Niğde Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, Cilt 2, Sayı 2, (2013), 43-49

STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SAYISAL ÖZDEĞERLERİ

Güldem YILDIZ[1*], Bülent YILMAZ[2]

Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Niğde Üniversitesi, 51200, Niğde, Türkiye
Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Marmara Üniversitesi, 81040, İstanbul, Türkiye

ÖZET

Bu makale, Dirichlet sınır şartlarıyla ve $-y''(x) + q(x)y(x)$ diferansiyel ifadeyle üretilen Sturm Liouville diferansiyel operatörleriyle ilgilidir. Burada $q(x)$ sonlu sayıda tekil noktaları olan Lebesque integrallenebilir potansiyel fonksiyondur. Nümerik yöntemlerden sonlu farklar yöntemi kullanılarak, Sturm Liouville diferansiyel operatörün özdeğerleri elde edilmiştir. Bu özdeğerlerin perturbasyonları hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Özdeğer, Sonlu Farklar Metodu, Sturm-Liouville

NUMERICAL EIGENVALUES OF STURM-LIOUVILLE OPERATORS

ABSTRACT

This paper relates to Sturm Liouville differential operators generated by the differential expression $-y''(x) + q(x)y(x)$ and by Dirichlet boundary conditions. Here $q(x)$ is a Lebesque integrable potential function having finite number of singular points. Using the finite difference method from numerical methods, eigenvalues of the Sturm Liouville differential operator are obtained. Perturbations of these eigenvalues are calculated.

Keywords: Eigenvalue, Finite Difference Method, Sturm-Liouville

1.GİRİŞ

Birçok kuantum mekanik ve mühendislik problemi çözümünde Sturm Liouville operatörü kullanılmaktadır. Bu problemlerde özdeğer ve özfonksiyonların bulunması kuantum mekanik, mühendislik ve matematik gibi bilim dallarında çok önemlidir. Sturm Liouville probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonlarının bulunmasıyla ilgili pek çok çalışma yapılmıştır.

Klasik çalışmalarda, adi diferansiyel denklem tarafından üretilen diferansiyel operatörün özdeğerleri ve özfonksiyonlarının bulunabilmesi için bu diferansiyel denklemin katsaylarının belirli bir mertebeden türevlere sahip olması gerekmektedir [1-8]. Nümerik çalışmalarda; Paine, Hoog ve Anderssen [9] asimptotik doğruluk teknikleriyle sonlu farklar metodunu birlikte kullanarak özdeğerler için etkili sonuçlar elde etmişlerdir. Andrew ve Paine [10], sonlu elemanlar yöntemini kullanarak regüler Sturm Liouville probleminin yaklaşık özdeğerlerini bulmuşlardır. Attili [11], Sturm-Liouville sınır değer probleminin çözümü için Adomian Decomposition metodunu kullanmış ve nümerik örnekler vermiştir. Bu alanın araştırmacılarndan biri olan Baily [12] SLEIGN programını kullanmıştır. Yine Baily ve diğerleri tarafından [13], SLEIGN2 adlı program kullanılmıştır. Tekil Sturm Liouville problemlerini de [14]'de görmek mümkündür. Ghelardoni ve Gheri [15] Sturm-Liouville problemlerinin yaklaşık özdeğerlerini prüfer ve shooting yöntemlerini kullanarak elde etmişlerdir. Ledoux ve diğerleri [16] fizik alanında karşılaşılan problemler için shooting metodunu, varyasyonel yöntemleri Sturm-Liouville problemlerinde uygulamışlardır. [17], [18] makalelerinde tekil sınır değer problemleri için sonlu farklar metodunu kullanarak, lineer ve lineer olmayan sınır değer problemlerine nümerik örnekler verilmiştir.

[*] Corresponding author. Tel.: 0 388 225 2126; Faks: 0 388 225 0180
E-mail:guldem.yildiz@nigde.edu.tr

Kumar ve Singh [19] tekil sınır değer problemlerinin çözümünde, farklı hesaplama tekniklerini bir araya getiren ve sınıflandıran bir çalışma yapmışlardır.

