Deneysel Doğrulamadan Formel İspata Uzanan Süreçte Dinamik Geometri Yazılımlarının Potansiyeli

Erdem Çekmez[1]

Öz: Ülkemizde 2013 yılında yayımlanan Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı öğretmenlerden, öğretim sürecine dinamik geometri programlarını dâhil etmesini istemektedir. Bu isteğin gerekçelerinden biri, bu yazılımların öğrencilere matematiksel araştırma sürecinde gerçekleşen eylemleri deneyimleme fırsatı sunmasıdır. Bu beklentinin gerçekleşmesi için öğretmenlerin yazılımlara ilişkin teknik bilgiye sahip olmalarının yanı sıra, yazılımların bu amaç doğrultusunda nasıl işe koşulabileceğini gösteren somut örneklere ihtiyaçları bulunmaktadır. Bu gerekçeden hareketle bu çalışmada, yazar tarafından ortaya koyulmuş araştırma türünden bir geometri probleminin, GeoGebra içerisinde gerçekleştirilmiş çözümü aşamalar halinde sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Dinamik geometri yazılımı, geometri öğretimi, ispat, problem çözme

DOI: 10.16949/turcomat.65927

Abstract: The national secondary school mathematics curriculum of Turkey, promulgated in 2013, encourages teachers to integrate dynamic geometry software into their classroom practices. One of the reasons for this request is that this kind of software offer teachers the opportunity to design learning environments in which students can experience the processes that constitutes mathematical exploration and proof. However, in order to exploit the possible advantages of integrating such software, teachers need the necessary technical knowledge about the software to be used and concrete examples of how it can be utilized as well. This study aims to contribute to the latter need by analyzing the solution steps of an open-ended geometry problem and exemplifying the role of the software in the solution process.

Keywords: Dynamic geometry software, geometry teaching, proof, problem solving

See Extended Abstract

1. Giriş

Teknolojinin eğitime olan yansımalarından biri, Euclid geometrisinin teorik nesnelerini bilgisayar vasıtasıyla somutlaştıran ve alanyazında dinamik geometri yazılımları (DGY) adıyla bilinen mikro dünyalardır. Matematik eğitimi alanında bu isim altında yararlanılmakta olan farklı yazılımlar bulunmakla birlikte (örn. Geometer's Sketchpad, Cabri Geometry, GeoGebra vb.) tümünün ortak özelliği, yazılım içerisinde oluşturulan geometrik nesneler üzerinde sürükleme, ölçüm ve dönüşüm yapabilmeye, herhangi bir nesnenin bir şarta göre geometrik yerini belirleyebilmeye olanak sağlamalarıdır. Bu özellikler matematiksel akıl yürütme ve araştırma sürecine farklı boyutlar katmış ve bu durumun bir sonucu olarak kalem-kağıt ortamında çözümü zor olan problemler incelenebilir hale gelmiştir (Cuoco & Goldenberg, 1997). Matematiksel aktivitenin yanı sıra, matematiksel öğrenme sürecinde DGY'nin rolünün ne olduğu ve bu sürece nasıl katkı sağlayabileceği matematik eğitimcileri için araştırma konuları olmuştur (Jones, 2000; Straesser, 2002).

[1] Yrd. Doç. Dr., Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, OFMAE Matematik Eğitimi, erdemcekmez@yahoo.com

Alanyazında benimsenen genel görüş DGY'nin geometri öğretimini zenginleştirme potansiyeline sahip olduğudur (Güven, 2008). Bu potansiyelin bir bölümünü yazılıma has olan özelliklerin matematiksel araştırma sürecinde sağladığı olanaklar oluşturmaktadır. Kullanıcı yazılım içerisinde kurduğu bir geometrik yapının[2] herhangi bir bağımsız elemanını hareket ettirdiğinde, yapının tamamı içerisinde yer alan ilişkiler korunacak şekilde değişmektedir. Bu durum öğrencilerin yazılım içerisinde özgürce deneysel gözlemler yapabilmelerine olanak vermektedir. Bu deneysel süreç yazılımın ölçme ve doğrulama olanakları ile birlikte düşünüldüğünde, öğrencilerin sezgisel çıkarımlar yapabileceği, varsayımlar ileri sürebileceği ve bu varsayımların geçerliliğini sayısal olarak sorgulayabilecekleri bir ortam oluşmaktadır (Christou, Mousoulides, Pittalis & Pitta-Pantazi, 2004).

