

BİR REEL ALÇAK FREKANSLI SÖNÜMLÜ SINÜSÜN PARAMETRELERİNİN KESTİRİMİNE İLİŞKİN EN KÖTÜ VE EN İYİ DURUMLARDAKİ CRAMÉR-RAO SINIRLARI İÇİN BASİT İFADELER

*Ersen YILMAZ**

*Erdoğan DİLAVEROĞLU**

Özet: Reel toplanır beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümlü sinüsün parametrelerinin kestirimine ilişkin Cramér-Rao sınırları sinüsün fazı değişirken incelenmiş ve sınırların alacağı en büyük ve en küçük değerler ile karşılık gelen kritik faz değerleri için basit ifadeler sunulmuştur. İfadeler kritik sınır değerleri arasındaki farkın oldukça önemli hale geldiği Fourier limitinden küçük frekanslar için geçerlidir.

Anahtar Kelimeler: Parametre kestirimi, Cramér-Rao sınırı, sönümlü sinüs, alçak frekanslı sinüs.

Simple Expressions for Worst and Best Case Cramér-Rao Bounds for Estimating the Parameters of a Real Low-Frequency Damped Sinusoid

Abstract: The Cramér-Rao bounds for estimating the parameters of a real damped sinusoid in real additive white Gaussian noise are examined as the phase of the sinusoid varies, and simple expressions are presented for the largest and the smallest values of the bounds and for the corresponding critical phase values. The expressions are valid for frequencies smaller than the Fourier limit, in which case the difference between the critical bounds becomes remarkably significant.

Key Words: Parameter estimation, Cramér-Rao bound, damped sinusoid, low-frequency sinusoid.

1. GİRİŞ

Cramér-Rao (C-R) sınırı herhangi bir yansız kestiricinin değışintisi için bir alt sınır belirtir (Van Trees, 1968). Bundan dolayı, C-R sınırı pratik kestiricilerin başarımını değerlendirmede bir denek taşı olarak sıkça kullanılmaktadır. Reel toplanır beyaz Gauss gürültü içindeki bir reel sönümlü sinüsün parametrelerinin (genlik, faz, sönüm katsayısı ve frekansının) kestirimine ilişkin C-R sınırları Yao ve Pandit (1995) kaynağında çıkarılmıştır. Sinüsün frekansının Fourier limitinden (periodogram kestiricisi kullanılarak kestirilebilecek en düşük frekans değerinden) daha küçük olması halinde, sınırların sinüsün fazına kuvvetli bir biçimde bağlı olduğu görülebilir. Dolayısıyla, bu alçak frekans rejimi için, sınırların en büyük ve en küçük değerlerini veren kritik faz değerlerinin, yani, en kötü ve en iyi kestirim durumlarına tekabül eden faz değerlerinin, tespit edilmesi önem kazanmaktadır. Problemin herhangi bir parametreye ilişkin C-R sınırı için bir çözümü sınırın sinüsün fazına olan bağımlılığını açık bir biçimde veren (matrisel olmayan) bir ifadesinin çıkarılmasını gerektirir. Dahası, bu bağımlılık kritik faz değerlerinin analitik olarak tespit edilmesine olanak verecek şekilde basit olmalıdır. Yazarların son zamanlarda yayınlanan bir makalesinde (Yılmaz ve Dilaveroğlu (2004)) burada ele alınan C-R sınırları için, sınırların sinüsün fazına olan bağımlılıklarını basit bir biçimde veren, matrisel olmayan, analitik ifadeler çıkarılmıştır. Bu makalede bu sınır ifadeleri sinüsün frekansının küçük olması durumu için analiz edilmiştir. C-R sınırlarının en büyük ve en küçük değerlerini ve bu değerlere karşılık düşen kritik faz değerlerini veren basit ifadeler sunulmuştur. İfadeler sinüsün frekansının Fourier limitinden daha küçük olması durumunda geçerlidir.

* Uludağ Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Elektronik Mühendisliği Bölümü, Görükle, Bursa.

2. VERİ MODELİ

Bu makalede reel beyaz Gauss gürültüsü ekli tek bir reel sönümlü sinüsten oluşan aşağıdaki zaman serisi veri modeli ele alınmıştır:

$$y(t) = \alpha_0 e^{-\beta_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + e(t), \quad t = n, K, n + N - 1 \quad (1)$$

Burada, α_0 sinüsün genliğini, β_0 sönüm katsayısını, $\omega_0 \in (0, \pi)$ frekansını, φ_0 fazını göstermektedir; $e(t)$ ortalaması sıfır ve değişintisi σ^2 olan beyaz Gauss gürültüsünü temsil etmektedir; N toplam örnek sayısıdır ve n örnekleme indisi t 'nin ilk değeridir.