Yılmaz ve Veliev'in [20] makalesinde $L_2[0,1]$ uzayında $L(q)$ operatörü

$$-y''(x)+q(x)y(x)$$

$$y(0)=y(1)=0$$

Dirichlet sınır şartlarıyla verilmiştir. Bu operatörde $q(x)$ potansiyel fonksiyonuna hiçbir türev şartı koymaksızın, özdeğer ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller bulunmuştur. Sonlu sayıda tekil noktası olan $q(x)$ potansiyel fonksiyonu için Yıldız ve diğerlerinin [21] makalesinde $L(q)$ operatörün asimptotik ve nümerik yöntemle özdeğerleri elde edilerek, iki yöntemle elde edilen özdeğerler perturbasyon tekniğiyle karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmada, sonlu sayıda tekil noktası olan $q(x)$ potansiyel fonksiyonunun [21]'de alınan tekil nokta sayısı arttırılarak $L(q)$ operatörünün özdeğerleri, sonlu farklar yöntemiyle elde edilmiştir. Ayrıca, sınır şartları tekil noktalara bağlı olan Sturm Liouville probleminin, sonlu farklar yöntemiyle özdeğerleride elde edilmiştir.

2. SONLU FARKLAR YÖNTEMİYLE ÖZDEĞERLER

Sonlu farklar yöntemi, bir sınır değer problemini, düğüm noktası olarak adlandırılan m tane noktaya bölerek kesikli bir sistem haline dönüştürür. Bu sistem için Merkezi Fark Formülleri,

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y \tag{1}$$

$$y(0)=y(1)=0 \tag{2}$$

(1) ve (2) sınır değer problemine uygulanırsa; $[0,1]$ aralığı, $m>2$ tamsayısı için, $h=\frac{1}{m+1}$ olmak üzere $m+11$ eşit alt aralığa bölünür. Alt aralıkların uç noktaları; $j=0,1,2,\dots,m+1$ olmak üzere $x_j=jh$ düğüm noktalarıdır [22]. y fonksiyonunu x_j civarında üçüncü dereceden Taylor polinomuna açarak, x_{j+1}, x_{j-1} noktaları için Taylor polinomları Taylor teoremine göre yazılırsa ve $y''(x_j)$ fonksiyonu için ortalama değer teoreminden;

$$y''(x_j)\approx\frac{y(x_{j+1})-2y(x_j)+y(x_{j-1})}{h^2}$$

$y''(x_j)$ için Merkezi Fark Formülü elde edilir. (1)'e merkezi fark formülü uygulanırsa,

$$\frac{-Y_{j-1}+2Y_j-Y_{j+1}}{h^2}+q_jY_j=\Lambda Y_j \qquad j=1,2,\dots,m \tag{3}$$

elde edilir ve (2) sınır şartı;

$$Y_0=0,\ \ Y_{m+1}=0 \tag{4}$$

biçimindedir. (4) sınır şartıyla birlikte (3) denklemlerinin oluşturduğu denklem sisteminin çözümünden Λ yaklaşık özdeğerleri elde edilir.

3. ÖZDEĞERLERİN PERTURBASYONU

Bu bölümde, farklı potansiyel fonksiyonlar kullanılarak Sturm Liouville operatörünün özdeğerlerinin perturbasyonları elde edilmiştir.

[21] numaralı makalede, ν pozitif tamsayı ve

$$q_k(x) = \frac{1}{\left|x-\frac{k}{v}\right|^{1/2}} \qquad k = 0,1,2 \ldots v$$

olmak üzere

$$L(q_k) = -\frac{d^2}{dx^2} + q_k(x)$$

$L(q_k)$ operatörün n. özdeğeri λ_n^k sembolüyle gösterilmiştir. $v+1$ sayıda $q_k(x)$ potansiyel fonksiyonların toplamı

$$Q_v(x) = \sum_{k=0}^{v} q_k(x)$$

olmak üzere $L(Q_v)$ operatörün n. özdeğeri Λ_n^v sembolüyle verilir. $L(q_k)$ operatörün n. özdeğeri için perturbasyon

