Yapı Teknolojileri Elektronik Dergisi
Cilt: 10, No: 1, 2014 (15-21)

Electronic Journal of ConstructionTechnologies
Vol: 10, No: 1, 2014 (15-21)

TEKNOLOJİK ARAŞTIRMALAR

www.teknolojikarastirmalar.com
e-ISSN:1305-631X

Teknik Not
(Technical Note)

Yeraltısuyu Akım Probleminin Sonlu Farklar Metodunu ile Çözümü

Murat KİLİT*
*Afyon Kocatepe Üniversitesi Mühendislik Fakültesi.İnşaat Müh. Böl., Afyonkarahisar/TÜRKİYE
mkilit@gmail.com

Özet
Bu çalışmada, kararlı akım koşulları altında yeraltı suyu akımının diferansiyel denklemi yazılmış ve bu denklemin sonlu farklar metoduna göre çıkarımı yapılmıştır. Elde edilen denklemin bilgisayar programı ile çözümünü sağlamak için iterasyon denklemi türetilmiştir. Gauss Seidel iterasyon metodu açıklanmış ve denklemler bu çözümü yapacak şekilde düzenlenmiştir. Toth tarafından oluşturulan bir akifer problemi açıklanmış, sayısal hale getirilmiş ve bu problemi çözen bir QBASİC bilgisayar programı tanıtılmıştır. Sonlu farklar metoduyla bilgisayar ortamında istenilen hassasiyette yeraltı suyu akım hesabın yapmanın oldukça kolay ve pratik olduğu belirlenmiştir.
Anahtar Kelimeler: Qbasic, Yeraltısuyu, Sonlu Farklar, Akifer, Gauss Seidel İterasyonu

The Solution of Groundwater Problem Using Finite Differences Method

Abstract
In this study, differential equation of groundwater flow under steady state condition was developed. Then, this equation was arranged for finite difference solution. An iteration method was also developed to provide solution of computer software. In the iteration process, Gauss Seidel iteration method wherein the equations were derived to perform the solution was also explained in the paper. Later, an aquifer problem developed by Todd was studied, digitized. A QBASIC software solving that problem was also introduced. By this way, it was determined that groundwater flow calculation by finite difference method is quite easy and pratic.
Keywords : Qbasic, Ground water, Finite Difference, Aquifer, Gauss Seidel Iteration

1. GİRİŞ

Su canlılar için vazgeçilmez bir yaşam kaynağıdır. Dünyada bulunan suyun % 2,5 tatlı sudan oluşmaktadır. Bu miktarın %68.9 kar ve buzul kütlelerinde , %0,3 akarsularda, % 30.8 yeraltı suyunda bulunmaktadır. Sürdürülebilir bir yaklaşımla işletilmesi durumunda, her zaman elde edilebilir olması, doğal kirleticilerden daha az etkilenebilir olması vb, yeraltı suları yüzey sularına göre avantajlıdır.

Yüzeyde kar ve yağmur sularının infiltrasyonu ile zemine sızan su gözenekli ortamlarda birikmeye başlar. Suyun hareket etmesine izin veren doygun hale gelmiş bu özel zemin formasyonlarına

Bu makaleye atıf yapmak için
Kilit M., "Yeraltısuyu Akım Probleminin Sonlu Farklar Metodunu ile Çözümü" Yapı Teknolojileri Elektronik Dergisi 2014, 10(1)15-21

How to cite this article
Kilit M.," The Solution of Groundwater Problem Using Finite Differences Method" Electronic Journal of Construction Technologies, 2014, 10 (1) 15-21

akifer adı verilir. Yeraltısularının hangi derinlikte bulunduğunun tespit edilmesi, suyun pompa ile temin edilmesi durumunda önem arz etmektedir. Yeraltısularının akiferde bulunduğu en üst noktadaki seviyeye yeraltısuyu tablası (seviyesi) olarak isimlendirilir. [1]