Yukarıdaki olanaklar çerçevesinde Mariotti (2006), DGY'nin informel muhakeme ile formel ispat arasındaki ilişki için yeni ufuklar açtığını söylemektedir. Bu görüşün paralelinde Hoyles ve Jones (1998), geometrik kavramların DGY ortamında incelenmesinin öğrencileri, ürettikleri deneysel varsayımları formel ispat ile açıklama konusunda motive edebileceğini bildirmektedir. Yurt dışı alanyazında bu iddiaları destekler nitelikte, yazılım içerisinde elde edilen deneysel kanıtların formel ispat için esin kaynağı olma rolünü örneklendiren (bkz. Brucheimer & Arcavi, 2001; Christou ve ark., 2004; Furinghetti & Paola, 2003) çalışmalara rastlanmaktadır.

Ülkemizde 2013 yılında yürürlüğe giren Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı genelde bilgi iletişim teknolojilerinin, özelde DGY'nin öğretim sürecine dâhil edilmesini önermektedir. Program öğretmenlerden, öğrencilere matematiksel araştırma ve keşfetme süreçlerini yaşayabilecekleri ortamlar sağlamalarını istemektedir. Bu ortamların tasarlanabilmesi için öğretmenlerin hem kullanacakları yazılıma ilişkin teknik bilgiye, hem de yazılımların bu süreçteki potansiyelini gösteren somut örneklere ihtiyaçları bulunmaktadır. Yapılan bu çalışmada ikinci sırada ifade edilen ihtiyaca katkı sağlamak hedeflenmiştir. Bu doğrultuda çalışmanın amacı, DGY'nin deneysel doğrulamadan formel ispata uzanan matematiksel araştırma sürecine olan katkısını örneklendirmektir. Bu amaç doğrultusunda araştırmacı tarafından ortaya konan bir problemin bir DGY olan GeoGebra içerisinde gerçekleştirilen çözümü analiz edilmiştir.

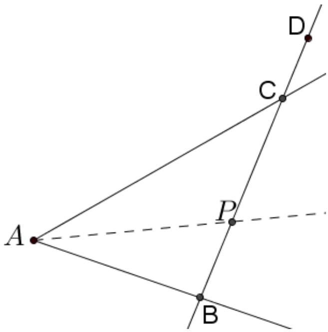
2. Problem

Bu araştırmada çözüm aranacak problem şu şekildedir;

> Düzlemde bir açı ve bu açının açıortayı üzerinde yer alan bir P noktası verilsin. P noktasından geçen ve açının kolları ile kesişen bir doğru çizilsin. Bu kesişim noktaları ile açının köşe noktasının belirlediği üçgenin alanının minimum olması için doğrunun sağlaması gereken şart nedir?

[2] Alanyazında yazılım içerisinde oluşturulan nesneler herhangi bir şarta bağlı değilse çizim, bir şart esas alınarak inşa edilmişse yapı olarak adlandırılmaktadır. Örneğin, rasgele oluşturulan bir üçgen çizim, eşit kenarlarının uzunlukları taban kenarının uzunluğunun iki katı olacak şekilde oluşturulan bir ikizkenar üçgen yapıdır.

Problemin grafiksel gösterimi Şekil 1'de resmedilmiştir. Şekil 1 içerisinde yer alan D noktası, P noktasından geçen keyfi doğruyu belirleyen ikinci noktadır. Alanını minimum yapmak istediğimiz üçgen ise ABC üçgenidir.



Şekil 1. Problemin grafiksel gösterimi

3. Çözüm Süreci

Takip eden kısımda problemin çözümü, araştırmacının yazılım içerisinde yaşadığı deneyimler ile birlikte verilecektir. Problemin çözümünün sunumu, içerisinde geçen matematiksel etkinliklerin doğası dikkate alınarak üç aşamada gerçekleştirilecektir. Bu aşamalar;

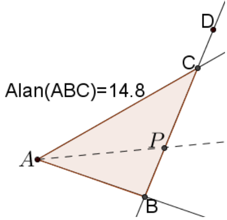
1. Deneysel gözlem aşaması: Yazılımın sürükleme ve ölçme özelliklerinin kullanılması ile problemin araştırılması.