$$p_n^k = \lambda_n^k - (n\pi)^2$$

ve $L(Q_v)$ operatörün n. özdeğeri için perturbasyon

$$P_n^v = \Lambda_n^v - (n\pi)^2$$

eşitlikleriyle hesaplanır. P_n^v ve p_n^k perturbasyonları kaynak [21]'de üç tekil noktalı potansiyel fonksiyon için hesaplanmıştır. Bu bölümde dört tekil noktalı potansiyel fonksiyon için, sonlu farklar yöntemiyle 20000 alt aralıkta $k = 0,1,2,3,4$ olmak üzere P_n^4 ve p_n^k perturbasyonları Tablo 1' de verilmiştir. Bu tabloda Q_4 potansiyelinin $L(Q_4)$ operatörünün özdeğerlerindeki etkisi P_n^4 perturbasyonuyla, q_k potansiyellerinin $L(q_k)$ operatörlerinin özdeğerlerindeki etkisinin toplamı p_n^k perturbasyonlarının toplamıyla verilmiştir.

Tablo 1. $L(Q_4)$ ve $L(q_k)$ operatörlerinin özdeğerleri için perturbasyonlar

n	P_n^4	$\sum_{k=0}^{4} p_n^k$	$\left\|P_n^4 - \sum_{k=0}^{4} p_n^k\right\|$
1	12,48674823	11,18139989	1,305348341
2	12,32142869	13,71594489	1,394516198
3	12,26193743	11,73140544	0,530531994
4	10,31245853	10,21931131	0,093147219
5	12,30007762	11,73350445	0,566573174
6	12,28313095	13,00655413	0,723423177
7	12,26640238	11,83260985	0,433792533
8	10,88308505	10,78835338	0,094731669
9	12,27648743	11,84356732	0,432920106
10	12,27456622	12,80389735	0,529331126
20	11,39567724	11,28684393	0,108833305

Kaynak [21]'de Tablo 2'nin son sütunuyla bu çalışmadaki Tablo 1'in son sütunu karşılaştırılırsa; kaynak [21] Tablo 2'de, Q_2 potansiyelinin $L(Q_2)$ operatörünün ilk yirmi özdeğerindeki etkisiyle, $k = 0,1,2$ değerleri için q_k potansiyellerinin toplamının $L(q_k)$ operatörlerinin ilk yirmi özdeğerindeki etkisinin toplamları arasındaki fark 5.10^{-5} ve 2.10^{-2} sayıları arasında değişmektedir. Tablo 1'in son sütunuysa $(9.10^{-2}, 1.3)$ aralığında değişen değerler arasında kalmaktadır. İki tablodan elde edilen veriler karşılaştırıldığında, Sturm Liouville problemindeki potansiyel fonksiyonun tekil nokta sayısı üç olduğunda özdeğerlerdeki etkisi, beş tekil noktası olan potansiyel fonksiyonun Sturm Liouville Probleminin özdeğerlerindeki etkisinden $(8.10^{-2}, 1.28)$ aralığındaki değişen değerler kadar azalmaktadır.

4. SINIR ŞARTLARINDA TEKİL NOKTALAR

$Q_\nu(x)$ potansiyel fonksiyon sıfır olduğunda

$$-y'' = \lambda y,$$

$$y(0) = y(1) = 0$$

sınır değer probleminin özdeğerleri $(n\pi)^2$ dir. Sınır şartları değiştirilirse,

$$-y'' = \lambda y,$$

$$y\left(\frac{k}{\nu}\right) = y\left(\frac{k+1}{\nu}\right) = 0 \qquad k = 0,1,2,\dots,\nu$$

sınır değer probleminin özdeğerleri $\nu^2(n\pi)^2$ dir. Sınır şartları $\frac{k}{\nu}$ ve $\frac{k+1}{\nu}$ tekil noktalara bağlı olan

$$-y'' + \sum_{k=0}^{\nu} \frac{1}{\left|x-\frac{k}{\nu}\right|^{\frac{1}{2}}} y = \lambda y, \qquad x \in b_k = \left[\frac{k}{\nu}, \frac{k+1}{\nu}\right], \tag{5}$$

$$y\left(\frac{k}{\nu}\right) = \left(\frac{k+1}{\nu}\right) = 0 \tag{6}$$

sınır değer probleminin sonlu farklar yöntemiyle elde edilen n. özdeğeri $S_n^\nu(b_k)$ sembolüyle gösterilmek üzere ν'ye bağlı alt aralıklar $m = 10^i\nu$ ($i = 2,3,\dots,l$), $l \in Z^+$ olacak biçimde

