D.E.Ü.İ.İ.B.F. Dergisi
Cilt:14, Sayı:1, Yıl:1999, ss:27-36

BULANIK AMAÇ KATSAYILI DOĞRUSAL PROGRAMLAMA

Ayşe KURUÜZÜM(*)

ÖZET

Çalışmada bulanık (fuzzy) katsayılı amaç fonksiyonuna sahip doğrusal programlama problemleri tanımlanmaktadır. Bu alandaki önemli modeller ve teoriler incelenmekte ve ikinci dereceden üyelik fonksiyonu kullanan bir model önerilmektedir. Ayrıca bir örnek problem üzerinde yöntemler karşılaştırılmaktadır.

1.Giriş

Bulanık (fuzzy) küme teorisi, kesin olmayan (imprecise), müphem (vague) ve belirsiz (uncertain) faaliyet ve gözlemlerin tanımlarının geçtiği problemleri çözmek için geliştirilmiştir. Bir bulanık küme, sürekli üyelik dereceleri olan nesneler sınıfıdır. Böyle bir küme her nesneye 0 ile 1 arasında bir üyelik derecesi atayan bir üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. Bulanık kümelerin karar verme olayına uygulanması ise genellikle karar verme teorisinin uzantılarını içermektedir. Karar belirsizlik ve risk faktörüne sahipse bulanık karar verme teorisi amaçların ve kısıtların belirsizliğini ortadan kaldırmaya çalışmaktadır (Zimmerman, 1987:10).

Uygulamada, amaç katsayıları her zaman kesin olmamaktadır; yeni ürünlerin veya projelerin birim maliyetleri/ kârları, faiz oranları ve nakit akışları gibi . Bu kesin olmayan durumun mevcut olasılık teorisiyle modeli oluşturulsa , amaç katsayılarının olasılık dağılımları bulunsa bile bilinen Doğrusal Programlama (DP) yöntemlerinden biriyle doğrudan çözülemez. Yardımcı programlama tekniklerine ihtiyaç duyulmaktadır (Lai , v.d., 1992b:203).

Amaç katsayıları bulanık olan DP problemleri için değişik yöntemler geliştirilmiştir. Çalışmada bunlardan Lai ve Hwang'ın ″en olası ″ , ″ en kötümser ″ ve ″en iyimser ″ değer kavramları ile üçgensel bulanık sayıları kullandığı yöntem (Lai,v.d. , 1992b:203), Rommelfanger, Hanuscheck ve Wolf ' un sürekli olasılık dağılımı ile α - seviye keseni kavramlarını esas alan yaklaşımları (Rommelfanger, v.d., 1989) incelendikten sonra Tanaka, Ichihashi ve Asai' nin teknolojik katsayıları ve sağ taraf değerleri bulanık olan DP problemleri için geliştirdikleri simetrik üçgensel üyelik fonksiyonları kavramı (Lai v.d., 1992a:196) bulanık amaç katsayıları için kullanılmakta , ayrıca ikinci dereceden üyelik fonksiyonları oluşturan bir yöntem önerilmektedir. Rommelfanger'in ″Linear Programming with Fuzzy Objectives″ isimli makalesinden alınan bir

---

(*) Doç.Dr., A.Ü. İ.İ.B.F. İşletme Bölümü

örnek problem (Rommelfanger, 1989:32) bütün yöntemler ile çözülerek sonuçlar karşılaştırılmaktadır.

2. Matematiksel Gösterim

Uygulamada yaygın bir şekilde kullanılan DP problemi ,

$$\text{maks } Z = c^T x$$

$$x \in X = \{ x \,/\, Ax \le b \text{ ve } x \ge 0 \} \qquad (1)$$

şeklindedir. Burada c ve x , n boyutlu vektörler, A mxn boyutlu bir matris, b de m boyutlu bir vektördür. Amaç fonksiyonundaki katsayıları bulanık olan bir DP problemi ise,

$$\text{maks } Z \cong c^T x$$

$$x \in X \qquad (2)$$

olarak ifade edilebilir. ″ ~ ″ işareti bulanıklığı anlatmak amacı ile kullanılmaktadır.