Tüm model parametreleri α_0 , β_0 , ω_0 , φ_0 ve σ^2 bilinmiyor varsayılmıştır ve bu parametreler eldeki N adet örnek değeri $y(n), K, y(n + N - 1)$ kullanılarak kestirilecektir.

3. KRİTİK C-R SINIRLARI VE KRİTİK FAZ DEĞERLERİ

(1) modeline ilişkin C-R sınırlarını φ_0 fazının basit birer fonksiyonu biçiminde veren matrissel olmayan ifadeler Yılmaz ve Dilaveroğlu (2004) kaynağında çıkarılmıştır. Bu ifadelerden sönüm katsayısı ve frekans parametrelerine ilişkin C-R sınırlarının, φ_0 fazının fonksiyonları biçiminde düşünüldüklerinde, birbirlerinin ötelenmiş halleri oldukları görülebilir. Bu iki sınırın en büyük değerleri ve en küçük değerleri aynıdır ve, aynı zamanda, sınırlardan biri en büyük değerini aldığı anda diğeri en küçük değerini almaktadır, yani, bir sınıra ilişkin en kötü (en iyi) faz değeri diğeri sınıra ilişkin en iyi (en kötü) faz değeri olmaktadır. Aynı ilişki, genlik sınırı α_0^2 ile bölünmek şartıyla, genlik ve faz parametrelerine ilişkin C-R sınırları arasında da vardır. Dolayısıyla, burada sadece genlik ve frekans parametrelerine ilişkin kritik C-R sınırlarını ve kritik faz değerlerini veren ifadeleri sunacağız.

Yılmaz ve Dilaveroğlu (2004) kaynağındaki sonuçlardan C-R genlik ve frekans sınırlarının en büyük ve en küçük değerleri ile bu değerlere karşılık düşen kritik faz değerlerini veren ifadeler elde edildikten sonra, bu ifadelerde gözükten frekansa bağlı fonksiyonlar $\omega_0 = 0$ civarındaki Taylor serileri cinsinden yazılmıştır. Cebirsel işlemlerden sonra, küçük ω_0 değerleri için, aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur: Genlik kestirimi için

$$[\text{SINIR}]_{\text{EN KÖTÜ}} = \frac{M}{(1/2\sigma^2) \cdot N} \frac{1}{(N \cdot \omega_0)^6} + O\{(N \cdot \omega_0)^{-4}\} \quad (2)$$

$$[\text{SINIR}]_{\text{EN İYİ}} = \frac{m}{(1/2\sigma^2) \cdot N} + O\{(N \cdot \omega_0)^2\} \quad (3)$$

$$[\text{FAZ}]_{\text{EN KÖTÜ}} = \frac{\pi}{2} - p \cdot (N \cdot \omega_0)^3 + O\{(N \cdot \omega_0)^5\} \quad (4)$$

$$[\text{FAZ}]_{\text{EN İYİ}} = -p \cdot (N \cdot \omega_0)^3 + O\{(N \cdot \omega_0)^5\} \quad (5)$$

Frekans kestirimi için

$$[\text{SINIR}]_{\text{EN KÖTÜ}} = \frac{M'}{\text{SGO} \cdot N^3} \frac{1}{(N \cdot \omega_0)^4} + O\{(N \cdot \omega_0)^{-2}\} \quad (6)$$

$$[\text{SINIR}]_{\text{EN İYİ}} = \frac{m'}{\text{SGO} \cdot N^3} \frac{1}{(N \cdot \omega_0)^2} + O\{1\} \quad (7)$$

$$[\text{FAZ}]_{\text{EN KÖTÜ}} = \frac{\pi}{2} - p' \cdot (N \cdot \omega_0) + O\{(N \cdot \omega_0)^3\} \quad (8)$$

$$[\text{FAZ}]_{\text{EN İYİ}} = -p' \cdot (N \cdot \omega_0) + O\{(N \cdot \omega_0)^3\} \quad (9)$$