$$\frac{S_n^\nu(b_k)}{\Lambda_n^\nu} \le \nu^2 \tag{7}$$

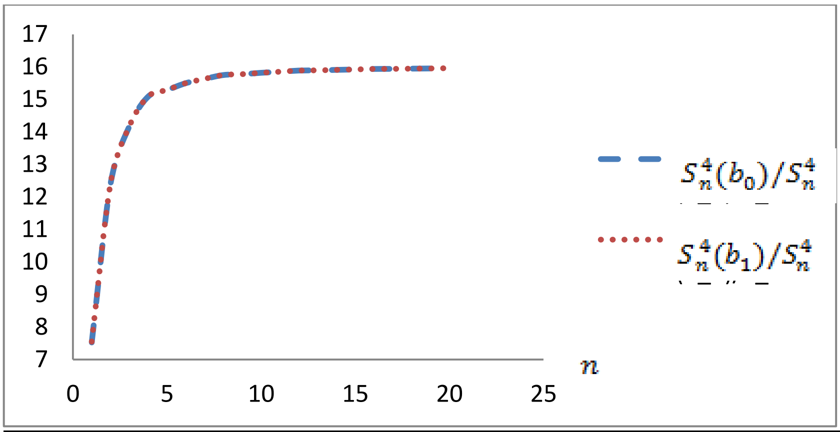
eşitsizliği gerçeklenir.

Aşağıdaki tablolarda ve grafiklerde farklı tekil noktalar ve alt aralıklar için (7) bağıntısını sağlayan sonuçlar verilmiştir.

Tablo 2. $i = 3$ ve $\nu = 4$ için (5)-(6) sınır değer probleminin özdeğerleri ve bu özdeğerlerin oranları

n	S_n^4	$S_n^4(b_0)/S_n^4$	$S_n^4(b_1)/S_n^4$	$S_n^4(b_2)/S_n^4$	$S_n^4(b_3)/S_n^4$
1	22,32089661	7,52388972	7,549518292	7,549518292	7,52388972
2	51,77056607	12,40563876	12,41687075	12,41687075	12,40563876
3	101,0535077	14,17140955	14,17718314	14,17718314	14,17140955
4	168,2260039	15,08457842	15,08805080	15,08805080	15,08457842
5	259,0030954	15,28531296	15,28756958	15,28756958	15,28531296
6	367,5582788	15,49704153	15,49863216	15,49863216	15,49704153
7	495,8400493	15,62801359	15,62919292	15,62919292	15,62801359
8	642,5357726	15,74657079	15,74748098	15,74748098	15,74657079
9	811,6747687	15,77268171	15,77340229	15,77340229	15,77268171
10	999,2001733	15,81530326	15,81588864	15,81588864	15,81530326
20	3959,159551	15,95685198	15,95699974	15,95699974	15,95685198

Tablo 2'de verilen üçüncü ve dördüncü sütunlardaki değerler Şekil 1'de gösterilmiştir.

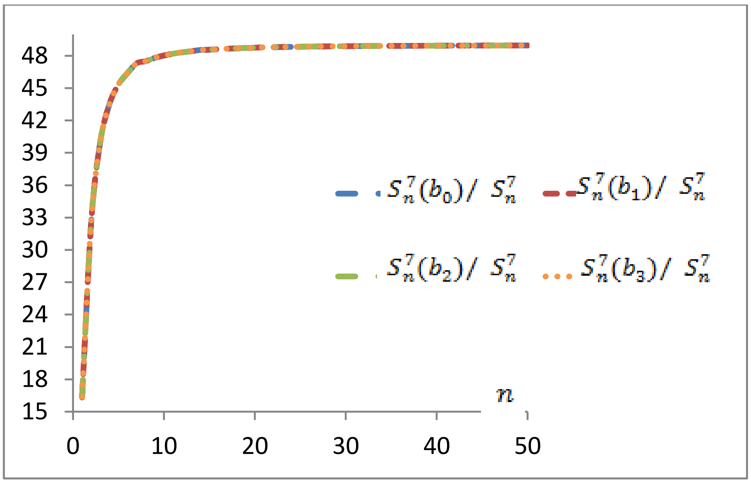


Şekil 1. Beş tekil noktalı potansiyel fonksiyon için (5)-(6) sınır değer probleminin özdeğer oranları