2. Keşif aşaması: Formel ispata nereden başlanacağına ilişkin sezgi kazanılması.

3. Formel ispat aşaması: Ulaşılan sonuçların formel olarak ispatlanması.

3.1 Deneysel Gözlem Aşaması

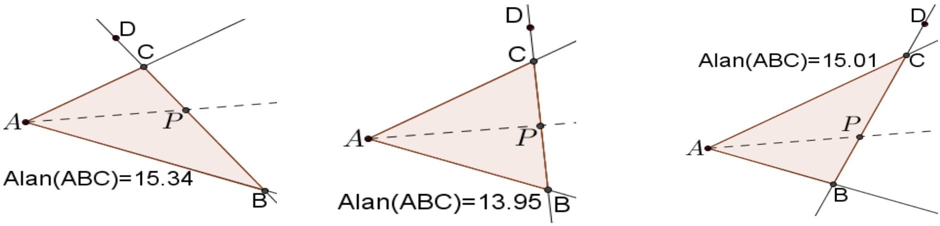
GeoGebra yazılımı içerisinde Şekil 1'deki yapıyı oluşturalım. Yazılımın çokgen komutunu kullanarak, A, B ve C noktalarının belirlediği üçgeni çizelim. Son olarak alan komutu vasıtasıyla ABC üçgeninin alanını hesaplattıralım (Şekil 2).



Şekil 2. Yapının oluşturulması ve üçgenin alanının belirlenmesi

Şekil 2'de görüldüğü üzere P noktasından geçen doğrunun mevcut konumu için oluşan üçgenin alanının değeri 14.8 br^2 dir. Doğruyu tanımlayan serbest D noktasını sürükleyerek

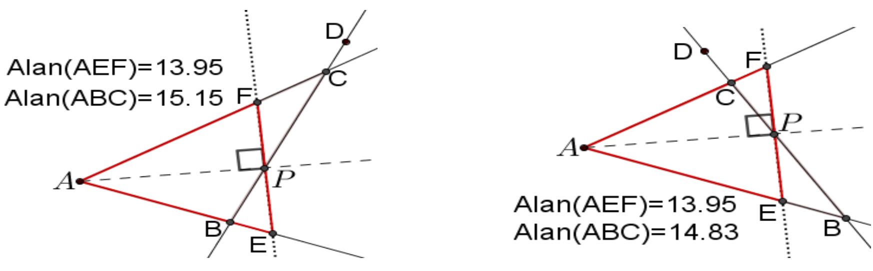
ABC üçgeninin alanının farklı durumlarda aldığı değerleri dinamik olarak bilgisayar ekranında gözlemleyebiliriz. Şekil 3'te D noktasının 3 farklı konumu için oluşan ABC üçgenlerinin alan değerleri görülmektedir.



a **b** **c**

Şekil 3. Doğrunun farklı durumları için üçgenin alan değerleri

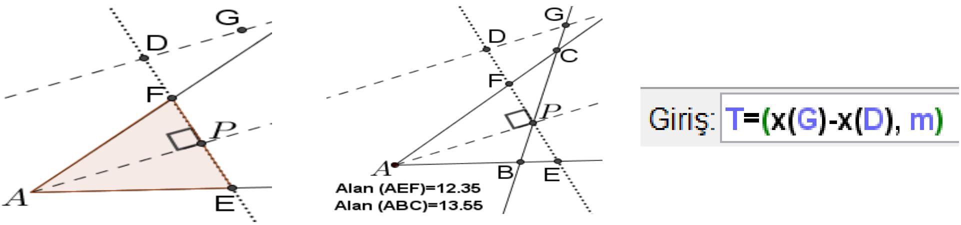
Yaptığımız gözlemler bize üçgenin alanının, doğrunun Şekil 3b'de görülen konumda bulunması halinde minimum olduğu izlenimini vermektedir. Şekil 3b'den görüldüğü üzere, bu aşamada doğrunun sağlaması gereken şarta ilişkin görsel veriden hareketle ulaşabileceğimiz en olası varsayım, doğrunun açıortay doğrusuna dik olduğu ya da AC ve AB doğru parçalarının eş olduğudur. Dolayısıyla, buraya kadar gerçekleştirdiğimiz adımların sonucunda ileri süreceğimiz ilk hipotez, istenen şartın doğrunun açıortay doğrusuna dik olduğudur. Şimdi ileri sürdüğümüz bu hipotezi deneysel olarak test edelim. Yazılım içerisinde P noktasından geçen ve açıortaya dik olan doğruyu çizerek oluşan üçgenin alanını hesaplattıralım. Ayrıca P noktasından geçen keyfi bir doğru daha çizerek bu doğrunun belirlediği üçgenin alanını da hesaplattıralım. Bu şekilde, minimum alana sahip olduğunu iddia ettiğimiz üçgenin alanı ile diğer üçgenlerin alanlarını kıyaslayarak varsayımımızın doğruluğunu test edebiliriz. Bu iddianın doğruluğu en basit anlamda, bilgisayar ekranında görülen keyfi üçgenlerin alanlarının sayısal değeri ile, ileri sürdüğümüz şartla oluşturulan üçgenin alanın değerinin izlenmesi ile gerçekleştirilebilir (Şekil 4).