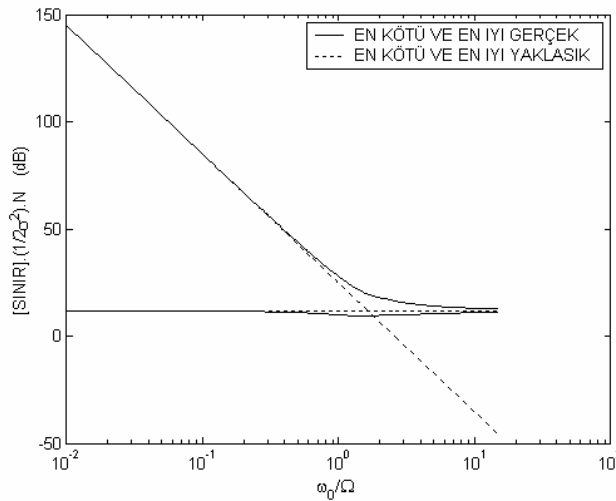
Burada SGO sinüsün sinyal gürültü oranını göstermektedir: $SGO = \alpha_0^2 / 2\sigma^2 \cdot M, m, p, M', m'$ ve p' sabitlerinin tanımları ekte verilmiştir. Bu sabitler ω_0 frekansından bağımsızdır ve sadece β_0 sönüm katsayısına ve N toplam veri sayısına bağlıdır. Faz değerleri, C-R sınırları φ_0 fazının π periyodu ile periyodik fonksiyonları olduğundan, $\varphi_0 \in (-\pi/2, \pi/2]$ aralığında verilmiştir.

Sonuçlardaki sınırların ω_0 'ın ters kuvvetlerine olan bağımlılığının $(N \cdot \omega_0)$ çarpımı yoluyla olması, sınırların ω_0 'dan ziyade $(N \cdot \omega_0)$ 'ın küçük olması halinde büyük olacağını göstermektedir. Bu ise, ω_0 'ın küçük olması durumunda, toplam veri sayısı N 'nin önemini göstermektedir.

(2) ve (3) ifadeleri, küçük ω_0 frekansları için, en büyük C-R genlik (faz) sınırının $(N \cdot \omega_0)^{-6} / N$ ile ve en küçük C-R genlik (faz) sınırının $1/N$ ile doğru orantılı olduğunu göstermektedir. (6) ve (7) ifadeleri, küçük ω_0 frekansları için, en büyük C-R frekans (sönüm katsayısı) sınırının $(N \cdot \omega_0)^{-4} / N^3$ ile ve en küçük C-R frekans (sönüm katsayısı) sınırının $(N \cdot \omega_0)^{-2} / N^3$ ile doğru orantılı olduğunu göstermektedir.

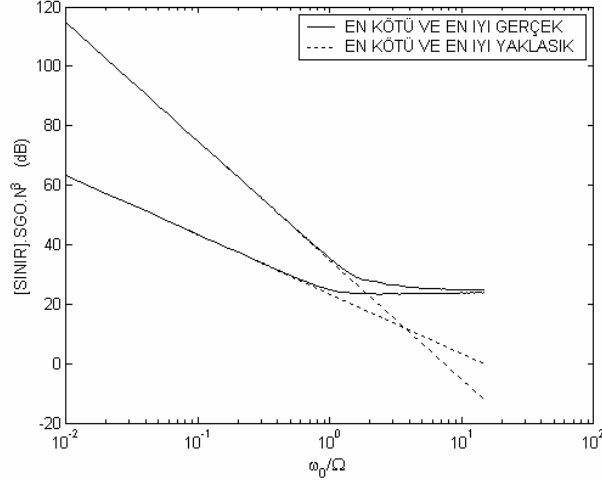
Örnek: Sönüm katsayısının $\beta_0 = 0.1$, toplam veri sayısının $N = 30$ ve ilk örnekleme indisinin, genel olarak seçilen, $n = 1$ olduğu durumu ele alalım. (2) ve (3) ifadeleriyle verilen en büyük ve en küçük sonuçlardaki genlik sınırları Şekil 1'de gösterilmiştir. (6) ve (7) ifadeleriyle verilen en büyük ve en küçük sonuçlardaki frekans sınırları Şekil 2'de gösterilmiştir. Şekillerdeki sürekli eğriler sınırların gerçek (tam) değerlerini, kesikli doğrular sınırların sonuçlardaki değerlerini göstermektedir. Şekillerdeki yatay eksen ω_0 frekansının Ω Fourier limiti ($\Omega = \pi/N$) cinsinden değerini (ω_0/Ω değerini) göstermektedir. Gerçek sınırların sonuçlardaki sınırları ω_0/Ω 'nın küçük değerleri için yakından takip ettiği görülmektedir. Sınırların en büyük ve en küçük değerleri arasındaki farkın $\omega_0/\Omega < 1$ aralığında büyük olması bu bölgede sınırların faza kuvvetli bir biçimde bağlı olduğunu göstermektedir. $\omega_0/\Omega > 1$ için bu fark küçüktür ve sınırların faza olan bağımlılığı bu ikinci bölgede ihmal edilebilir.