Yeraltı sularının analitik hesaplamaları bazı durumlarda mevcut olmakla birlikte çoğu zaman zor ve zahmetlidir. Yeraltı suyu problemlerinin genelinde, analitik çözüm elde etmek için yapılan kabuller gerçeği tam olarak yansıtmamaktadır. Bu durumda, matematiksel modelin çözümü için sayısal teknikler kullanmamız gerekmektedir. Sayısal tekniklerin başında sonlu elemanlar metodu ve sonlu farklar metodu gelmektedir. Bu iki metot, diferansiyel denklemlerin cebirsel denklemlere dönüştürülmesine imkân sağlayan ve bu sayede çözüm yapılmasına olanak veren bir model oluşturulmasını sağlar. Bilgisayar kullanılmadan önce hesap makinesi yardımıyla el ile çözüm yapmak mümkün iken, bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle iterasyon teknikleri ve doğrudan matris metotlarının kullanılmasıyla çok sayıda cebirsel denklemin çözümü mümkün olmuştur. Bilgisayar yardımıyla hesaplanan sayısal çözümlerin sonuçları analitik çözümler ile kıyaslanmakta ve doğruluğu test edilmektedir.

1.1. Serbest Yüzeyli Akifer İçerisinde İki Boyutlu Yeraltısuyu Akım Denklemi

Serbest yüzeyli akifer için kararlı akım koşullarında iki boyutlu yeraltı suyu akım denklemi darsi kanunu ve süreklilik denkleminin birleştirilmesiyle;

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(Kh\frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(Kh\frac{\partial h}{\partial y}\right) \tag{1}$$

gösterilebilir [2]. Bu denklemde K=K(x,y) kondaktivite değerini ifade etmektedir. Akifer, izotrop ve homojen kabul edilir, K değeri x ve y den bağımsız olduğu varsayılırsa denklem

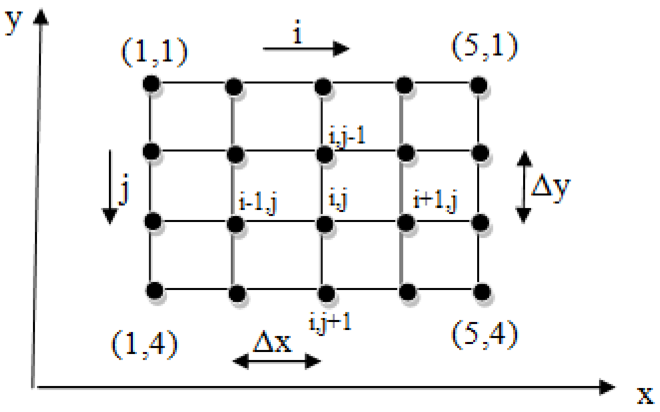
$$0 = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \tag{2}$$

biçimine dönüşür. Elde edilen kısmi diferansiyel denklem iki boyutlu yeraltı suyu akımlarının çözümünde kullanılmaktadır. Bu ifade Laplace Denklemi olarak adlandırılmakta bilimin diğer dallarında sıkça kullanılmaktadır. Fizikte, kararlı koşullar altında katılarda ısı iletimi için benzer ifade üretilebilir.

2. MALZEME ve METOT

2.1. Laplace Denkleminin Sonlu Farklar İfadesi

Problem alanındaki herhangi bir noktanın bilinmeyen değeri, analitik çözümler ile hesaplanabilmektedir. Sayısal hesaplama yapılabilmesi için öncelikle yeraltısu seviyesinin belirleneceği noktaların sayısı ve yerlerini tespit etmek gerekmektedir. Şekil 1'de yeraltı su seviyesinin hesaplanacağı x- y düzlemi üzerinde noktalardan oluşan grid ağı oluşturulmuştur. İki nokta arasında x mesafesi Δx ve y mesafesi Δy ile tanımlanmıştır. Δx ve Δy mesafelerinin küçük seçilmesi sayısal çözümlerin analitik çözümlere yakınsamasını sağlamaktadır. Ağ üzerindeki herhangi bir nokta (i,j) ifadesi ile tanımlanmaktadır.