a **b**

Şekil 4. Hipotezin ekrandaki veriler vasıtasıyla deneysel testi

Burada yazılımın Euclid geometrisi ile Analitik geometri arasında köprü kurma potansiyelini örneklendirmek adına, hipotezin deneysel testini gerçekleştirmede farklı bir yol izleyelim. Aynı zamanda izleyeceğimiz bu yöntemle olası tüm durumları da test etmiş olacağız. İlk olarak yine P noktasından açıortay doğrusuna dik bir doğru çizelim ve AEF üçgenini oluşturalım (Şekil 5a). Devamında bu dik doğru üzerinde keyfi bir D noktası alarak, bu noktadan açıortay doğrusuna paralel bir doğru çizelim ve bu paralel doğru üzerinde keyfi bir G noktası alalım (Şekil 5a). G ve P noktalarının belirlediği doğruyu çizerek bu doğrunun açının kolları ile kesişmesi sonucunda ortaya çıkan ABC üçgenini oluşturalım (Şekil 5b). Son olarak ABC ve AEF üçgenlerinin alanlarını hesaplattıralım (Şekil 5b). Bu yapıda G noktası serbest nesne olduğundan ABC üçgeni, G noktası üzerinde bulunduğu doğru üzerinde gezdikçe değişecektir.

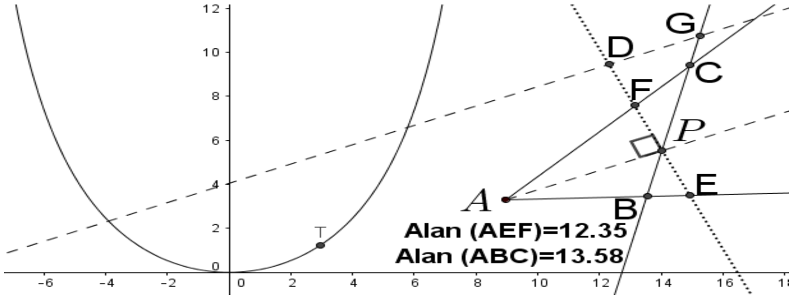


a b c

Şekil 5. Serbest G noktasına bağlı olarak ABC üçgeninin oluşturulması

Bundan sonra yapacağımız, D ile G noktalarının apsislerinin farkını ABC ile AEF üçgenlerinin alanları arasındaki fark ile ilişkilendirmektir. Bunun için ilk olarak G noktasının konumuna göre oluşan ABC üçgeninin alan değerinden AEF üçgeninin alan değerini çıkartalım ve bu sayısal değişkene yazılımda "*m*" adını verelim. Dolayısıyla G noktası hareket ettikçe *m* sayısal değeri de değişecektir. İkinci adımda bir T noktası tanımlayalım öyleki, T noktasının apsisi G noktasının apsisinden D noktasının apsisini çıkardığımızda elde ettiğimiz değere[3], ordinatı ise ABC üçgeninin alanından AEF üçgeninin alanını çıkardığımızda elde ettiğimiz değere (*m* değişkeninin değerine) eşit olsun. T noktasını oluşturmak için yazılımın giriş çubuğuna gireceğimiz komut Şekil 5c'de görülmektedir. Sonuç olarak T noktası, bağımsız değişkeni G ve D noktalarının apsislerinin farkı, bağımlı değişkeni G noktasının konumuna göre oluşan ABC üçgeninin alanı ile AEF üçgeninin alanının farkı olan fonksiyonu tanımlamaktadır. G noktası hareket ettikçe T noktası da hareket edecek, üstelik düzlemde izlediği yörünge bu fonksiyonun belirttiği eğri olacaktır. Bu eğriyi düzlemde oluşturmada yazılımın geometrik yer bulmak için kullanılan *yertanım* komutundan yararlanacağız. Yazılımda *yertanım* komutunu tıkladıktan sonra sırasıyla T ve G noktalarını seçtiğimizde elde ettiğimiz eğri T noktasının G noktasına göre geometrik yeri olacaktır. Şekil 6'da T noktasının geometrik yeri görülmektedir.

