



## Investigation of fracture behaviour of one-dimensional functionally graded plates by using peridynamic theory

Kadir Kaya<sup>1</sup>, İbrahim Olmuş<sup>2</sup>, Mehmet Dördüncü<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Erciyes University, 38039, Kayseri, Türkiye

<sup>2</sup>Turkish Aerospace Industries- TAI, Fethiye Mahallesi, Havaçılık Bulvarı No:17 06980 Kahramankazan, Ankara, Türkiye

### Highlights:

- Ordinary State Based Formulation is used for the fracture behavior of one dimensional functionally graded (FG) plates
- A power law method is used for the effective material properties of FG plates
- Effect of material distributions on the fracture behavior of FG plates is investigated

### Keywords:

- Functionally graded materials
- peridynamic theory
- crack

### Article Info:

Research Article

Received: 27.10.2021

Accepted: 03.02.2022

### DOI:

10.17341/gazimmfd.1015703

### Acknowledgement:

The authors would like to thank TUBITAK (Grant No. 219M207) and Erciyes University Scientific Research Projects Coordination Unit (Grant No. 11070) for their support.

### Correspondence:

Author: Mehmet Dördüncü  
e-mail:  
dorduncu@erciyes.edu.tr  
phone: +90 352 207 6666 /  
32155

### Graphical/Tabular Abstract

This study investigates the effect of the one-dimensional material variations in the functionally graded (FG) plates on the crack onset and evolution by using the PeriDynamic (PD) theory. It is observed that the strength of the structure can be enhanced by controlling the material distributions. The material variations play an important role on the fracture behavior of the FG plate (Figure A).

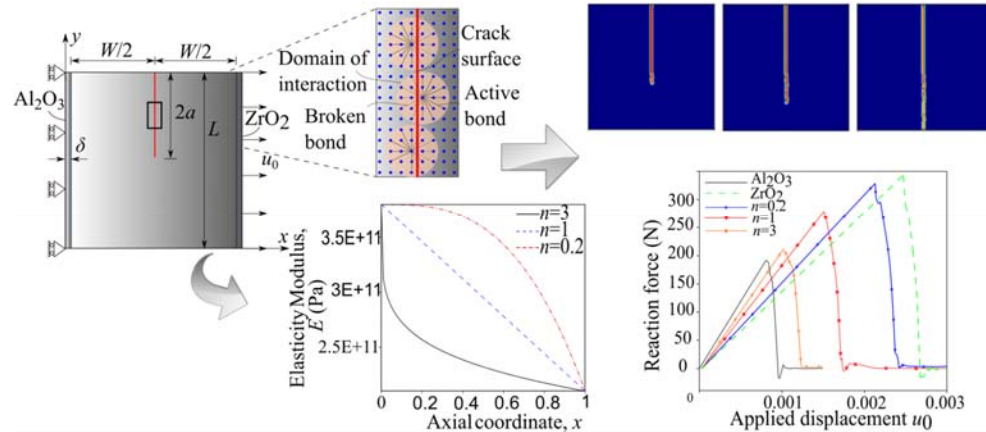


Figure A. The fracture analysis of one-dimensional functionally graded plates

### Purpose:

This study aims to investigate the influence of material distributions on the damage nucleation and propagation of one-dimensional functionally graded (FG) plates by using improved Ordinary State Based (OSB) PD formulation.

### Theory and Methods:

Fracture behavior of one-dimensional FG plates is examined by employing OSB PD formulations. The present OSB PD formulation provides further improvement in the accuracy of the analysis with the elimination of correction factors available in the previous PD formulations. The smooth transition between the material layers in the FG plate is achieved through a power law method. The adaptive dynamic relaxation (ADR) method is employed for the quasi-static response of FG plates.

### Results:

The influence of the material variations on the fracture behavior of the FG plates under displacement constraints is investigated in detail. The robustness of the present approach is demonstrated by monitoring the fracture behavior of the isotropic and FG plates.

### Conclusion:

The improved OSB PD formulation can successfully capture the expected mixed-mode behavior of FG plates and their corresponding critical load levels. Elasticity modulus and fracture toughness play an important role on the fracture behavior of the FG plates. A faster crack propagation is observed with increasing the fracture toughness levels in the FG plates. Consequently, optimum structures under loading conditions can be achieved within the light of the FG concept.



## Bir yönlü fonksiyonel kademelenendirilmiş plakaların kırılma davranışlarının peridinamik teorisi kullanılarak incelenmesi

Kadir Kaya<sup>1</sup>, İbrahim Olmuş<sup>2</sup>, Mehmet Dördüncü<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Erciyes Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 38039, Kayseri, Türkiye

<sup>2</sup>Türk Havacılık ve Uzay Sanayii AŞ – TUSAŞ, Fethiye Mahallesi, Havacılık Bulvarı No:17 06980 Kahramankazan, Ankara, Türkiye

### Ö N E Ç İ K A N L A R

- Tek boyutlu fonksiyonel derecelendirilmiş (FG) plakaların kırılma davranışı için Normal Durum Bazlı Formülasyon kullanıldı
- FG plakalarının etkin malzeme özellikleri için bir güç yasası yöntemi kullanılmıştır
- Malzeme dağılımlarının FG plakalarının kırılma davranışı üzerindeki etkisi araştırıldı

### Makale Bilgileri

Araştırma Makalesi

Geliş: 27.10.2021

Kabul: 03.02.2022

### DOI:

10.17341/gazimmfd.1015703

### Anahtar Kelimeler:

Fonksiyonel kademelenendirilmiş malzemeler, peridinamik teorisi, çatlak

### ÖZ

Kompozit malzemeler, sahip oldukları hafiflik ve yüksek dayanım gibi arzu edilir özelliklerinden dolayı havacılık ve uzay, askeri ve nükleer gibi mühendislik alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Farklı malzemeler arasındaki ara yüzlerdeki malzeme özelliklerinden kaynaklanan uyumsuzluklar gerilme yığılmalarına neden olabilmektedir. Bu nedenle, çatlak oluşumu ve tabakalar arası ayrılmalar gözlemlenebilmektedir. Fonksiyonel kademelenendirilmiş malzeme (FKM) kavramında, bir veya birkaç koordinat yönünde değişen bir elde etmeyi amaçlamaktadır. Bu sürekli değişim, Fonksiyonel Kademelenendirilmiş (FK) yapısının mekanik ve termal özellikleri için elde edilmektedir. Bu durum, farklı malzemeler arasındaki ara yüzlerde meydana gelebilecek gerilme yığılmalarının azaltılmasını sağlayabilmektedir. Fonksiyonel Kademelenendirilmiş (FK) yapıların güvenli bir şekilde tasarlanabilmesi için farklı yüklemeler altında malzemede meydana gelebilecek olası hasarların anlaşılması ve araştırılması bu yapıların güvenilirliğinin artırılması için son derece önem taşımaktadır. Bu çalışma kapsamında, bir yönlü FK yapılarda kullanılan malzeme dağılımlarının, FK plaka hasarlarının oluşumuna ve ilerlemesine nasıl etki ettiği PeriDinamik (PD) teorisi kullanılarak incelenmiştir. Analizler neticesinde, malzeme dağılımlarının plakanın kırılma davranışları üzerinde önemli bir etkisi olduğu ve bu dağılımların kontrol edilmesiyle birlikte plakanın dayanımının artırılacağı gözlemlenmiştir.

## Investigation of fracture behaviour of one-dimensional functionally graded plates by using peridynamic theory

### H I G H L I G H T S

- Ordinary State Based Formulation is used for the fracture behavior of one dimensional functionally graded (FG) plates
- A power law method is used for the effective material properties of FG plates
- Effect of material distributions on the fracture behavior of FG plates is investigated

### Article Info

Research Article

Received: 27.10.2021

Accepted: 03.02.2022

### DOI:

10.17341/gazimmfd.1015703

### Keywords:

Functionally graded materials, peridynamic theory, crack

### ABSTRACT

Kompozit malzemeler, sahip oldukları hafiflik ve yüksek dayanım gibi arzu edilir özelliklerinden dolayı havacılık ve uzay, askeri ve nükleer gibi mühendislik alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Farklı malzemeler arasındaki ara yüzlerdeki malzeme özelliklerinden kaynaklanan uyumsuzluklar gerilme yığılmalarına neden olabilmektedir. Bu nedenle, çatlak oluşumu ve tabakalar arası ayrılmalar gözlemlenebilmektedir. Fonksiyonel kademelenendirilmiş malzeme (FKM) kavramında, bir veya birkaç koordinat yönünde değişen bir elde etmeyi amaçlamaktadır. Bu sürekli değişim, Fonksiyonel Kademelenendirilmiş (FK) yapısının mekanik ve termal özellikleri için elde edilmektedir. Bu durum, farklı malzemeler arasındaki ara yüzlerde meydana gelebilecek gerilme yığılmalarının azaltılmasını sağlayabilmektedir. Fonksiyonel Kademelenendirilmiş (FK) yapıların güvenli bir şekilde tasarlanabilmesi için farklı yüklemeler altında malzemede meydana gelebilecek olası hasarların anlaşılması ve araştırılması bu yapıların güvenilirliğinin artırılması için son derece önem taşımaktadır. Bu çalışma kapsamında, bir yönlü FK yapılarda kullanılan malzeme dağılımlarının, FK plaka hasarlarının oluşumuna ve ilerlemesine nasıl etki ettiği PeriDinamik (PD) teorisi kullanılarak incelenmiştir. Analizler neticesinde, malzeme dağılımlarının plakanın kırılma davranışları üzerinde önemli bir etkisi olduğu ve bu dağılımların kontrol edilmesiyle birlikte plakanın dayanımının artırılacağı gözlemlenmiştir.