Tablo 3. $i = 3$ ve $\nu = 7$ için (5)-(6) sınır değer probleminin özdeğerleri ve bu özdeğerlerin oranları

n	S_n^7	$S_n^7(b_0)/\ S_n^7$	$S_n^7(b_1)/\ S_n^7$	$S_n^7(b_2)/\ S_n^7$
1	30,66967685	16,31217148	16,34915623	16,36702504
2	59,95173392	32,55738096	32,57653207	32,58572867
3	109,2212817	40,01292228	40,02346020	40,02851411
4	178,2725490	43,50495126	43,51141314	43,51451076
5	267,0701655	45,33778596	45,34210111	45,34416921
10	1007,293507	48,02913479	48,75443871	48,03082799
20	3968,106417	48,75414808	48,75443871	48,75457795
30	8902,826469	48,89029241	48,89042195	48,89048401
40	15811,25812	48,93823616	48,93830910	48,93834404
50	24693,26908	48,96049745	48,96054416	48,96056653
n	$S_n^7(b_3)/\ S_n^7$	$S_n^7(b_4)/\ S_n^7$	$S_n^7(b_5)/\ S_n^7$	$S_n^7(b_6)/\ S_n^7$
1	16,37249171	16,36702504	16,34915622	16,31217148
2	32,58853814	32,58572867	32,57653206	32,55738096
3	40,03005759	40,02851411	40,0234602	40,01292228
4	43,51545669	43,51451076	43,51141313	43,50495125
5	45,34480072	45,34416921	45,34210111	45,33778596
10	48,03099545	48,03082799	48,03027952	48,02913479
20	48,75462046	48,75457795	48,75443871	48,75414808
30	48,89050296	48,89048401	48,89042195	48,89029241
40	48,93835471	48,93834404	48,9383091	48,93823616
50	48,96057336	48,96056653	48,96054416	48,96049745

(5)-(6) sınır değer probleminin potansiyel fonksiyonunun tekil nokta sayısı sekiz olduğunda, Tablo 3'de verilen özdeğer oranları aşağıdaki Şekil 2'de gösterilmiştir.



Şekil 2. Sekiz tekil noktalı potansiyel fonksiyon için (5)-(6) sınır değer probleminin özdeğer oranları

5. SONUÇ

Potansiyel enerjiyi belirleyen potansiyel fonksiyon; tekil noktalı potansiyel fonksiyon olduğunda, diferansiyel operatörün özdeğerlerinin kesin değerlerini bulmak mümkün değildir. Bu çalışmada, sonlu farklar yöntemiyle sonlu sayıda tekil noktası olan Sturm Liouville Diferansiyel operatörün enerji seviyelerini belirleyen özdeğerleri elde edilmiştir. Beş tekil noktalı potansiyel fonksiyonun $L(Q_4)$ operatörünün özdeğerleri üzerindeki etkisini belirleyen P_n^4 ve p_n^k perturbasyonları hesaplanmıştır. $k = 0,1,2,3,4$ değerleri için $q_k(x)$ potansiyellerinin toplamı $Q_4(x)$ potansiyelini vermektedir. Bu potansiyeller arasındaki bağıntı gözönüne alındığında, q_k potansiyelli $L(q_k)$ operatörlerinin özdeğerleri için p_n^k pertubasyonlarının toplamı, $L(Q_4)$ operatörünün özdeğerleri için P_n^4 perturbasyonuna $(9.10^{-2}, 1.3)$ aralığındaki değerler kadar yaklaşmaktadır.