[3] Yazılım içerisinde bir A noktasının apsisinin sayısal değerini elde etmek için giriş çubuğuna yazılan komut x(A) dır. Örneğin A(1,2) noktası için x(A) komutu 1 sayısal değerini verir.



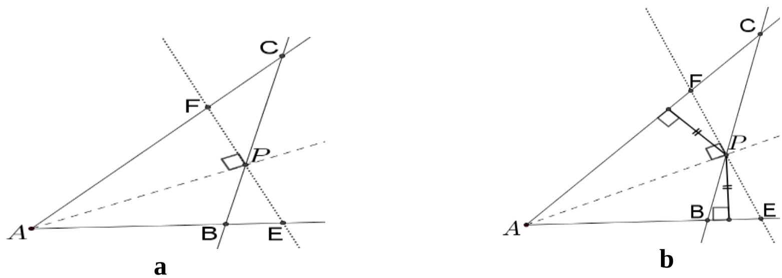
Şekil 6. T noktasının G noktasına göre geometrik yeri

Şekil 6'da görülen eğriden anlaşılacağı üzere G noktasının konumu nerede olursa olsun, oluşan ABC üçgeninin alanından AEF üçgeninin alanı çıkartıldığında elde edilen değer sıfırdan büyük veya eşittir. Sıfıra eşit olma durumu T noktasının apsisinin sıfır olması, yani G ile D noktalarının çakışması halinde gerçekleşmektedir. Sonuç olarak ileri sürdüğümüz varsayımı olası tüm durumları dikkate alarak deneysel olarak test etmiş olduk.

3.2 Keşif Aşaması

Bir önceki aşamada ileri sürdüğümüz varsayımı deneysel olarak doğruladık. Geriye kalan bu varsayımın formel olarak ispatlanmasıdır. Formel ispatın ortaya konması için ise, formel ispatın nereden ve nasıl başlayacağına, hangi temel fikir üzerine inşa edileceğine karar vermemiz gerekmektedir. Yurt dışı matematik eğitimi alanyazınında problem çözme ve ispat üzerine yayımlanmış araştırmalarda sıkça kullanılan iki terim keşifsel (heuristic) ve keşifsel akıl yürütmedir (heuristic reasoning). Polya keşifsel terimini "keşfetmeye hizmet eden" şeklinde bir sıfat olarak tanımlarken keşifsel akıl yürütmeyi ise, tamamlanmış ve eksiksiz olmaktan ziyade amacı bir problemin çözümünü keşfetmek olan geçici ve makul akıl yürütme olarak tanımlamaktadır (Polya, 1957, s.113). Takip eden kısımda araştırmacının formel ispat öncesinde geçirdiği keşifsel akıl yürütme süreci açıklanmıştır.