\*Sorumlu Yazar/Yazarlar / Corresponding Author/Authors : kadir kaya@erciyes.edu.tr, ibrahim.olmus06@gmail.com, \*dorduncu@erciyes.edu.tr / Tel: +90 352 207 6666 / 32155

## 1. Giriş (Introduction)

Teknolojik gelişmelerle birlikte, kullanım şartlarına uygun malzemelerin geliştirilmesi önem kazanmıştır [1]. Havacılık, askeri ve otomotiv gibi alanlarda kullanılan malzemelerin hafiflik, yüksek mukavemet ve ısı direnç değerlerine sahip olması istenmekte olup bu kapsamda kompozit malzemeler, fonksiyonel kademelendirilmiş malzemeler gibi farklı yapılarıdaki malzemeler geliştirilmiştir [2-4].

Kompozit malzemelerin tabakaları arasındaki ara yüzeyler, gerilme yığılmalarının ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Yapılan araştırmalarda, ara yüzeylerdeki malzeme geçişlerinin daha sürekli bir yapıda oluşturulmasıyla birlikte gerilme yığılmalarının önlenebileceğini belirtilmektedir [5]. Bu kapsamda, Kawasaki ve Watanab [6] tarafından Fonksiyonel Kademelendirilmiş Malzeme (FKM) kavramı ileri sürülmüştür. FKM kavramı, malzeme özelliklerinin bir veya birkaç koordinat yönünde değişen ve sürekli bir karakter sergileyen yapı kazanmasını hedeflemektedir [7]. Genellikle çok yüksek sıcaklıklarda kullanılmak için tasarlanan metal-seramik malzemelerinin karışımından oluşan FKM, araştırma dünyasında büyük bir ilgi uyandırmıştır. Belirtilen mekanik ve ısı özelliklerindeki süreksizliklerin giderilmesi ve Fonksiyonel Kademelendirilmiş (FK) yapıların güvenli bir şekilde tasarlanabilmesi için farklı yüklemeler altında malzemede meydana gelebilecek olası hasarların araştırılması gerekmektedir.

FKM'nin kırılma davranışları birçok araştırmacı tarafından deneysel olarak incelenmiştir. Rousseau ve Tippur [8] içinde çatlak bulunan Fonksiyonel Kademelendirilmiş (FK) kırıların dinamik kırılma analizlerini gerçekleştirmiştir. Jain ve Shukla [9] ise FKM'nin dinamik kırılma davranışlarını deneysel olarak incelemiştir. Ancak, deneysel olarak yapılan yapısal test ve analizler, çok pahalı ve zaman alıcı olduğundan tasarım aşamasında sağlam ve güvenilir hesaplama araçları kullanmak zaman ve maliyet açısından uygun bir seçenek olacaktır.

Dış kuvvetlere maruz malzeme ve yapı davranışlarının, yapıda oluşan hasarın ve hasar seviyesinin belirlenmesinde çoğunlukla Klasik Sürekli Ortamlar Mekaniği (KSOM) kullanılmaktadır. KSOM, temel olarak kısmi diferansiyel denklemlere dayalı olmasından dolayı, malzeme içerisinde sürekliliğin kaybolduğu çatlak oluşumu gibi durumlarda, geçerliliğini yitirmekte ve malzemelerde oluşan hasarın belirlenmesi için yeterli olmamaktadır [10]. Doğrusal Elastik Kırılma Mekaniği (DEKM) tabanlı çözümler, içerisinde çatlak bulduran FKM'lerin dışarıdan uygulanan yüklemeler altındaki davranışlarını anlamak için yardımcı olsa da denklemlerin karmaşıklığından dolayı basit geometriye sahip FKM'lerin analizleri ile kısıtlıdır. Bu nedenle, FKM'lerin kırılma analizleri için çeşitli sayısal çözüm araçları geliştirilmiştir.

Sonlu Elemanlar Metodu (SEM), karmaşık geometrilere sahip malzemelerin modellenmesinde ve gerilme analizlerinde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Kim ve Paulino [11], homojen yapılar ve FKM için karma mod çatlak ilerlemesini, çatlak uçlarında yerel (local) sonlu elemanlar (SE) ağını sıklaştırma tekniğini kullanarak araştırdılar. Nabil vd. [12], iki boyutlu FK plakasının karmaşık modlu çatlak analizini SEM'den yararlanarak gerçekleştirmişlerdir. Yıldırım [13] içerisinde kenar çatlağı bulduran FK plakalarda meydana gelen ısı şok kırılmalarını SEM kullanarak incelemiştir. SEM birçok araştırmacı tarafından FKM'nin hasar analizlerinde tercih edilmesine rağmen, temel denklemlerinde konuma dayalı türev ifadeleri bulundurasından dolayı, malzemelerde oluşan hasarın yönünün ve şiddetinin belirlenmesinde başarılı bir performans sergileyememektedir [14-16]. SEM, çatlak uçlarındaki gerilme değerlerini doğru bir şekilde hesaplayabilmek için çok sık SE ağına

gereksinim duymaktadır. Ayrıca, çatlakların ilerlemesiyle birlikte, yeni oluşan çatlak uçlarında SE ağına sıklığının artırılması gerekmektedir [17,18]. Bu durumun bir sonucu olarak, gerilme değerleri doğru olarak hesaplanamamakta ve SEM kullanılarak yapılan hasar analizleriyle gerçekçi sonuçlar elde edilememektedir.

SEM'in başarısız olduğu problemlerin üstesinden gelebilmek için Genişletilmiş Sonlu Elemanlar Metodu (GSEM) geliştirilmiştir. GSEM, çatlakların ilerlemesi durumunda SE ağına yeniden oluşturulmasına ihtiyaç duymamaktadır. Liu vd. [19], darbe yüklemesi altındaki FK piezoelektrik malzemelerin dinamik kırılma analizlerini; Bayesteh ve Mohammadi [20] ortotrop yapıya sahip FK plakaların dinamik kırılma analizlerini GSEM'den yararlanarak gerçekleştirmiştir. GSEM, basit geometrilere sahip FKM için avantaj sağlasa da çatlak oluşumu ve çatlak ilerlemesi için ilave kriterlere ihtiyaç duymaktadır. Ayrıca, FKM içerisinde çoklu hasar meydana geldiği durumlarda da doğru tahminde bulunamamaktadır [21].

Malzemelerde çatlak analizleri gerçekleştirebilmek için alternatif olarak Kohezif Bölge konsepti önerilmiştir [22, 23]. Kohezif bölge konseptinde, çatlak oluşumu ve ilerlemesini matematiksel olarak modelleyebilmek için hasar bölgesinin üst ve alt yüzeylerinde gerilme bazlı limit değerleri kullanılmaktadır. Kohezif Bölge Elemanı (KBE), SE ağındaki elemanların sınırlarında bulunan yüzey elemanı olmasından dolayı FKM'nin çatlak analizleri sadece KBE'nin sınırlarında gerçekleştirilebilmektedir. FKM'nin birçok çatlak bulundurması durumunda da KBE başarılı performans sergileyememektedir.

Literatürde bahsi geçen çatlak gibi süreksizlikleri içerisinde barındıran problemlerin sayısal çalışmaların DEKM ve SEM gibi yerel metodlar kullanılması durumunda çözüm hassasiyetinde önemli kayıplar meydana gelebilmektedir. Ayrıca, GSEM ve KBE gibi tekniklerin, çatlakların oluşumu ve çatlakların ilerlemesi için ilave kırılma kriterlerine gerek duyması, elde edilen sonuçların hassasiyetini ve gerçekçiliğini olumsuz olarak etkilemektedir. 2000 yılında, bahsi geçen yöntemlerin getirmiş olduğu kısıtlamalardan ortadan kaldırmak için, Silling [24] tarafından Bağ Bazlı PeriDinamik (BB PD) teorisi geliştirilmiştir. Peridinamik (PD) hareket denklemleri, KSOM hareket denklemlerinin aksine, çatlak ucu gibi süreksizliklerin olduğu durumlarda da geçerliliğini korumaktadır. Denge denklemlerindeki farkın yanı sıra, PD teorisinin sayısal modellenmesi SE ağı kullanılmadan (ağısız), malzeme noktaları kullanılarak yapılmaktadır ve bu sayede ağa bağlı herhangi bir olumsuz etkiyle de karşılaşılmamaktadır.

Silling tarafından geliştirilen BB PD teorisine, birçok araştırmacı tarafından büyük bir ilgi duyulmuş ve teori korozyon, faz değişimi gibi farklı alanlarda da uygulanmıştır [25]. Candaş vd. [26] BB PD teorisi kullanarak darbe (impact) yüklemesine maruz FKM'lerin dinamik kırılma davranışlarını incelemiştir. Yang vd. [27-30] BB ve SDB PD teorilerini kullanarak FK kırıların ve plakaların mekanik yükler altındaki davranışlarını incelemiştir. PD teorisinden yararlanarak yapılan malzemelerin hasar analiz çalışmalarına son zamanlarda yayımlanan kitaplardan erişilebilmektedir [10,18,31]. BB PD teorisi, malzemelerde meydana gelen hasarların oluşumu ve ilerlemesinin araştırılmasında etkilici bir performans sergilemesine rağmen, sınırlandırılmış Poisson oranlarına sahiptir. BB PD denge denklemlerinde açılma momentum dengesinin sağlanabilmesi için Poisson oranı değeri iki boyutlu problemlerde 0,33, üç boyutlu problemlerde ise 0,25 olmak zorundadır [32]. Ayrıca, BB PD teorisi, şekil değiştirme enerji ifadelerini hacim değişimi (dilatation) ve biçim değişimi (distortion) olarak ayırtmamaktadır. Bu sebeplerden dolayı, BB PD analizleri sadece elastik malzemeler için yapılabilmektedir. BB PD teorisi ile ilgili kısıtlamaları ortadan

kaldırmak için, 2007 yılında Silling [33] tarafından Sıradan Durum Bazlı PD (SDB PD) teorisi geliştirilmiştir. Dördüncü vd. [34,35] SDB PD teorisini kullanarak yeni bir PD kafes elemanı geliştirmiş ve farklı Poisson oranları için mekanik altındaki iki boyutlu izotropik plakaların kırılma analizlerini gerçekleştirmişlerdir. Madenci [36], yeni bir BB ve SDB PD hareket denklemi geliştirmiştir. Bu yaklaşım, şekil değiştirme enerjisi içerisinde mevcut malzeme sabitlerinin düzeltme katsayıları kullanılmaksızın doğrusal elastik ve hiperelastik yapıya sahip malzemelerin deformasyon ve hasar analizlerinin gerçekleştirilmesine olanak sağlamıştır. Hu vd. [37] tarafından geliştirilen SDB PD teorisi formülasyonu çözüm alanının üniform olmadan da ayrıklaştırılabilmesine olanak sağlamaktadır. Ayrıca bu formülasyonda, PD malzeme parametreleri için yüzey ve hacim düzeltme işlemlerine ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu durum, çözüm hassasiyetinin artırılmasına olanak vermektedir. Dördüncü vd. [38] tarafından sunulan çalışmada ise bir yönlü ve iki yönlü FKM'lerin kırılma davranışı SDB PD teorisi kullanılarak incelenmiştir.