Sınır şartları tekil noktalara bağlı olan (5)-(6) sınır değer probleminin özdeğerleri elde edilmiştir ve (7) bağıntısı Tablo 2 ve Tablo 3'te verilmiştir. Tablo 2'de 20. özdeğerden büyük özdeğerlerin ν^2'ye 10^{-2} mertebeyle yaklaştığı, Tablo 3'de 40. özdeğerden büyük özdeğerlerin ν^2'ye 10^{-2} mertebeyle yaklaştığı tespit edilmiştir. Tablo 2 ve Tablo 3 karşılaştırılırsa, potansiyel fonksiyonun tekil nokta sayısı arttığında (7) bağıntısının $n \gg 1$ değerleri için gerçekleştiği görülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] BIRKHOFF, G.D., "Boundary Value and Expansion Problems of Ordinary Linear Differantial Equations", Trans. Amer. Math. Soc., 9, 373-395, 1908.
[2] TAMARKIN, J. D., "Some General Problems of the Theory of Ordinary Linear Differential Equations and Expansion of an Arbitrary Function in Series of Fundamental Functions", Math. Zeit., 27, 1-54, 1927.
[3] TITCHMARSH, E.C., "Eigenfunction Expansions", Oxford University Press, Vol I., 1962.
[4] NAIMARK, M. A., "Linear Differential Operators", 4th Edition, George G. Harrap and Company,1967.
[5] MARCHENKO, V. A., "Sturm-Liouville Operators and Applications", Basel, Birkhauser Verlag, 1986.
[6] EVERITT, W.N., Gunson, J., "Some Comments on Sturm-Liouville Eigenvalue Problems with Interior Singularities", Journal of Applied Mathematics and Physics., 38, 813-838, 1987.
[7] PARLETT, B. N., "The Symmetric Eigenvalue Problem", Englewood Cliffs, Prentice-Hall, N. J., 1980.
[8] DUNFORD, N., SCHWARTZ, J. T., "Linear Operators", Part 3, Spectral Operators, Wiley-Interscience, MR 90g:47001c, New York, 1988.
[9] PAINE, J. W., HOOG, F. R., ANDERSSEN R.S., "On the Correction of Finite Difference Eigenvalue Approximations For Sturm-Liouville Problems", Computing, 26, 123-139, 1981.
[10] ANDREW, A., PAINE J., "Correction of Finite Element Estimates For Sturm-Liouville Eigenvalues", Numer. Math.,50, 205-215, 1986.

[11] ATTILLI, B.S., "The Adomian Decomposition Method For Computing Eigenelements of Sturm-Liouville Two Point Boundary Value Problems", Appl. Math. Comput.,168, 1306-1316, 2005.
[12] BAILY, P.B., "Modified Prufer Transformation", J. Comput. Phys, 29, 306-310,1978.
[13] BAILY, P.B., EVERITT, W.N., ZETTL, A., "Computing Eigenvalue of Singular Sturm-Liouville Problems", Results Math, 20, 391-423, 1991.
[14] BAILY, P.B., EVERITT, W.N., WEIDMANN, J., ZETTL, A., "Regular Approximations of Singular Sturm Liouville Problems" Results in Mathematics,22, 3-22,1993.
[15] GHELARDONI, P., GHERI, G., "Improved Shooting Technique For Numerical Computations of Eigenvalues in Sturm-Liouville Problems", Nonlinear Analysis, 47**,** 885-896, 2001.
[16] LEDOUX, V., VAN DAELE, M.G., BERGHE, V., "Efficient Computation of High Index Sturm-Liouville Eigenvalues for Problems in Physics", Computer Physics Communications,180, 241-250, 2009.
[17] KUMAR, M., "A New Finite Difference Method for a Class of Singular Two-Point Boundary Value Problems", Applied Mathematics and Computation, 143, 551-557, 2003.
[18] KUMAR, M., AZIZ, T., "A Uniform Mesh Finite Difference Method For a Class of Singular Two-Point Boundary Value Problems", Applied Mathematics and Computation, 180, 173-177,2006.
[19] KUMAR, M.; SINGH, N., "A Collection of Computational Techniques For Solving Singular Boundary Value Problems", Advances in Engineering Software, 40, 288- 297, 2008.
[20] YILMAZ, B., VELİEV, O. A., "Asymptotic Formulas For Dirichlet Boundary Value Problems", StudiaScientiarum Mathematicarum Hungarica,42, 153-171, 2005.
[21] YILDIZ, G., YILMAZ, B., VELİEV, O. A.,"Asymptotic and Numerical Methods in Estimating Eigenvalues", Mathematical Problems in Engineering, http://dx.doi.org/10.1155/2013/415479, 2013.
[22] BURDEN, R. L., "Numerical Analysis", 7th Edition, Pacific Grove, CA : Brooks/Cole, 2001**.**