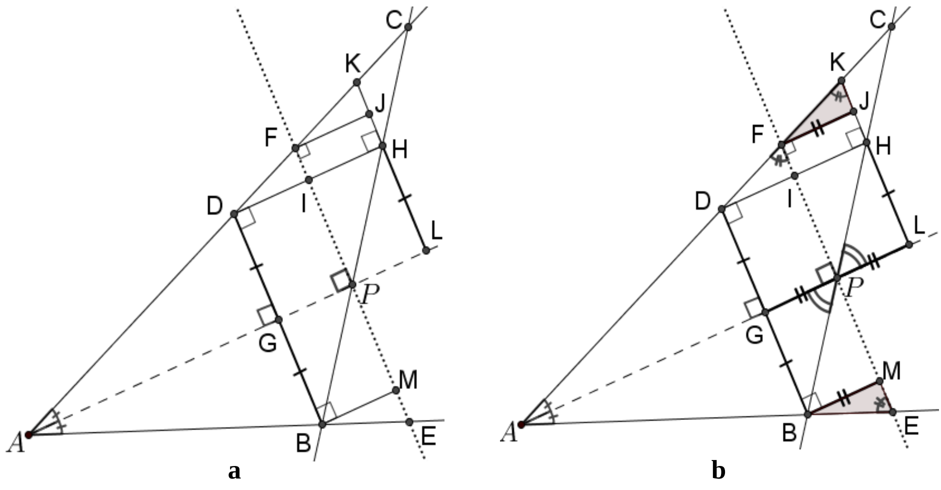
Bir önceki aşamada deneysel doğrulama ile ulaştığımız sonuçtan, minimum alanlı üçgenin P noktasından geçen doğrunun açıortay doğrusuna dik olduğu durumda oluştuğunu biliyoruz. Dolayısıyla Şekil 7a'dan görüldüğü üzere, P noktasından geçen doğru farklı bir konumda olduğunda oluşan ABC üçgeninin alanı AEF üçgeninin alanından büyük olmalıdır. Doğrunun hareketiyle AEF üçgeninin ABC üçgenine dönüştüğünü tasavvur edelim. Bu durumda AEF üçgenine nazaran kaybettiğimiz alan BPE üçgeninin alanı, kazandığımız alan ise FPC üçgeninin alanı olacaktır. P noktası açıortay doğrusu üzerinde bulunduğundan açının kollarına eşit uzaklıkta olup, dolayısıyla BPE ve FPC üçgenlerinin yükseklikleri eştir (Şekil 7b). Böylece eğer FC doğru parçasının uzunluğunun BE doğru parçasının uzunluğundan büyük olduğunu gösterirsek amacımıza ulaşmış oluruz.



Şekil 7. Keşifsel akıl yürütme süreci

3.3 Formel İspat Aşaması

Genelliği bozmayacağından, P noktasından geçen keyfi doğrunun açının üst kolunu Şekil 7a'da görüldüğü gibi F noktasının sağında yer alan bir C noktasında kestiğini varsayalım. Başka bir ifadeyle P noktasından geçen keyfi doğru açının üst kolunu F ile A noktaları arasında bir yerde kesmiş olsaydı, ortaya konacak ispat aşağıda sunulana benzer olacaktı.



Şekil 8. Formel İspata Yönelik Çizimler

Şekil 7a'da görülen yapıdan başlayarak sırasıyla B noktasından geçen ve açıortaya dik olan [BD]nı, B noktasında [BD]na dik olan [BM]nı, D noktasında [BD]na dik olan [DH]nı, H noktasında [DH]na dik olan [KL]nı ve son olarak F noktasında FE doğrusuna dik olan [FJ]nı çizelim (Şekil 8a). Bu durumda |BG|=|GD|=|HL| olur (Şekil 8a). Ortaya çıkan yapıda HPL üçgeni ile BPG üçgeni eş olduğundan |PL|=|GP| ve buradan |BM|=|FJ| elde edilir (Şekil 8b). FKJ ile BEM üçgenleri eş olduğundan |FK|=|BE| elde edilir (Şekil 8b). Son yazdığımız eşitlik bize |FC|>|BE| olduğunu söylemektedir. FPC ve PBE üçgenlerinin yükseklikleri eş olduğundan |FC|>|BE| eşitsizliği gereği FPC üçgeninin alanı

PBE üçgeninin alanından büyüktür. Dolayısıyla ABC üçgeninin alanı AFE üçgeninin alanından büyük olmalıdır. Böylece doğrunun sağlaması gereken şartın, P noktasında açıortay doğrusuna dik olması gerektiğini ispatlamış olduk.