Bu çalışmada, bir yönlü olarak fonksiyonel kademelendirilmiş plakaların kırılma analizleri Hu vd. [37] tarafından geliştirilmiş SDB PD formülasyonları kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu sayede PD denge denklemleri içerisinde bulunan PD parametreleri için kullanılan ve ilave işlem gerektiren düzeltme katsayılarına ihtiyaç duyulmadan analizler gerçekleştirilmiştir. FK plaka içerisindeki elastiklik modülü, Poisson oranı ve kırılma tokluğu değerlerinin dağılımları üstel fonksiyonlar kullanılarak kontrol edilmiştir. Mevcut yaklaşımın doğruluğu, çekme yüklemesi altındaki izotrop plakalarda meydana gelen kırılma davranışlarının referans çözümlerle karşılaştırılmasıyla birlikte gerçekleştirilmiştir. Plakanın bir doğrultusu boyunca farklı malzeme dağılımları göz önünde bulundurularak, FK plakada meydana gelen kırılma davranışları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Yapılan analizler neticesinde, plaka içerisindeki malzeme dağılımının, kırılma davranışı üzerinde önemli bir rol oynadığı ve kullanım amacına uygun ideal yapının malzeme dağılımlarının kontrolü ile mümkün olabileceği gözlemlenmiştir.

Bu çalışma dört bölümden oluşmakta olup ilk bölümde, çalışmanın konusu ve ilgili literatür taramalarına yer verilmiştir. İkinci bölümde, FK malzeme özelliklerinin matematiksel formülasyonu, PD hareket denklemleri ve kırılma kriterleri hakkında bilgiler aktarılmıştır. Üçüncü bölümde ise sayısal sonuçlara yer verilmiştir. Bu kapsamda, mekanik yüklemelere maruz bırakılmış izotrop ve FK plakalarda meydana gelen kırılma davranışları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Son bölümde ise, yapılan çalışmalardan elde edilen bulgular ve önerilerden bahsedilmiştir.

## 2. Matematiksel Yaklaşım (Mathematical Approach)

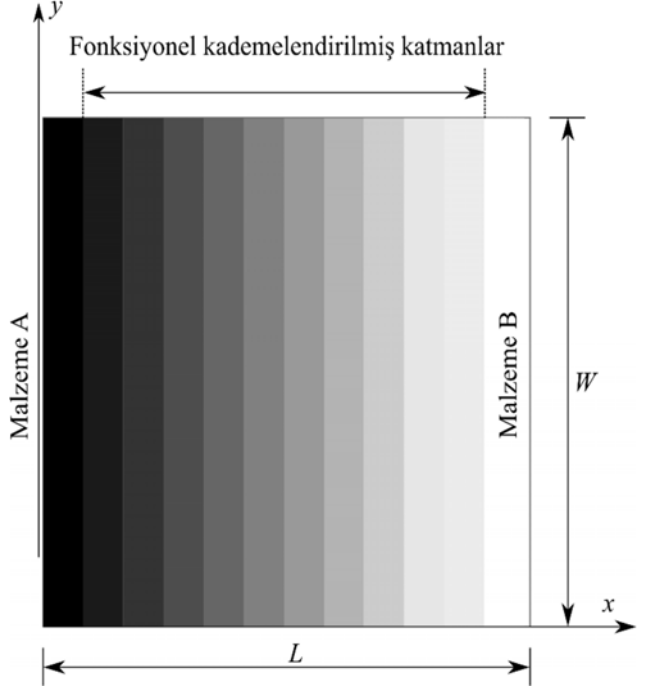
### 2.1. Bir Yönlü Fonksiyonel Kademelendirilmiş Malzemelerin Matematiksel Modelleri (Mathematical Models of the One-Dimensional Functionally Graded Materials)

FK plakaların malzeme dağılımları için üstel fonksiyonlar yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Şekil 1'de gösterilen FK yapı, matematiksel model boyu  $L$  ve eni  $W$  olan bir plaka modeli üzerinde aşağıdaki adımlar takip edilerek elde edilmiştir. Herhangi bir malzeme A plakanın sol yüzeyine, B malzemesi ise plakanın sağ yüzeyine yerleştirilmiştir. Bu durum göz önünde bulundurularak, Malzeme B ve Malzeme A'nın  $x$  doğrultusundaki hacimsel oranları sırasıyla Eş. 1 ve Eş. 2'de verilmiştir:

$$V_B(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^n \quad (1)$$

$$V_A(x) = 1 - V_B(x) \quad (2)$$

Burada,  $n$  üstel değeri  $x$  doğrultularında malzemenin hacimsel dağılım kontrolünü sağlamaktadır.



**Şekil 1.** Bir yönlü fonksiyonel kademelendirilmiş plaka.  
(One-dimensional functionally graded plate.)

FK plakanın her bir  $x$  konumunda kullanılacak olan elastiklik modülü  $E = E(x)$ , Poisson oranı  $\nu = \nu(x)$ , yoğunluğu  $\rho = \rho(x)$  ve kırılma tokluğu  $K_{ic} = K_{ic}(x)$  üstel karışım fonksiyonları Eş. 3-6'da verilmiştir [38].

$$E(x) = (E_B - E_A)V_B + E_A \quad (3)$$

$$\nu(x) = (\nu_B - \nu_A)V_B + \nu_A \quad (4)$$

$$\rho(x) = (\rho_B - \rho_A)V_B + \rho_A \quad (5)$$

$$K_{ic}(x) = (K_{icB} - K_{icA})V_B + K_{icA} \quad (6)$$

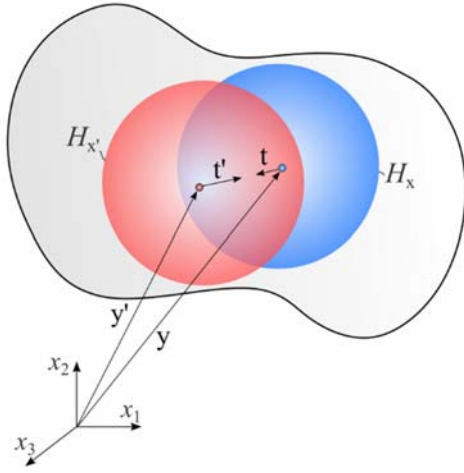
Bölüm 3'de verilen sayısal analizlerde kullanılan FK plakanın mekanik özellikleri Eşitlik (3-6)'dan yararlanılarak belirlenmiştir.

### 2.2. Sıradan Durum Bazlı Peridinamik Teorisi (Ordinary State Based Peridynamic Theory)

Silling vd. [33] SDB PD hareket denklemlerini, Şekil 2'de gösterilen çözüm alanında  $\mathbf{x}$  ve  $\mathbf{x}'$  PD malzeme noktalarına ait kuvvet yoğunluğu vektörleri  $\mathbf{t}$  ve  $\mathbf{t}'$ , ivme,  $\ddot{\mathbf{u}}$ , yoğunluk,  $\rho$ , ve dış kuvvet  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  cinsinden Eş. 7'de tanımlamıştır:

$$\rho(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{H_x} \left( \mathbf{t}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}, t) - \mathbf{t}'(\mathbf{u} - \mathbf{u}', \mathbf{x} - \mathbf{x}', t) \right) dV_{x'} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (7)$$

Burada,  $\mathbf{x}'$  PD malzeme noktası,  $\mathbf{x}$  PD malzeme noktasına ait ailenin,  $H_{\mathbf{x}}$ , içerisinde bulunan herhangi bir malzeme noktasıdır ve  $\mathbf{x}$  malzeme noktasının komşu üyesi olarak adlandırılmaktadır. PD teorisinde, çözüm alanındaki her bir malzeme noktasının kendine ait bir hacmi  $V$  ve etkileşim alanı,  $H$ , vardır. Şekil 2'de görüldüğü gibi,  $H_{\mathbf{x}}$  ve  $H_{\mathbf{x}'}$ , sırasıyla  $\mathbf{x}$  ve  $\mathbf{x}'$  malzeme noktalarının kendilerine ait etkileşim alanlarını göstermektedir. Ayrıca,  $\delta$ , bir malzeme noktasının küresel komşuluğunu ifade etmektedir ve  $\xi$  ise  $\mathbf{x}$  ve  $\mathbf{x}'$  malzeme noktaları arasındaki referans mesafedir.  $\mathbf{y}$  ve  $\mathbf{y}'$  ise  $\mathbf{x}$  ve  $\mathbf{x}'$  PD malzeme noktalarının deforme olmuş alandaki konum vektörleridir. Burada, SDB PD teorisine göre, kuvvet yoğunluğu vektörleri,  $\mathbf{t}$  ve  $\mathbf{t}'$ , birbirine paralel doğrultuda olup şiddetleri farklıdır.



