop et al (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 289-325, Dortrecht, Kluwer.

Tall, D. O., Smith, D., & Piez, C. (2008). Technology and calculus. In M. K. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics* (pp. 207–258). USA: NCTM.

Thompson, P. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2), 229-274.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Thomas G. B., Weir M. D., Hass J., & Giordano F. R. (2009). *Thomas' calculus*. (11. Baskıdan çeviri: Recep Korkmaz). Boston: Pearson Education.

Kaynak Gösterme
Sevimli, E. ve Delice, A. (2015). Teknoloji destekli öğretim teorik farkındalığı geliştirebilir mi? Analizin temel teoremi örneği. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 6*(1), 68-92.

Citation Information
Sevimli, E., & Delice, A. (2015). Can technology-assisted instruction improve theoretical awareness? The case of fundamental theorem of calculus. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 6*(1), 68-92.