Şekil 1 Sonlu farklar grid ağı

Şekil 1'de (i,j) indisiyle gösterilen noktaların su yükü hi,j olarak ifade edilmektedir. Kartezyen koordinat sistemi (x0,y0), (i,j) olarak gösterilebilir. Y ekseni boyunca y= y0, birbirine komşu 3 noktadaki su yükünü dikkate alalım, hi-1,j , hi,j , hi+1,j . Sonlu farklar metodunda hesaplama, noktalar arasındaki farkların elde edilen kısmi türevde yerine yazılması kuralına göre yapılır. Bir noktanın (x0,y0) koordinatındaki $\partial^2 h/\partial x^2$ değeri,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cong \frac{\frac{h_{i+1,j}-h_{i,j}}{\Delta x}-\frac{h_{i,j}-h_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x} \tag{3}$$

denklemini sadeleştirirsek,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cong \frac{h_{i-1,j}-2h_{i,j}+h_{i+1,j}}{\Delta x^2} \tag{4}$$

Benzer biçimde;

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \cong \frac{h_{i,j-1}-2h_{i,j}+h_{i,j+1}}{\Delta y^2} \tag{5}$$

olarak elde edilebilir [3].

Laplace denkleminde, Denklem 5 ve Denklem 6'yı sıfıra eşitler, Δx = Δy olarak alırsak, (i,j) noktasındaki sonlu farklar ifadesi,

$$h_{i-1,j}+h_{i+1,j}+h_{i,j-1}+h_{i,j+1}-4h_{i,j}=0 \tag{6}$$

olarak elde edilir. Denklem 6, kararlı akım problemlerinin sonlu farklar çözümlerini yapmak için sıkça kullanılmakta, bilgisayar programlarının kalbini oluşturmaktadır.

Denklem 6 $h_{i,j}$ için çözülecek olursa,

$$h_{i,j}=\frac{h_{i-1,j}+h_{i+1,j}+h_{i,j-1}+h_{i,j+1}}{4} \tag{7}$$

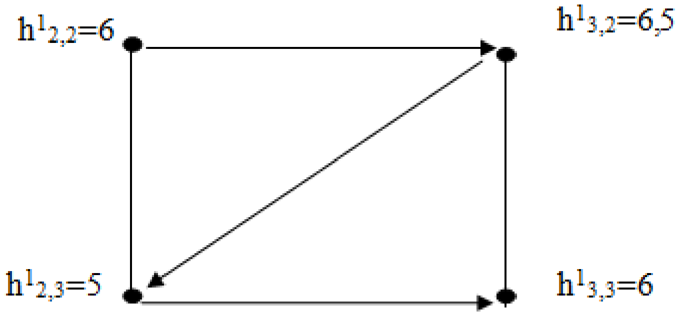
elde edilir. Yukarıdaki denklem ile herhangi bir hi,j noktasındaki hidrolik su yükü kendisine komşu dört noktanın hidrolik yük değerlerinin ortalaması alınarak hesaplanabilir.

2.2. Gauss- Seidel İterasyonu

Gauss Seidel iterasyon metodunda sayfayı okuduğumuz biçimde, Şekil 2 de gösterildiği gibi i=2 ve j=2 den başlanır, daha sonra soldan sağa ve yukarıdan aşağıya doğru, satır satır ilerlenir. Gauss-Seidel iterasyon formulü,

$$h_{i,j}^{m+1} = \frac{h_{i-1,j}^{m+1}+h_{i,j-1}^{m+1}+h_{i+1,j}^{m}+h_{i,j+1}^{m}}{4} \tag{8}$$

olarak türetilebilir. Bu denklemde m, iterasyon sayısını vermektedir. Bu metotla devamlı yeni hesaplanmış iki değer kullanılmaktadır. Örnek olarak Gauss Seidel iterasyonunu bir kuyu kenarındaki bölgenin yeraltı suyu hesaplanması problemine uygulayalım.