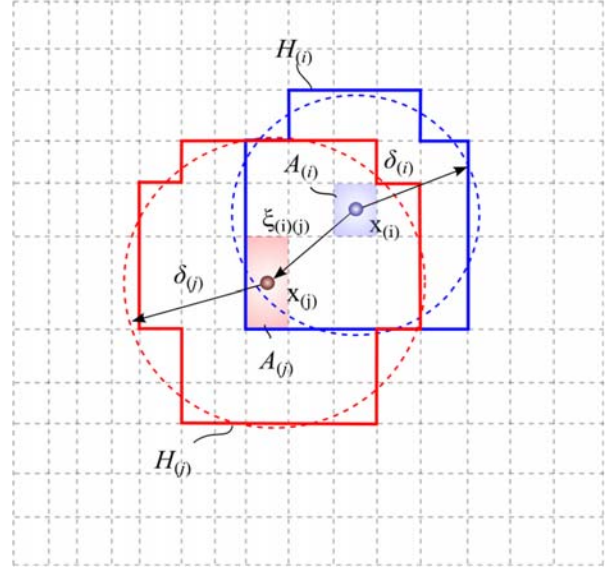
**Şekil 2.** Deforme olmuş çözüm alanındaki  $\mathbf{x}$  ve  $\mathbf{x}'$  malzeme noktalarının etkileşim alanları.  
(The interaction domain of the material points  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{x}'$  in the deformed solution domain.)

PD hareket denklemlerinin analitik olarak çözülmesi olanaksızdır, bu nedenle PD hareket denklemlerinin çözümünde sayısal ağsız kolokasyon yöntemi kullanılmaktadır. Sonlu sayıdaki hücelere ayrıklaştırılmış çözüm alanı kullanılarak, Eş. 7'nin yeni formu Eş. 8'de tanımlanmıştır:

$$\rho_{(i)} \ddot{\mathbf{u}}_{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{(i)}} \left[ \begin{array}{l} \mathbf{t}_{(i)(j)}(\mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(i)}, \mathbf{x}_{(j)} - \mathbf{x}_{(i)}, t) - \\ \mathbf{t}_{(j)(i)}(\mathbf{u}_{(i)} - \mathbf{u}_{(j)}, \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)}, t) \end{array} \right] V_{(j)} + \mathbf{b}_{(i)} \quad (8)$$

burada,  $N_{(i)}$ ,  $\mathbf{x}_{(i)}$  noktasının sahip olduğu komşu malzeme noktalarının sayısıdır. Şekil 3'te gösterildiği gibi, her bir PD malzeme noktası hücrelerin merkez noktasında bulunmaktadır ve her bir hücrenin bir alanı  $A_{(i)}$  (2 boyut) veya bir hacmi  $V_{(i)}$  (3 boyut) vardır.

Her bir PD malzeme noktasına ait ailenin ölçüsü ve şekli farklı olabilmektedir. Burada, küresel aile komşuluğu  $\delta_{(i)} = m\Delta_{(i)}$  olarak hesaplanmaktadır.  $m$  değeri herhangi bir tam sayı değeridir ve yakınsama analizleri neticesinde elde edilebilmektedir.  $\Delta_{(i)}$  ise karakteristik uzunluk olarak adlandırılmaktadır ve Eş. 9'da ifade edilmektedir:



**Şekil 3.**  $\mathbf{x}_{(i)}$  PD malzeme noktasının etkileşim alanı ve komşu PD malzeme noktaları,  $\mathbf{x}_{(j)}$ .  
(The interaction domain of the PD material point  $\mathbf{x}_{(i)}$  with its neighbor PD material points,  $\mathbf{x}_{(j)}$ .)

$$\Delta_{(i)} = \begin{cases} \sqrt{A_{(i)}} & \text{2-B} \\ \sqrt[3]{V_{(i)}} & \text{3-B} \end{cases} \quad (9)$$

Kuvvet yoğunluğu vektörlerinin  $\mathbf{t}_{(i)(j)}$  ve  $\mathbf{t}_{(j)(i)}$  hesaplanması için  $\mathbf{x}_{(i)}$  ve  $\mathbf{x}_{(j)}$  PD malzeme noktalarına ait şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu fonksiyonlarının, Eş. 10 ve Eş. 11'de belirttiği gibi  $W_{(i)}$  ve  $W_{(j)}$ , PD formlarında hesaplanarak konum vektörlerine göre türevlerinin alınması gerekmektedir:

$$\mathbf{t}_{(i)(j)}(\mathbf{u}_{(j)} - \mathbf{u}_{(i)}, \mathbf{x}_{(j)} - \mathbf{x}_{(i)}, t) = \frac{1}{V_{(j)}} \frac{\partial W_{(j)}}{\partial \left( \left| \mathbf{y}_{(j)} - \mathbf{y}_{(i)} \right| \right)} \frac{\mathbf{y}_{(j)} - \mathbf{y}_{(i)}}{\left| \mathbf{y}_{(j)} - \mathbf{y}_{(i)} \right|} \quad (10)$$

ve

$$\mathbf{t}_{(j)(i)}(\mathbf{u}_{(i)} - \mathbf{u}_{(j)}, \mathbf{x}_{(i)} - \mathbf{x}_{(j)}, t) = -\frac{1}{V_{(i)}} \frac{\partial W_{(i)}}{\partial \left( \left| \mathbf{y}_{(j)} - \mathbf{y}_{(i)} \right| \right)} \frac{\mathbf{y}_{(j)} - \mathbf{y}_{(i)}}{\left| \mathbf{y}_{(j)} - \mathbf{y}_{(i)} \right|} \quad (11)$$

Burada,  $\mathbf{x}_{(i)}$  PD malzeme noktasındaki toplam şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu,  $W_{(i)}$ ,  $\mathbf{x}_{(i)}$  PD malzeme noktası ve komşu üyelerine ait olan şekil değiştirme enerjilerin,  $U_{(i)(j)}$ , toplamı alınarak elde edilebilmektedir. Madenci ve Oterkus [10] tarafından elde edilen,  $\mathbf{x}_{(i)}$  noktasına ait şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu PD formunda Eş. 12'de belirtilmiştir:

$$W_{(i)} = a\theta_{(i)} + \sum_{j=1}^{N_{(i)}} b_{(i)(j)} \delta_{(i)} s_{(i)(j)}^2 \xi_{(i)(j)} V_{(j)} \quad (12)$$

burada,  $\xi_{(i)(j)} = \left| \xi_{(i)(j)} \right|$ ,  $\mathbf{x}_{(i)}$  ve  $\mathbf{x}_{(j)}$  PD malzeme noktaları arasındaki başlangıç bağ uzunluğudur.  $\theta_{(i)}$  ve  $s_{(i)(j)}$  ise  $\mathbf{x}_{(i)}$  PD

malzeme noktadaki dilatasyon değeri (Eş. 13) ve  $\mathbf{x}_{(i)}$   $\mathbf{x}_{(j)}$  PD noktaları arasındaki birim uzamayı (Eş. 14) temsil etmektedir:

$$\theta_{(i)} = \sum_{j=1}^{N_{(i)}} d_{(i)} \delta_{(i)} s_{(i)(j)} V_{(j)} \quad (13)$$

ve

$$s_{(i)(j)} = \frac{|\mathbf{y}_{(j)} - \mathbf{y}_{(i)}| - |\mathbf{x}_{(j)} - \mathbf{x}_{(i)}|}{|\mathbf{x}_{(j)} - \mathbf{x}_{(i)}|} \quad (14)$$

Hu vd. [37] tarafından geliştirilen sıradan durum bazlı PD hareket denklemlerinin son hali Eş. 15’de ifade edilmektedir:

$$\rho_{(i)} \ddot{\mathbf{u}}_{(i)} = 2 \sum_{j=1}^{N_{(i)}} \mu f_{(i)(j)} \frac{V_{(j)}}{\xi_{(i)(j)}} \frac{\mathbf{y}_{(j)} - \mathbf{y}_{(i)}}{|\mathbf{y}_{(j)} - \mathbf{y}_{(i)}|} + \mathbf{b}_{(i)} \quad (15)$$

Eşitlik (15)’de bulunan  $f_{(i)(j)}$  ifadesi E. 16’da verilmiştir.

$$f_{(i)(j)} = a \left( \delta_{(i)} d_{(i)} \theta_{(i)} + \delta_{(j)} d_{(j)} \theta_{(j)} \right) + \xi_{(i)(j)} \left( \frac{\delta_{(i)} b_{(i)(j)} + \delta_{(j)} b_{(j)(i)}}{\delta_{(i)} b_{(i)(j)}} \right) s_{(i)(j)} \quad (16)$$

Burada  $a$  değişkeni sıfır değerine eşit olduğunda bağ bazlı PD hareketi denklemi elde edilmiş olmaktadır.  $d_{(i)}$  ve  $b_{(i)(j)}$  PD parametreleri klasik sürekli ortamlar mekaniğinden (KSOM) elde edilen şekil değiştirme yoğunluğu değerleri kullanarak üniform izotropik genişleme durumları göz önüne alınarak elde edilmektedir ve sırasıyla Eş. 17 ve Eş. 18’de verilmiştir:

$$d_{(i)} = \frac{\text{tr}(\mathbf{I})}{\delta_{(i)} \sum_{m=1}^{N_{(i)}} V_{(m)}} \quad (17)$$

$$\delta_{(i)} b_{(i)(j)} + \delta_{(j)} b_{(j)(i)} = \frac{\text{tr}(\mathbf{I})}{\xi_{(i)(j)}} \left( \frac{K}{2} - a \right) \left( \delta_{(i)} d_{(i)} + \delta_{(j)} d_{(j)} \right) \quad (18)$$