Genlik kestirimine ilişkin kritik faz değerlerinin gerçek ve (4) ve (5) ifadeleriyle verilen tek terimli yaklaşık değerleri Şekil 3'te gösterilmiştir. Frekans kestirimine ilişkin kritik faz değerlerinin gerçek ve (8) ve (9) ifadeleriyle verilen tek terimli yaklaşık değerleri Şekil 4'te gösterilmiştir. Şekillerdeki yatay eksen ω_0/Ω oranlanmış frekansını ilgilendiren $\omega_0/\Omega < 1$ aralığı için göstermektedir. İlk terimlerin gerçek kritik faz değerlerinin hassas bir biçimde tespiti için yeterli olduğu görülmektedir.



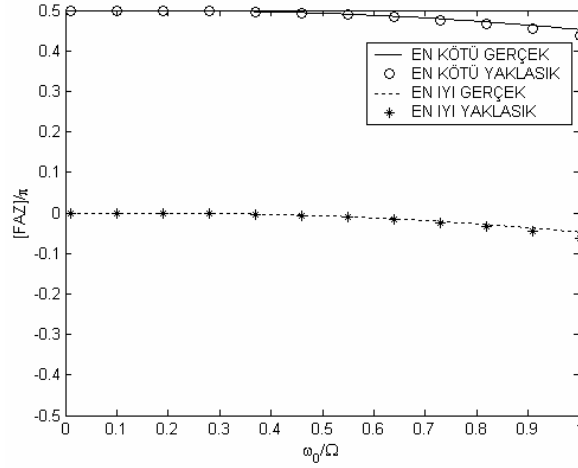
Şekil 1:

Bir reel sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük oranlanmış gerçek ve sonuçlardaki C-R sınırlarının sinüsün frekansı ω_0 ile değişimi. Sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.1$, toplam örnek sayısı $N = 30$ ve ilk örnekleme indisi $n = 1$ alınmıştır.



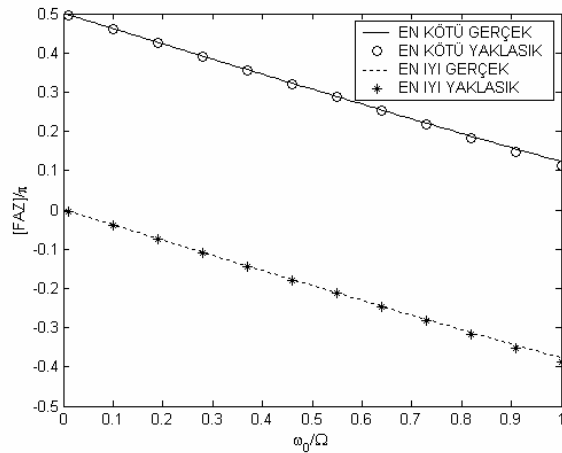
Şekil 2:

Bir reel sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük oranlanmış gerçek ve sonuşurdaki C-R sınırlarının sinüsün frekansı ω_0 ile değişimi. Sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.1$, toplam örnek sayısı $N = 30$ ve ilk örnekleme indisi $n = 1$ alınmıştır.



Şekil 3:

Bir reel sönümlü sinüsün genlik kestirimine ilişkin en kötü ve en iyi durumlardaki gerçek ve tek terimli yaklaşık faz değerlerinin sinüsün frekansı ω_0 ile değişimi. Sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.1$, toplam örnek sayısı $N = 30$ ve ilk örnekleme indisi $n = 1$ alınmıştır.



Şekil 4:

Bir reel sönümlü sinüsün frekans kestirimine ilişkin en kötü ve en iyi durumlardaki gerçek ve tek terimli yaklaşık faz değerlerinin sinüsün frekansı ω_0 ile değişimi. Sönüm katsayısı $\beta_0 = 0.1$, toplam örnek sayısı $N = 30$ ve ilk örnekleme indisi $n = 1$ alınmıştır.