Şekil 2. Sonlu farklar grid ağı

Problemi çözerken h22,2 değerini hesaplamak için m=1 iterasyon aşamasında (2,2) noktasının sağındaki ve altındaki (h13,2 ve h12,3) değerleri ile 2. iterasyon aşamasında daha önce hesaplanmış h21,2 ve h22,1 değerleri kullanılmalıdır. Daha sonra h23,2 değeri, h22,2 ve h13,3 değerleri ve h23,1 ve h14,2 değerlerinden hesaplanmaktadır. Dikkat edilirse, h23,2 hesaplanırken (2,2) noktasının yeni değeri hesaba katılmaktadır. Başka bir ifadeyle, m+1 iterasyon aşamasında h i,j değeri hesaplanırken, m+1 iterasyon aşamasında h i-1,j ve h i, j-1 değerleri bilinmektedir. İterasyon hesaplamalarında en sık görülen problem, bilgisayar programının yakınsamamasıdır. İki başarılı Gauss Seidel iterasyonu arasındaki değişime c adını verilirse,

$$c = h_{i,j}^{m+1} - h_{i,j}^{m} \tag{9}$$

tanımlanabilir. Gauss Seidel iterasyonunda $\omega \geq 1$ olmak üzere ω (iterasyon rahatlatma katsayısı) ile c değeri çarpılır [3].

$$h_{i,j}^{m+1} = h_{i,j}^{m} + c\omega \tag{10}$$

Deklem 8'i Denklem 9 da yerine yazıp buradan $h_{i,j}^{m+1}$ eşitliğin soluna alınırsa,

$$h_{i,j}^{m+1} = (1-\ \omega)h_{i,j}^{m} +\ \omega\frac{h_{i-1,j}^{m+1}+h_{i,j-1}^{m+1}+h_{i+1,j}^{m}+h_{i,j+1}^{m}}{4} \tag{11}$$

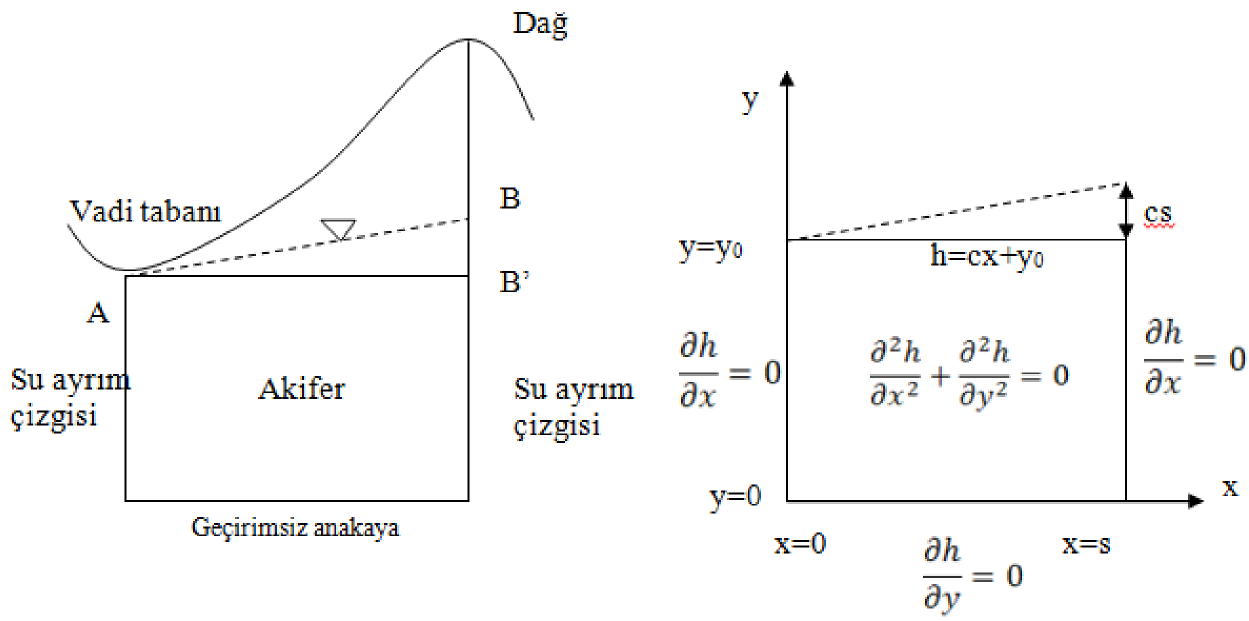
olarak bulunur. İterasyonların yakınsaması için çoğu zaman ω deneme yanılma ile bulunsa da genellikle $1 \leq \omega \leq 2$ olması tavsiye edilir. Eğer ω=1 alınırsa Denklem 11 Denklem 8'e dönüşür.