Burada  $\text{tr}(\mathbf{I})$  iki boyutlu problemler için 2, üç boyutlu problemler için 3 değerini almaktadır.  $K$  ve  $a$  malzeme değişkenleri düzlem gerilme ve düzlem şekilde değiştirme durumlarına göre Hu vd. [37] tarafından detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Ayrıca, hasar parametresi  $\mu = \mu(\mathbf{x}_{(j)} - \mathbf{x}_{(i)}, t)$  ise Eş. 19’da gösterilmiştir:

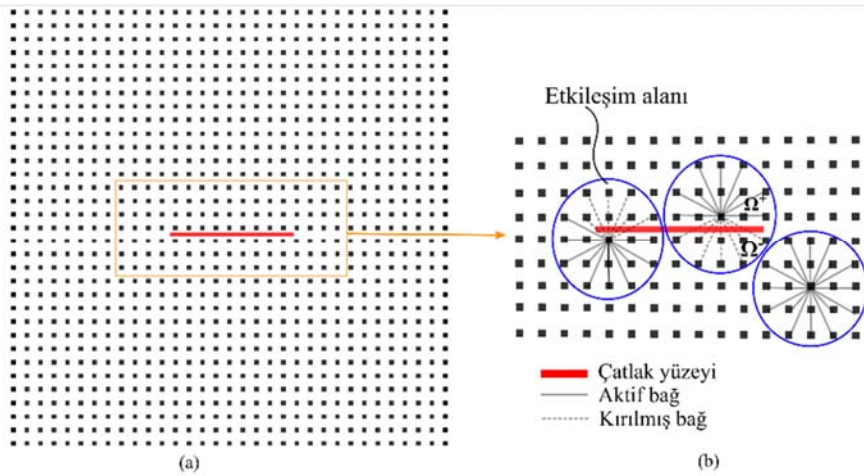
$$\mu(\mathbf{x}_{(j)} - \mathbf{x}_{(i)}, t) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } s(\mathbf{x}_{(j)} - \mathbf{x}_{(i)}, t) < s_c \\ 0 & \text{aksi halde.} \end{cases} \quad (19)$$

PD teorisi yerel olmayan sürekli ortamlar mekaniğine dahildir ve malzeme noktaları sonlu bir mesafeden (etkileşim alanı içerisinde) PD bağları sayesinde etkileşirler. PD teorisinde meydana gelen hasarlar, malzeme noktaları arasındaki etkileşimin kaldırılmasıyla modellenmektedir. Şekil 4’te malzeme noktalarıyla ayrıştırılmış PD çözüm bölgesi ve başlangıç çatlaklarının konumu gösterilmektedir. Şekil 4b’de gösterildiği gibi, başlangıç çatlakları, çatlak yüzeylerinde bulunan malzeme noktaları arasındaki etkileşimlerin kaldırılmasıyla ortaya çıkmaktadır. İki malzeme noktasının konumları karşılıklı çatlak yüzeylerinde ise, malzeme noktaları arasındaki etkileşim ortadan kaldırılır (kırılmış bağ). Aksi takdirde, etkileşimleri bozulmadan kalır (aktif bağ).

PD bağlarında oluşacak kırılmalar, iki malzeme noktası arasındaki temsili PD bağda meydana gelen birim uzamanın,  $S$ , kritik birim uzama değerini,  $s_c$ , aşmasıyla birlikte gerçekleşmektedir.  $\mathbf{x}_{(i)}$  ve  $\mathbf{x}_{(j)}$  PD noktaları arasındaki temsili PD bağının koparılması için Eş. 15 içerisinde mevcut  $\mu$  hasar parametresi (Eş. 19) kullanılmaktadır.

Silling ve Askari [39] tarafından önerildiği gibi, kritik birim uzama değeri, kritik enerji salınım oranı,  $G_{Ic}$ , dikkate alınarak hesaplanabilmektedir. Çözüm alanında  $\Delta A$  büyüklüğünde çatlak yüzeyinin oluşması için,  $\Omega^+$  (çatlak üstü) ve  $\Omega^-$  (çatlak altı) bölgeleri arasındaki PD etkileşimlerinin ortadan kalkması gerekmektedir.

Griffith’in çalışmalarına göre çatlak yüzeyinin oluşması için enerji sarf edilmesi gerekmektedir, bu sebepten dolayı PD etkileşimlerinin ortadan kalkması için belirli bir seviyede şekil değiştirme enerjisi,



Şekil 4. (a) İçerisinde başlangıç çatlakları bulunan çözüm alanının malzeme noktalarıyla ayrıştırılması ve (b) çatlak yüzeyinin detaylı gösterimi. ((a)The discretization of the solution domain with a pre-existing crack and (b) details of the crack surface.)

$\Delta U$ , gerekmektedir. Hu vd. [37],  $\mathbf{x}_{(i)}$  ve  $\mathbf{x}_{(j)}$  PD malzeme noktaları arasındaki birim kritik uzama değerini  $s_{c(i)(j)}$  Eş. 20'de ifade etmişlerdir:

$$s_{c(i)(j)} = \sqrt{\frac{2G_{IC(i)(j)}\Delta A}{\text{tr}(\mathbf{I})K \left( \sum_{i=1}^{i \in \Omega^*} \sum_{j=1}^{j \in \Omega^*} (d_{(i)}\delta_{(i)} + d_{(j)}\delta_{(j)}) \cos^2 \beta_{(i)(j)} V_{(i)} V_{(j)} \right)}} \quad (20)$$

burada  $\text{tr}(\mathbf{I})$  birim matrisin diyagonal terimlerinin toplamını temsil etmektedir.  $G_{IC(i)(j)}$  ise düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme durumları için Eş. 21 kullanılmaktadır.

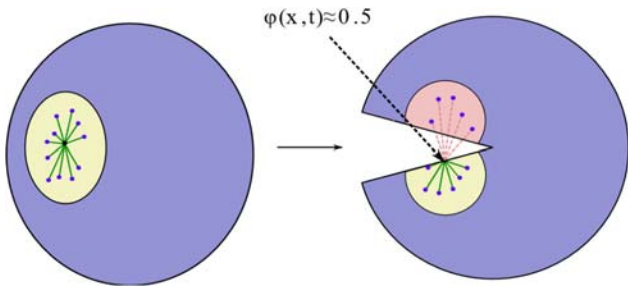
$$G_{IC(i)(j)} = \begin{cases} \frac{K_{IC(i)(j)}^2}{E_{(i)(j)}} & \text{(düzlem gerilme)} \\ \frac{(1-\nu_{(i)(j)}^2)K_{IC(i)(j)}^2}{E_{(i)(j)}} & \text{(düzlem şekil değiştirme)} \end{cases} \quad (21)$$

Bir malzeme noktasının yerel hasar katsayısı,  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , ise kendi etkileşim alanı içerisindeki hasara uğramış PD bağlarının, toplam bağ sayısına oranı ile Eş. 22'deki gibi ifade edilmiştir:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = 1 - \frac{\int_{H_x} \mu(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) V_{x'}}{\int_{H_x} V_{x'}} \quad (22)$$

Yerel hasar katsayısı,  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , 0 ve 1 arasında değer almaktadır.

Örneğin, başlangıçta bir malzeme noktası, Şekil 5a'da gösterildiği gibi, kendi etkileşim alanındaki tüm malzeme noktalarıyla etkileşim halindeyse, yerel hasar değeri sıfırdır. Ancak, bu malzeme noktası etkileşim alanındaki malzeme noktalarının yaklaşık olarak yarısıyla bağlantısını kesmesi durumunda o malzeme noktasının bulunduğu bölgede çatlak yüzeyi oluşmaya başlamış demektir (Şekil 5b).



**Şekil 5.** (a) Bütün komşu noktalarıyla etkileşim halinde olan malzeme noktası ve (b) komşularının yarısıyla etkileşimi kesilmiş ve çatlak yüzeyine sahip malzeme noktası [10].

(a) A material point with a complete horizon and its neighbour points, and (b) the material point lost its half of interactions with neighbours and cracked surface.)

Bu hesaplamalar Hu vd. [37] ve Dorduncu vd. [38] tarafından yapılan çalışmalarda detaylı olarak anlatılmıştır. FK malzemeler yapı içerisinde katmanları arasında sürekli geçişler sağlamaktadır ve her bir katmanı izotrop olarak farklı malzeme özelliği sergilemektedir.