4. Sonuç ve Öneriler

Matematik eğitiminin temel amaçlarından biri öğrencilere bir matematikçi gibi düşünebilme ve davranabilme becerilerini kazandırmaktır. Bu amacın gerçekleşmesi hiç kuşkusuz, öğrencileri matematiksel araştırma sürecinin temelinde yer alan, gözlem yapma, varsayımda bulunma, varsayımları test etme ve formel ispat oluşturma eylemlerini deneyimleyebilecekleri ortamlar içerisine dâhil etmekle mümkün olacaktır. Bu çalışmada araştırma türünden bir geometri problemi çerçevesinde örneklendirdiğimiz üzere, DGY öğrencilerin ifade edilen eylemleri deneyimleyebilecekleri ortamları oluşturma potansiyeline sahiptir. Yazılımın sunduğu ölçüm yapma, sürükleme ve geometrik yer bulma gibi olanaklar formel ispat öncesinde problem içerisinde yer alan ilişkileri keşfetmeye ve test etmeye imkan sunmaktadır. Geometri alanında problem çözmeye ilişkin alanyazında ifade edilen görüş, öğrenciler tarafından keşfedilen ve doğrulanan bir sonucun ispatlanmasının, doğrudan verilen bir sonucu ispatlamaya çalışmalarıdan daha anlamlı olduğudur (Mogetta, Olivero & Jones, 1999). Bu görüşten hareketle öğrencilerin, bu çalışmada örneklendirdiğimiz türden problem çözme ortamlarının tasarlanarak sunulması, yukarıda ifade edilen matematik eğitiminin temel amacına olumlu katkı sağlayacaktır.

DGY'nin matematiksel araştırma sürecinde deneysel gözlem ve doğrulama gerçekleştirme hususunda sunduğu imkanlar bazı eğitimcilerde, geometri öğretiminde tümdengelimsel ispat yaklaşımının terk edilerek yerini deneysel doğrulamaya bırakması yönünde bir inanışın oluşmasına sebep olmuştur (Hanna, 2000). Bu şekilde keskin bir ayrımı doğru bulmamakla beraber, problem çözmede deneysel doğrulamadan sonra formel ispat aşamasının ele alınıp alınmaması kararının bizzat öğretmenler tarafından, öğrencilerinin hazır bulunuşluk ve matematiksel beceri seviyeleri temelinde karar verilmesi en doğrusu olacaktır. Bu çalışmada ele alınan problem bağlamında düşünüldüğünde, hazır bulunuşluk ve matematiksel becerileri düşük olan öğrenci grupları için deneysel gözlem aşamasında gerçekleştirilen etkinlikler yeterli olabilecekken, daha ileri seviyelerde bulunan öğrencilerden elde edilen varsayımların formel anlamda ispatlanması istenebilir. Bununda ötesinde matematiğe karşı yüksek derecede ilgi ve kabiliyet sergileyen öğrenciler, formel ispat aşamasından sonra probleme ilişkin olası genellemeleri araştırmaya yönlendirilebilir. Örneğin bu öğrencilerden, ele aldığımız problemde ulaştığımız sonucun P noktasının üzerinde yer aldığı doğrunun açıortay olmaması durumunda da geçerli olup olmadığını sorgulamaları istenebilir. Böylece her seviyeden öğrenciye, yeteneği ve kabiliyeti ile doğru orantılı olarak matematik yapabilme hazzını tattırmak mümkün olacaktır.

The Potential of Dynamic Geometry Software in Bridging the Link between Experimental Verification and Formal Proof

Extended Abstract

One of the innovations that technology has brought to mathematics education is a special kind of software called dynamic geometry software (DGS), which has the ability to embody abstract entities of Euclidean geometry. There are a number of computer programs (e.g. Cabri geometry, GeoGebra, Geometer's Sketchpad) that are currently being used and their common characteristic is that they give the user the ability to drag, manipulate, and to make measurements of objects as well as to find the locus of points that are subject to some constraints. These new features have provided unique opportunities into mathematical exploration and reasoning, and as a result, it became possible to search solutions of some mathematical problems which are extremely hard or impossible to deal with in a pencil-paper environment (Cuoco & Goldenberg, 1997). Apart from mathematical activity, the question of how DGS can be effectively used in mathematics classrooms has gained interest from researchers of mathematics education (Jones, 2000; Straesser, 2002).

The general consensus in the mathematics education literature is that DGS has the potential to enrich geometry instruction (Güven, 2008). One source of this potential is the facilities that DGS offer to users in the process of mathematical investigation. After a construction is built, if the user moves an independent element of the construction the whole construction changes in a way that the relations within the construction maintained. This feature provides students an environment in which they can freely make experimental observations. By incorporating the measurement and verification capabilities of the software into this experimental observation process, students will have the opportunity to give intuitive arguments, to produce hypothesis, and to test their hypothesis numerically (Christou, Mousoulides, Pittalis & Pitta-Pantazi, 2004).