3. BULGULAR

3.1. Gauss Seidel İle Çözüm Yapan Bilgisayar Programı

Kısmi diferansiyel denklemlerden türetilen cebirsel denklemleri bilgisayar yardımıyla ve iterasyon yoluyla çözmek oldukça kolaydır.

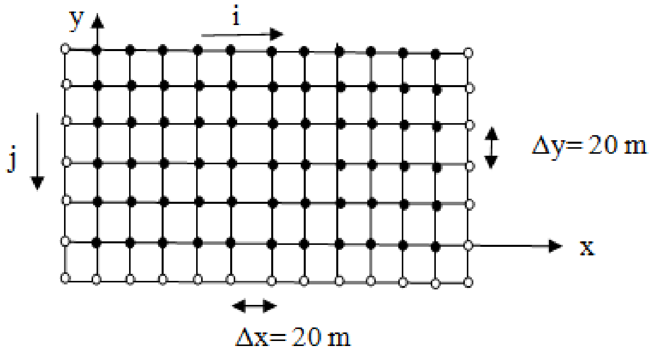
Şekil 3'de iki boyutlu bir yeraltı suyu akım sisteminin şematik ve matematik modeli verilmiştir [4]. Akiferin yatay ve düşey sınırları x=0, x=s ve y=0 de sisteme akım girmemekte ve sistemden dışarı akım çıkışı oluşmamaktadır (no flow boundry). Akifer yüzeyi için y=y0 için h=cx+y0 tanımlanabilir. Bu yüzeyde x, 0 ile s arasında değişmektedir. Problemin nümerik hali için değerler şu şekilde seçilmiştir; s=200 m, y0=100 m, c=0,02, 0<x<s, 0<y<y0.



Şekil 3. İki Boyutlu Yeraltısuyu akım sisteminin Şematik ve Matematik Modeli

Şekil 4'de problemin sonlu farklar çözümüne uygun bilgisayar modeli haline getirilmiş grid ağı gösterilmiştir. Model x yönünde 11 kolon, y yönünde ise 6 satırdan oluşmaktadır. Akım çıkışı olmayan sınır şartlarını oluşturmak için sanal düğüm noktaları eklenmiştir. Siyah renkli düğüm noktaları programın hesap yapacağı yerleri, beyaz renkli düğüm noktaları ise matematiksel hesaplamaların yapılacağı ve akımın geçmediği bölgelerin gösterileceği yerlere konulmuştur.