Bu nedenle, PD hareket denklemlerinin hesaplamalarında,  $\mathbf{x}_{(i)}$  ve  $\mathbf{x}_{(j)}$  PD malzeme noktalarına ait PD bağı için elastiklik modülü, Poisson oranı, yoğunluk ve kırılma tokluğu değerlerinin ortalama değerleri sırasıyla Eş. 23-Eş. 26'da ifade edilmiştir:

$$E_{(i)(j)} = \frac{E_{(i)} + E_{(j)}}{2} \quad (23)$$

$$\nu_{(i)(j)} = \frac{\nu_{(i)} + \nu_{(j)}}{2} \quad (24)$$

$$\rho_{(i)(j)} = \frac{\rho_{(i)} + \rho_{(j)}}{2} \quad (25)$$

$$K_{IC(i)(j)} = \frac{K_{IC(i)} + K_{IC(j)}}{2} \quad (26)$$

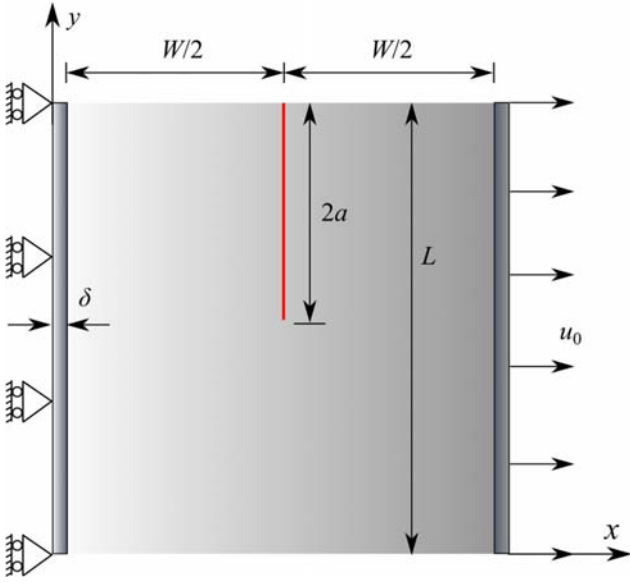
### 3. Sayısal Örnekler (Numerical Examples)

Bu bölümde, çekme yükü altındaki izotrop ve bir boyutlu FK plakalarda meydana gelen çatlak başlangıcı ve ilerlemesi Hu vd. [37] tarafından geliştirilen SDB PD teorisi kullanılarak incelenmiştir. Bu kapsamda, ilk olarak içerisinde başlangıç çatlaklığı bulunan izotrop plaka çekme yüklemesine maruz bırakılarak hasar oluşumu ve ilerlemesi incelenmiştir. PD analizlerinden elde edilen sonuçlar mevcut literatürdeki sonuçlarla [40] kıyaslanarak doğrulanmıştır.

İkinci problemde, alümina ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) ve zirkonya ( $\text{ZrO}_2$ ) malzemeleri kullanılarak farklı malzeme kompozisyon ( $n$ ) değerleri için FK yapılar elde edilmiştir ve söz konusu yapıların kırılma analizleri gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar yine literatürdeki sonuçlarla [40] kıyaslanmış ve uyumlu sonuçlar elde edildiği belirlenmiştir.

#### 3.1. Çekme Yükü Altındaki İçerisinde Çatlak Bulunduran İzotrop Plaka (Isotropic plate with a pre-existing crack under tension)

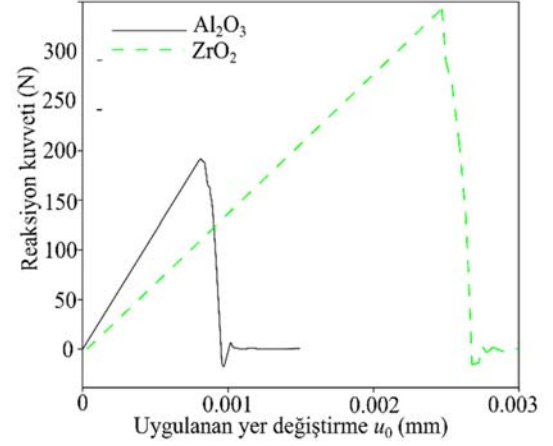
Kare geometriye sahip izotrop plaka Şekil 6'da gösterilmiştir. Plakanın modellenmesi için kullanılan  $\text{Al}_2\text{O}_3$  ve  $\text{ZrO}_2$  malzemelerine ait mekanik özellikler Tablo 1'de sunulmuştur. Kare plakanın kenar boyu  $\bar{L} = \bar{W} = 1$  mm olarak belirlenmiştir. Plakanın tam ortasında  $y$  doğrultusu boyunca bulunan başlangıç çatlaklığının boyu ise  $2\bar{a} = 0,5$  mm'dir. PD çözüm alanının oluşturulabilmesi için plakalar  $x$  ve  $y$  doğrultuları boyunca eşit aralıklı  $125 \times 125$  malzeme noktalarına sahip olacak şekilde ayrıştırılmıştır. PD malzeme noktaları arasındaki mesafe  $x$  ve  $y$  yönündeki eşit mesafe değeri  $\Delta_{(i)} = \bar{L}/125$  mm olarak hesaplanmıştır. Her bir malzeme noktası ailesinin etkileşim alanı ölçüsü  $\delta = 3,015\Delta_{(i)}$  şeklinde belirlenmiştir. Eşitlik (23)-(26)'da verilen SDB PD hareket denklemlerinin sanki-statik (quasi-static) sayısal çözümleri için Kilic ve Madenci [41] tarafından önerilen adaptif dinamik gevşeme (ADR) yöntemi kullanılmıştır. ADR yöntemi için kullanılan zaman adımı  $\Delta t = 1$  s'dir. PD analizleri için toplam zaman adımı  $n t_{\text{toplam}} = 10000$  olarak belirlenmiştir. Plakanın sol kenarı  $x$  doğrultusu boyunca hareketsizdir. Plakanın sağ kenarından  $x$  doğrultusu boyunca yavaşça artırılan  $\Delta u_0 = 0,5 \times 10^{-3}$ 'lük bir yer değiştirme uygulanmıştır.



**Şekil 6.** Bir kenarı sabitlenmiş çekme yüklemesi altındaki izotropik plaka.  
(A simply supported isotropic plate under tension.)

Şekil 7'de SDB PD hareket denklemleri kullanılarak izotrop plakaların reaksiyon kuvveti-yer değiştirme ilişkisi incelenmiştir. Alümina'nın elastiklik modülünün zirkonya'dan daha yüksek olması nedeniyle alümina plaka daha rijit yapıdadır. Uygulanan yüklemesi neticesinde, alümina plakada kırılma başlangıcının tespit edildiği kritik yük kuvveti değeri yaklaşık olarak 190 N'dur. Zirkonya plakada ise kritik yük değeri yaklaşık olarak 350 N olarak gözlemlenmiştir (Şekil 7). Alümina için kopmanın gerçekleştiği yer değeri yaklaşık 0,00095 mm iken; zirkonya için bu değer yaklaşık 0,0026 mm olarak gerçekleşmiştir. Burada, alümina plaka, zirkonya plakaya göre daha rijit olmasına rağmen, alümina plakasının kırılma tokluk değeri daha düşük olarak belirlenmiştir. Bu durum, alümina plakasının kırılma direncini düşürmektedir. Alümina plakada daha erken ve düşük direnç seviyesinde başlangıç çatlakları ilerlemeye başlamıştır.

Elde edilen sonuçların, Hirshikesh vd. [40] tarafından elde edilen sonuçlarla uyum içerisinde olduğu gözlemlenmiştir.

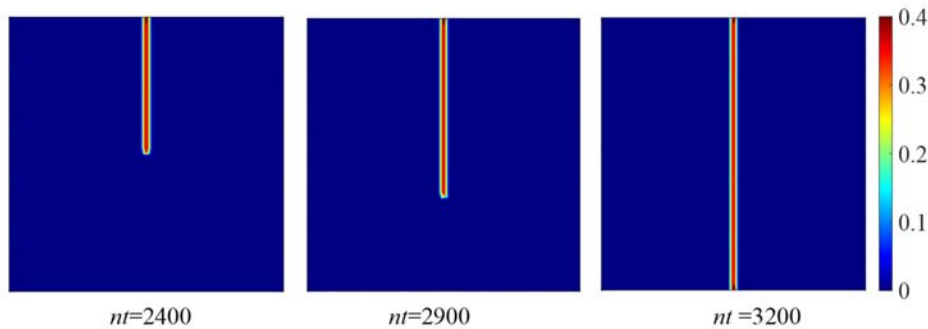


**Şekil 7.** Sıradan durum bazlı PD hareket denklemlerinin kullanılarak izotrop plakalar için elde edilen reaksiyon kuvveti-yer değiştirme ilişkileri.  
(Reaction force-displacement variation for isotropic plates by using ordinary state-based PD equations of motion.)

Şekil 8, farklı zamanlarda alümina plakada meydana gelen hasar oluşumu ve ilerlemelerini göstermektedir. Plakada malzeme dağılımının homojen olması sebebiyle çatlak ilerlemesinin düz bir şekilde ilerlediği görülmektedir. Yapılan sayısal analizlerde, izotrop alümina ve zirkonya için birim kritik uzama değerlerinin sırasıyla 0,0113 ve 0,0038 olduğu belirlenmiştir. Ayrıca, izotrop alümina plakada çatlakların yaklaşık  $nt=2400$ 'de oluşmaya başladığı ve düz bir şekilde ilerleyerek yaklaşık  $nt=3200$ 'e kadar devam ettiği gözlemlenmiştir (Şekil 8). Zirkonya için çatlak ilerlemesi incelendiğinde ise, çatlak başlangıcının yaklaşık  $nt=8000$  olduğu ve çatlak ilerlemesinin yine düz bir biçimde  $nt=9000$ 'e kadar devam ettiği gözlemlenmiştir. Analizler değerlendirildiğinde, tahmini çatlak ilerlemesi ile literatürdeki analizlerin tutarlı olduğu belirlenmiştir. Kırılma tokluk değerinin çatlak doğrultusuna etkisi olmadığı fakat

**Tablo 1.** Alümina ve Zirkonya mekanik özellikleri [40] (Mechanical properties of Alumina and Zirconia)

Malzeme	Elastik Modülü $E$ (GPa)	Poisson oranı $\nu$	Kırılma tokluğu $K_{IC}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	Yoğunluk $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Alümina (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	380	0,26	5,2	3950
Zirkonya (ZrO <sub>2</sub> )	210	0,31	9,6	6000



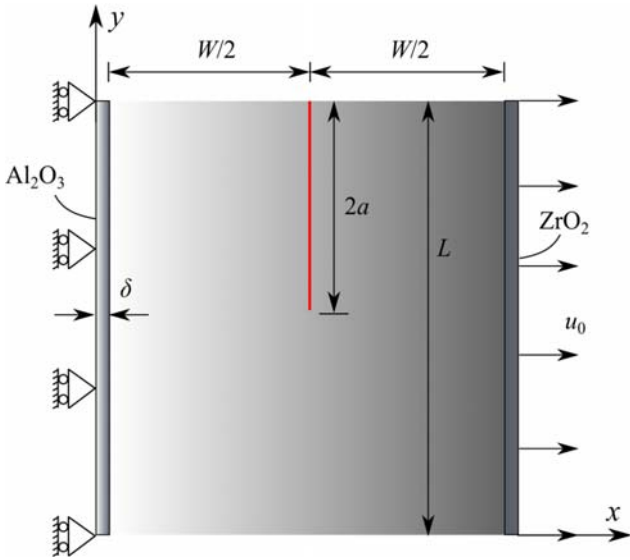
**Şekil 8.** Çekme yükü altındaki Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> plakada meydana gelen çatlak ilerlemesi. (Crack propagation of the Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> plate under tension)



plakada çatlak başlangıcı ve ilerleme sürelerinde çok önemli bir rol olduğu anlaşılmaktadır.