4. SONUÇLAR

Bu makalede reel beyaz Gauss gürültüsü eklenmiş bir reel sönümlü sinüsün parametrelerinin kestirimine ilişkin en büyük ve en küçük C-R sınırlarının ve karşılık düşen kritik faz değerlerinin basit yaklaşık ifadeleri sunulmuştur. Bu ifadeler, kritik sınır değerleri arasındaki farkın önemli olduğu, sinüsün frekansının Fourier limitinden daha küçük olması durumunda geçerlidir. Kritik sınır ifadeleri, aynı zamanda, sınırların alçak frekans rejimindeki davranışını daha iyi anlamamızı da sağlamaktadır. Kritik faz değerleri alçak frekans rejimi için tasarlanmış yansız kestiricilerin başarımını test etmede en kötü ve en iyi kestirim senaryolarının hızlı bir biçimde oluşturulması için kullanılabilir.

5. EK

Bu ekte, (2)-(9) ifadelerinde gözüken M , m , p , M' , m' ve p' sabitlerinin tanımları verilmiştir. Bu sabitler, $k = 0, K, 6$ için

$$\Gamma_k = \frac{1}{N^{k+1}} \sum_{t=n}^{n+N-1} t^k e^{-2\beta_0 t}$$

olmak üzere, aşağıdaki biçimde tanımlanmışlardır:

$$\begin{aligned} M &= 288(\Gamma_2^3 + \Gamma_0\Gamma_3^2 + \Gamma_1^2\Gamma_4 - 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 - \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_4) / \\ & \quad (-\Gamma_3^4 - \Gamma_2^2\Gamma_4^2 + \Gamma_0\Gamma_4^3 - \Gamma_1^2\Gamma_5^2 + \Gamma_2^3\Gamma_6 + \Gamma_1^2\Gamma_4\Gamma_6 + 3\Gamma_2\Gamma_3^2\Gamma_4 \\ & \quad + 2\Gamma_1\Gamma_3^2\Gamma_5 + \Gamma_0\Gamma_3^2\Gamma_6 - 2\Gamma_2^2\Gamma_3\Gamma_5 - 2\Gamma_0\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5 - 2\Gamma_1\Gamma_3\Gamma_4^2 \\ & \quad - 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_6 + 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_4\Gamma_5 + \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_5^2 - \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_4\Gamma_6) \\ m &= \frac{\Gamma_3^2 - \Gamma_2\Gamma_4}{2(\Gamma_2^3 + \Gamma_0\Gamma_3^2 + \Gamma_1^2\Gamma_4 - 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 - \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_4)} \\ p &= \frac{\Gamma_3^3 + \Gamma_1\Gamma_4^2 + \Gamma_2^2\Gamma_5 - 2\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4 - \Gamma_1\Gamma_3\Gamma_5}{24(\Gamma_2^3 + \Gamma_0\Gamma_3^2 + \Gamma_1^2\Gamma_4 - 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 - \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_4)} \\ M' &= \frac{M}{4} \\ m' &= \frac{2(\Gamma_1^2 - \Gamma_0\Gamma_2)}{\Gamma_2^3 + \Gamma_0\Gamma_3^2 + \Gamma_1^2\Gamma_4 - 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 - \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_4} \\ p' &= \frac{\Gamma_2^2\Gamma_3 - \Gamma_1\Gamma_3^2 + \Gamma_0\Gamma_3\Gamma_4 + \Gamma_1^2\Gamma_5 - \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_4 - \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_5}{6(\Gamma_2^3 + \Gamma_0\Gamma_3^2 + \Gamma_1^2\Gamma_4 - 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 - \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_4)} \end{aligned}$$

6. KAYNAKLAR

1. Van Trees, H. L. (1968) (Detection, Estimation and Modulation Theory), Wiley, New York.
2. Yao, Y. ve Pandit, S. M. (1995) Cramér-Rao lower bounds for a damped sinusoidal process, (IEEE Transactions on Signal Processing), 43(4), 878-885.
3. Yılmaz, E. ve Dilaveroğlu, E. (2004) Bir reel sönümlü sinüs için matrisel olmayan Cramér-Rao sınır ifadeleri, (ELECO Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu), Bursa.