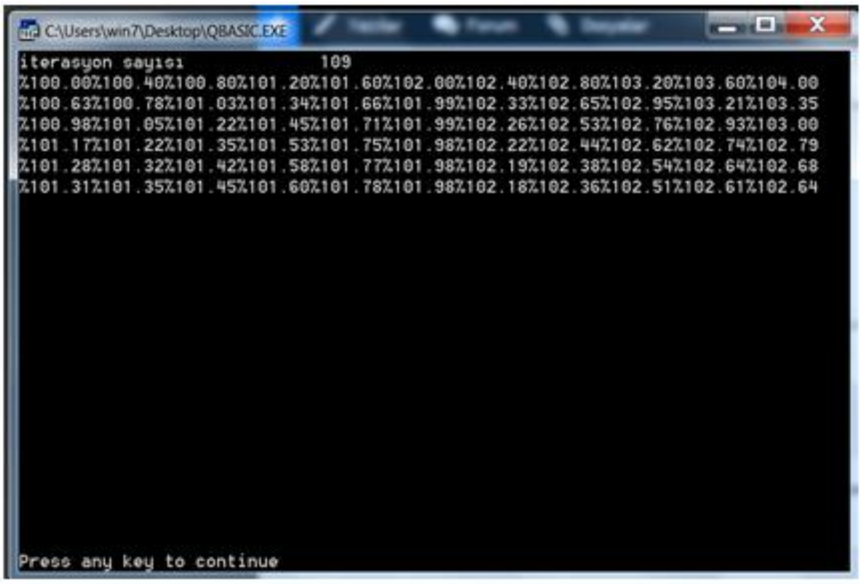
Qbasic diliyle düzenlenmiş programda başlangıçta bütün noktaların değeri 100 olarak girilmiştir. Daha sonra program Gauss Seidel iterasyon metoduna göre hesap yapmıştır. İterasyon sırasında yakınsama kriteri olarak kabul edilen, bütün düğüm noktalarındaki su yükü değişimi 0,001 (Amax değeri) değerinden küçük olunca, program başarılı bir şekilde durup sonuçları ekrana yazdırmaktadır. Bu sayede düğüm noktalarındaki su yükleri sonlu farklar metoduna göre program tarafından hesaplanmaktadır. Numit parametresi modelin iterasyon sayısını hesaplamaktadır.



Şekil 4. Sonlu Farklar Metoduna göre çözüm yapan bilgisayar programına ait model grid ağı

4. SONUÇ

Programın çalıştırılması sonucunda elde edilen veriler ekran görüntüsü biçiminde Şekil 5'de verilmiştir. Hesaplama boyunca 109 adet iterasyon yapılmıştır. Şekil 5'deki program sonuçlarını kullanarak eş potansiyel çizgileri ile bu çizgilere dik doğrultuda akım çizgileri çizilebilir.



Şekil 5. Qbasic bilgisayar programının sonuçlarını veren ekran görüntüsü

Bu çalışmada, kararlı akım koşulları dikkate alınarak yeraltı suyu akım denklemi türetilmiştir. Türetilen denklemin analitik çözümü zor olduğu için elde edilen denklem sonlu farklar metoduna göre düzenlenmiştir. Bilgisayar ile hesaplama yapabilmek için iterasyon mantığı açıklanmıştır. Qbasic programı ile yeraltı suyu akım denkleminin çözülebilmesi için iterasyon denklemi türetilmiştir. Programlamada en çok kullanılan metotların başında gelen Gauss Seidel iterasyon metodu açıklanmıştır. Dağ ile vadi arasında kalan bir akifer problemi kurulmuş, sayısal hale getirilmiş ve çözülmüştür. Bilgisayar yardımıyla el ile çözülemeyecek hassaslıkta ve ayrıntıda hesap yapılabileceği gösterilmiştir. Sonlu farklar metodu ile çözüm yapan bilgisayar programlarının kullanıcı tarafından görülemeyen hesap adımları gösterilmiştir. Bu program kullanılarak daha fazla noktada daha farklı problem çözümü yapmak mümkündür. Programın Qbasic yazılımı ekte sunulmuştur.

5. KAYNAKLAR

1. Dumlu, O., Yalçın, H., T., Bozkurtoğlu, E., 2006, “Yeraltısuyu Jeolojisi ve Hidroliği”, Literatür Yayınevi, 37-44

2. Charbeneau R., J.,, 2000, “Groundwater Hydraulics and Pollutant Transport”, Prentice Hall, 48-64

3. Wang, H., F., Anderson, M., P., 1982, “ Introduction To Groundwater Modelling”, Academic Press, 21-37

4. Toth, J., 1962, “A theory of groundwater Motion in small drainage Basis in central Alberta Canada”, Journal of Geophisical Research 67(11):4375-4387

6. EKLER

Q Basic Bilgisayar Dilinde yazılmış program kodu.