### 3.2. Çekme Yüğü Altındaki İçerisinde Başlangıç Çatlağı Bulunduran FK Plaka (FG plate with a pre-existing edge crack under tension)

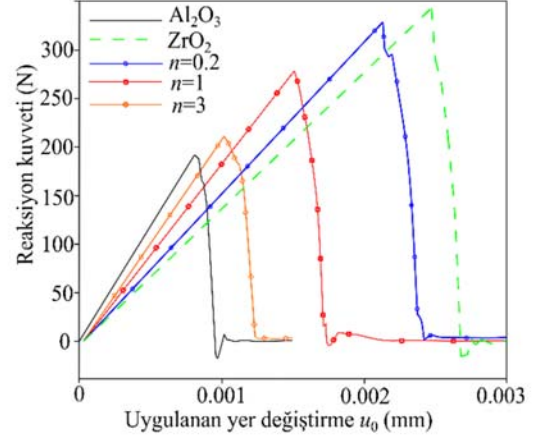
Bu problemde, FK plakanın geometrik özellikleri, sınır ve yükleme koşulları için bir önceki problemdeki koşullar göz önünde bulundurulmuştur (Şekil 9). FK plakanın sol kenarına alümina, sağ kenarına ise zirkonya yerleştirilmiştir. Plaka içerisindeki malzeme dağılımları Eşitlik (3-6) kullanılarak belirlenmiştir. FK plakada malzemelerin karışımı için üç farklı ( $n=0,2, 1$  ve  $3$ ) malzeme kompozisyon üstel değeri kullanılmıştır ve malzeme dağılımları Şekil 10'da gösterilmiştir. Kompozisyon üstel değerinin ( $n$ ) azaltılmasıyla birlikte plakada zirkonya yoğunluğu artmış,  $n=1$  değeri için FK plakada alümina ve zirkonya malzemelerin dengeli olarak dağılımı sağlanmıştır.



Şekil 9. Bir kenarı sabitlenmiş çekme yüklemesi altındaki bir yönlü FK plaka. (A simply supported FG plate under tension.)

Şekil 11'de izotrop plakalar ile FK plakalar için reaksiyon kuvveti ve yer değiştirme arasındaki ilişki incelenmiştir. Şekilde, kritik reaksiyon kuvvetinden sonra reaksiyon kuvveti değerinde ani bir düşüş olduğu görülmektedir. Bu durum, Hirshikesh vd. [40] tarafından yürütülen çalışmayla karşılaştırılmış ve mevcut yaklaşımın literatürle uyumlu olduğu belirlenmiştir. Kompozisyon üst değerinin ( $n$ ) artmasıyla, elastiklik modülü artmakta, kırılma tokluğu azalmaktadır. Alümina

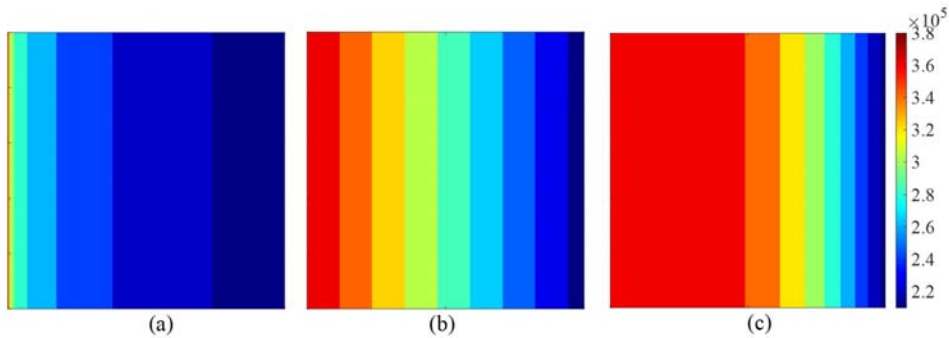
bakımından zengin plakada ( $n=3$ ) diğer FK plakalardan ( $n=1$  ve  $0,2$ ) daha rijit bir davranış sergilendiği, fakat alümina zengin plakanın düşük kırılma tokluğu nedeniyle daha erken kırıldığı şekilden gözlemlenebilmektedir. Yapılan analizlerden, FK plakalarda uygun kompozisyon üst değeri kullanılarak yapının mekanik davranışının iyileştirilebileceği görülmektedir.



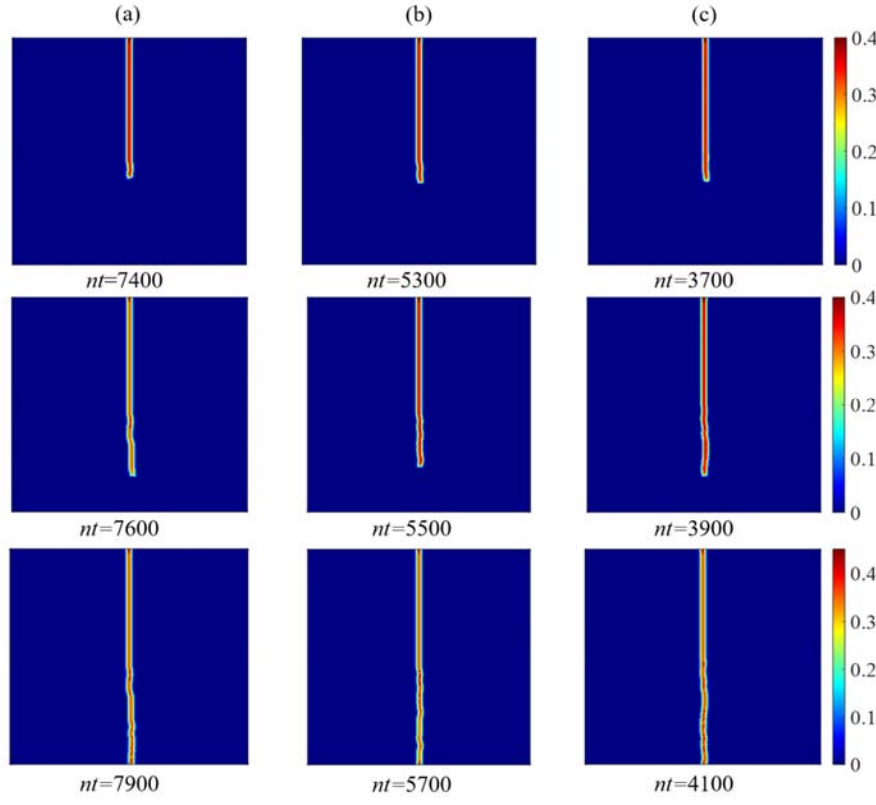
Şekil 11. İzotrop ve FK plakalar için elde edilen PD reaksiyon kuvveti-yer değiştirme ilişkileri. (PD reaction force-displacement relationships for isotropic and FG plates.)

FK plaka yapısının kademeli olarak değişen heterojen bir karakteristiğe sahip olması çatlakın karmaşık (karma modlu) bir biçimde ilerlemesine neden olmaktadır. Bu durum FKM içindeki hasarların sayısal olarak incelemesini zorlaştırmaktadır. Şekil 12'de farklı kompozisyon üst değerlerine ( $n$ ) sahip FK plakalar için farklı zaman adımlarındaki çatlak oluşum ve ilerleme davranışları ( $a, b$  ve  $c$  durumları) gösterilmiştir. Şekilden, mevcut yaklaşımın FKM plakada oluşan çatlak oluşumları ve ilerlemelerini başarılı bir şekilde tahmin edebildiği görülebilmektedir.

Sayısal analizler incelendiğinde, alümina zengin ( $n=3$ ) plakada çatlak yaklaşık  $nt=3300$  zaman adımında oluşmaya başlamış ve doğrusal olmayan bir şekilde (karmaşık modda) ilerleyerek,  $nt=4100$  zaman adımında plakada kopma meydana gelmiştir. Zirkonya bakımından zengin plaka için ( $n=0,2$ ) ise  $nt=7100$ 'de çatlak başlangıcının gerçekleştiği ve çatlak ilerlemesinin  $nt=7900$ 'e kadar devam ederek plakada kopmanın meydana geldiği gözlemlenmiştir. FK plakada çatlak başlangıcı ve çatlak ilerlemesi malzemenin kırılma direncine bağlı olarak değişmektedir. Sayısal analizler neticesinde FK plaka zirkonya bakımından zenginleştirilerek malzemenin kırılmaya karşı direncinin arttığı ve kırılmanın geciktiği belirlenmiştir. Bu



Şekil 10. Farklı kompozisyon üst değerleri  $n=(a) 0,2$ , (b) 1 ve (c) 3 için elastiklik modülü dağılımları. (Elasticity modulus variations for different compositional gradient exponents of  $n=(a) 0,2$ , (b) 1, and (c) 3.)