Mariotti (2006) stated that the facilities of DGS mentioned above have opened new horizons on the relation between informal argumentation and formal proof. Hoyles and Jones (1998) asserted that having students investigate geometric relations in DGS environment can motivate them to produce formal proofs to explain their informal arguments. In the literature, there are studies that exemplify the role of the DGS in producing formal proofs based on the experimental evidence reached within the software.

The national secondary school mathematics curriculum of Turkey, promulgated in 2013, encourages teachers to integrate dynamic geometry software into their classroom practices. The curriculum encourages teachers to design learning environments in which students can experience the processes that constitutes mathematical exploration and proof. However, in order to exploit the possible advantages of integrating such software, teachers need the necessary technical knowledge about the software to be used and concrete examples of how it can be utilized as well. This study aims to contribute to the latter need by analyzing the solution steps of an open-ended geometry problem produced by the author and

exemplifying the role of the software in the solution process. To this end, the problem that will be investigated in this study is as follows:

> Given an angle formed by two rays with common vertex, and a point *P* that lies on the angle bisector of the angle. Let *d* be a line which passes through P and intersects with both rays that form the angle. What is the condition that *d* should satisfy so that the triangle formed by the intersection points of d with the rays, and the vertex point has minimum area.

The graphical representation of the problem is given in fig.1

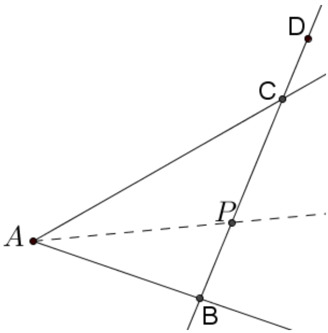


Figure 1. The depiction of the problem

The solution of the problem divided into three phases that differ from each other in terms of the nature of the mathematical activities involved. These phases are, in order of occurrence during the solution process, experimental observation, heuristic, and formal proof. In the experimental observation phase the author, by using the measurement and dragging features of the software, reached a tentative solution to the problem. Moreover in this phase the author experimentally verified the solution by using the locus tool of the software. In the heuristic phase, the author searched for the idea on which the proof will be based, and in the formal proof phase the author provided a formal proof. Consequently, it was found that line *d* must be perpendicular to the angle bisector so that the resulting triangle have the minimum area.

The possibilities DGS offer in performing experimental justification and verification have caused some educators to believe that deductive approach should be abandoned in favor of an experimental approach in the teaching of geometry (Hanna, 2000). The author does not advocate such segregation in the teaching of geometry; instead the author thinks that the level of sophistication of the mathematical activity should be decided by the teacher based on students' levels of knowledge and their mathematical ability. As exemplified in this study, the software has the potential to offer teachers an opportunity to design learning settings with different levels of mathematical sophistication.

Kaynaklar/References

Bruckheimer, M., & Arcavi, A. (2001). A Herrick among mathematicians or dynamic geometry as an aid to proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(1), 113-126.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(3), 339-352.

Cuoco, A. A., & Goldenberg, E. P. (1997). Dynamic geometry as a bridge from Euclidean geometry to analysis. In J. King & D. Schattschneider (Eds.) *Geometry turned on: Dynamic software in learning, teaching and research* (pp. 33-46). MAA NOTES

Furinghetti, F., & Paola, D. (2003). To produce conjectures and to prove them within a dynamic geometry environment: A case study. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 397-404.

Guven, B. (2008). Using dynamic geometry software to gain insight into a proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(3), 251-262.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics, 44*(1-2), 5-23.

Hoyles, C. & Jones, K. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp.121-128). London, Springer.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational studies in mathematics, 44*(1), 55-85.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publishers

MEB (2013). Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı. Ankara

Mogetta, C., Olivero, F., & Jones, K. (1999). Providing the motivation to prove in a dynamic geometry environment. *Proceedings of the British society for research into learning mathematics, 19*(2), 91-96.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical thought* (2nd ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press

Straesser, R. (2002). Cabri-Geometre: Does dynamic geometry software (DGS) change geometry and its teaching and learning?. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 319-333.

Kaynak Gösterme

Çekmez, E. (2016). Deneysel doğrulamadan formel ispata uzanan süreçte dinamik geometri yazılımlarının potansiyeli. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi, 7*(1), 24-34.

Citation Information

Çekmez, E. (2016). The potential of dynamic geometry software in bridging the link between experimental verification and formal proof. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 7*(1), 24-34.