**Şekil 12.** Farklı kompozisyon üst değerlerine ( $n$ ) sahip FK plakalar için farklı zaman adımlarındaki çatlak oluşum ve ilerleme davranışları:  $n =$  (a) 0,2, (b) 1 ve (c) 3. (Crack nucleation and propagation behavior of FG plates with different compositional gradient exponents  $n =$  (a) 0,2, (b) 1 and (c) 3 at different time steps)

çalışmayla, kompozisyon üst değerlerinden yararlanılarak plakanın malzeme özelliklerinin iyileştirilebileceği, çatlak oluşumu ve ilerlemesinin geciktirilebileceği gözlemlenmiştir. Analizler neticesinde, uygun kompozisyon oranına sahip bir boyutlu FKM yapıların, malzemelerin kullanım ömürlerini iyileştireceği sonucuna varılmaktadır. Dorduncu vd. [38] tarafından yapılan çalışmada, alümina ve zirkonya malzemeleri için 0,33'lük sabit Poisson oranı kullanılmıştır. Bu çalışmada Poisson oranlarının FK plakaların kırılma davranışlarını etkilediği gözlemlenmiştir.

#### 4. Sonuçlar (Conclusions)

Bu çalışmada, Hu vd. [37] tarafından geliştirilmiş SDB PD formülasyonları kullanılarak izotrop ve bir yönlü olarak fonksiyonel kademelendirilmiş plakaların kırılma analizleri gerçekleştirilmiştir. Bu yöntemle birlikte SDB PD denge denklemleri içerisinde mevcut PD malzeme parametreleri için kullanılan ve ilave işlem gerektiren düzeltme katsayılarının kullanılmasının önüne geçilmiştir. Bu sayede çözüm hassasiyetinin artırılmasına olanak sağlanmıştır. FK plaka içerisindeki elastiklik modülü, Poisson oranı ve kırılma tokluk değerlerinin dağılımları, üstel fonksiyonlar kullanılarak elde edilmiştir. Mekanik yüklemelere maruz bırakılmış izotrop ve bir yönlü FK plakalarda meydana gelen kırılma davranışları detaylı bir şekilde incelenmiştir. İzotrop ve FK plakaların kırılma davranışları ve reaksiyon kuvvet değerleri literatürdeki referans sonuçlarla karşılaştırılmıştır ve sonuçların birbiriyle uyumlu olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca, kullanılan SDB PD formülasyonunun simetrik olmayan malzeme dağılımı ile çatlak konumundan kaynaklanan karmaşık modlu çatlakların ve kritik yük seviyelerinin belirlenmesinde başarılı bir şekilde kullanılabileceği gösterilmiştir. Bu çalışma sonucunda, plaka içerisindeki malzeme dağılımının kırılma davranışları üzerinde önemli rol oynadığı ve kullanım amacına uygun

ideal yapının, malzeme dağılımlarının kontrolüyle sağlanabileceği gözlemlenmiştir.

#### Teşekkür (Acknowledgement)

Bu çalışma 219M207 numaralı proje kapsamında Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) ve 11070 numaralı proje kapsamında Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir. Bu kıymetli desteklerinden dolayı TÜBİTAK ve Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimine teşekkür ederiz.

#### Kaynaklar (References)

1. Turan, M., Kahya, V., Free vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by Navier's method, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 36(2), 743-757, 2021.
2. Dorduncu M., Apalak M.K., Cherukuri H.P., Elastic wave propagation in functionally graded circular cylinders, *Composites Part B: Engineering*, 73, 35-48, 2015.
3. Çömez, İ., Aribas, U.N., Kutlu, A., Omurtag, M.H., An exact elasticity solution for monoclinic functionally graded beams, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 46, 5135-5155, 2021.
4. Dorduncu M., Apalak M.K., Stress wave propagation in adhesively bonded functionally graded circular cylinders, *Journal of Adhesion Science and Technology*, 30(12), 1281-1309, 2016.
5. Öktem, A.S., Static analysis of functionally graded (fgm) composite plates, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 29(1), 111-119, 2014.
6. Kawasaki A., Watanabe R., Finite element analysis of thermal stress of the metal/ceramic multi-layer composites with controlled compositional gradients, *Journal of the Japan Institute of Metals*, 51, 525-529, 1987.
7. Koizumi M., FGM activities in Japan, *Composites Part B: Engineering*, 28,1-4, 1997.

8. Rousseau C. E., Tippur H.V., Dynamic fracture of compositionally graded materials with cracks along the elastic gradient: Experiments and analysis, *Mechanics of Materials*, 33, 403–421, 2001.
9. Jain N., Shukla A., Mixed mode dynamic fracture in particulate reinforced functionally graded materials, *Experimental Mechanics*, 46, 137–154, 2006.
10. Madenci E., Oterkus E., *Peridynamic Theory and Its Applications*, Springer-Verlag, New York, A.B.D., 2014.
11. Kim J.H., Paulino G. H., Mixed-mode fracture of orthotropic functionally graded materials using finite elements and the modified crack closure method, *Engineering Fracture Mechanics*, 69, 1557–1586, 2002.
12. Nabil B., Abdelkader B., Miloud A., Noureddine B., On the mixed-mode crack propagation in FGMs plates: Comparison of different criteria, *Techno Press*, 61, 371–379, 2017.
13. Yıldırım, B., Investigation of thermal shock fracture in an edge-cracked functionally graded layer using finite element method, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 19 (3), 235-245, 2004.
14. Dorduncu M., Stress analysis of laminated composite beams using refined zigzag theory and peridynamic differential operator, *Composite Structures*, 218, 193-203, 2019.
15. Dorduncu M., Stress analysis of sandwich plates with functionally graded cores using peridynamic differential operator and refined zigzag theory, *Thin-Walled Structures*, 146, 2020.
16. Dorduncu M., Peridynamic modeling of adhesively bonded beams with modulus graded adhesives using refined zigzag theory, *The International Journal of Mechanical Sciences*, 185, 105866–105866 2020.
17. Madenci E., Barut A., Dorduncu M., *Peridynamic Differential Operator for Numerical Analysis*. Springer International Publishing, New York, A.B.D., 2019.
18. Dorduncu M., Kaya K., Ergin O.F., Peridynamic analysis of laminated composite plates based on first-order shear deformation theory. *International Journal of Applied Mechanics*, 12(3), 2050031, 2020.
19. Liu P., Yu T., Bui T.Q., Zhang C., Transient dynamic crack analysis in non-homogeneous functionally graded piezoelectric materials by the X-FEM, *Computational Materials Science*, 69, 542–558, 1970.
20. Bayesteh H., Mohammadi S., XFEM fracture analysis of orthotropic functionally graded materials, *Composites Part B: Engineering*, 44, 8–25, 2013.
21. Hu Y. L., De Carvalho N. V., Madenci E., Peridynamic modeling of delamination growth in composite laminates, *Composite Structures*, 132, 610–20, 2015.
22. Dugdale D. S., Yielding of steel sheets containing slits, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8, 100–104, 1960.
23. Barenblatt G.I., The Mathematical Theory of equilibrium cracks in brittle fracture, *Advances in Applied Mechanics*, 7, 55–129, 1962.
24. Silling S. A., Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48, 175–209, 2000.
25. Madenci E., Dorduncu M., Gu X., Peridynamic least squares minimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 348, 846-874, 2019.
26. Candaş, A., Oterkus, E., İmrak, C. E., Peridynamic simulation of dynamic fracture in functionally graded materials subjected to impact load, *Engineering with Computers*, 1-15, 2021.
27. Yang, Z., Oterkus, E. and Oterkus, S., A state-based peridynamic formulation for functionally graded Kirchhoff plates, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 26(4), 530-551, 2021.
28. Yang, Z., Oterkus, E. and Oterkus, S., Peridynamic mindlin plate formulation for functionally graded materials, *Journal of Composites Science*, 4(2), 76, 2020.
29. Yang, Z., Oterkus, E. and Oterkus, S., Peridynamic modelling of higher order functionally graded plates, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 10812865211004671, 2021.
30. Yang, Z., Oterkus, E. and Oterkus, S., Analysis of functionally graded Timoshenko beams by using peridynamics, *Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling*, 3(2), 148-166, 2021.
31. Bobaru F., Foster J.T., Geubelle P. H., Silling S. A., *Handbook of Peridynamic Modeling*, Chapman and Hall/CRC, New York, A.B.D., 2016.
32. Madenci E., Dorduncu M., Phan N., Gu X., Weak form of bond-associated non-ordinary state-based peridynamics free of zero energy modes with uniform or non-uniform discretization, *Engineering Fracture Mechanics*, 218, 106613, 2019.
33. Silling S. A., Epton M., Weckner O., Xu J., Askari E., Peridynamic states and constitutive modeling, *Journal of Elasticity*, 88, 151–184, 2007.
34. Dorduncu M., Barut A., Madenci E., Ordinary-State Based Peridynamic Truss Element, 56th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2015.
35. Dorduncu M., Madenci E., Finite element implementation of ordinary state-based peridynamics with variable horizon, *Engineering with Computers*, 1-14, 2022.
36. Madenci E., Peridynamic integrals for strain invariants of homogeneous deformation, *ZAMM Z. Angew (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik)*, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 97, 1236–1251, 2017.
37. Hu Y., Chen H., Spencer B. W., Madenci E., Thermomechanical peridynamic analysis with irregular non-uniform domain discretization, *Engineering Fracture Mechanics*, 197, 92–113, 2018.
38. Dorduncu M., Olmus I., Rabczuk T., A peridynamic approach for modeling of two dimensional functionally graded plates, *Composite Structures*, 279, 114743, 2022.
39. Silling S.A., Askari E. A., Meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics, *Composite Structures*, 83, 1526–1535, 2005.
40. Hirshikesh N. S., Annabattula R.K., Martínez-Pañeda E., Phase field modelling of crack propagation in functionally graded materials, *Composites Part B: Engineering*, 169, 239–248, 2019.
41. Kilic B., Madenci E., An adaptive dynamic relaxation method for quasi-static simulations using the peridynamic theory, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 53, 194–204, 2010.