α - keseni : Bir A bulanık kümesinin α-keseni, X evrensel kümesinin A'daki üyelik derecesi belirli bir α değerine eşit veya ondan büyük olan bütün elemanlarını içeren

$$A_\alpha = \{ x \in X \,/\, \mu_A(x) \ge \alpha \}$$

kümesidir (WANG, 1983:280). A kümesinin farklı α kesenlerini temsil eden bütün $\alpha \in [0,1]$ seviyeleri kümesi

$$\Lambda_A = \{ \alpha \,/\, \mu_A(x) = \alpha \text{ , bazı } x \in X \text{ için } \}$$

ye A' nın seviyeler kümesi denir.

3. Mevcut Modellerin İncelenmesi

3.1. Lai ve Hwang Yaklaşımı

Bu yaklaşımda yazarlar (Lai, v.d., 1992:203) (2) probleminin çözümünde üçgensel olasılık dağılımından faydalanmaktadırlar. Karar vericiden her c_j için $c_j = (c_j^m, c_j^p , c_j^o)$ değerlerini alarak Şekil 1' deki gibi bir üçgensel olasılık dağılımlı üyelik fonksiyonları bulmaktadırlar. Burada, c_j^m en olası değer, c_j^p en kötümser değer ve c_j^o en iyimser değer olarak alınmaktadır.

(2) problemi $\mu_j(c_j^m) = 1$ ve $\mu_j(c_j^p) = \mu_j(c_j^o) = 0$ normalizasyonundan sonra,

$$\text{maks} \sum (c_j^m x_j , c_j^p x_j , c_j^o x_j)$$

$$x \in X$$

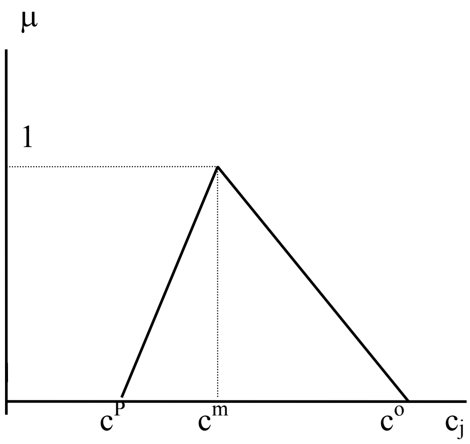
veya,

$$\text{maks} (c^m x, c^p x, c^o x)$$

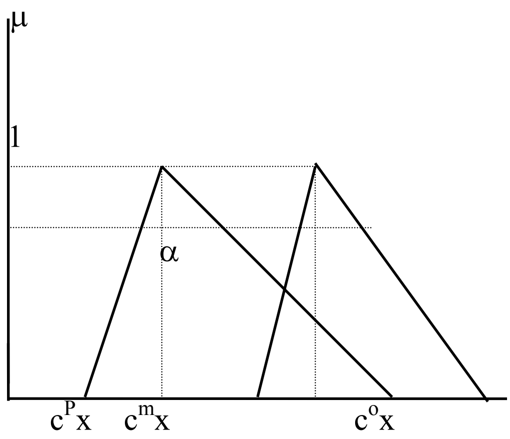
$$x \in X \qquad (3)$$

problemine dönüşmektedir, burada $c^m = (c_1^m, c_2^m, \ldots, c_n^m)$, $c^p = (c_1^p, c_2^p, \ldots, c_n^p)$ ve

$c^o = (c_1^o, c_2^o, \ldots, c_n^o)$ dur. Amaç fonksiyonu ($c^m x, c^p x, c^o x$) üçgensel olasılık dağılımlı kesin olmayan bir fonksiyondur.



Şekil 1. c_j nin üçgensel olasılık dağılımı



Şekil 2. Amaç katsayısının daraltılması

Lai ve Hwang (3) problemini çözmek yerine c_j^m 'i maksimize, ($c^m x - c^p x$)' i minimize ve ($c^o x - c^m x$) ' i maksimize ederek [$c_j^p \quad c_j^o$] aralığını daraltacak olan (4) yardımcı problemini oluşturmaktadırlar (Bkz. Şekil 2):

$$\begin{aligned} \min z_1 &= (c^m - c^p) x \\ \text{maks } z_2 &= c^m x \qquad (4) \\ \text{maks } z_3 &= (c^o - c^m) x \\ x &\in X \end{aligned}$$

(4) problemi çok amaçlı doğrusal programlama tekniklerinden biri ile çözülebileceği gibi amaç fonksiyonlarının Pozitif Ideal Çözüm (PIS) ve Negatif Ideal Çözüm (NIS) kavramı kullanılarak da çözülebilmektedir (LAI , v.d., 1992a :207).

$z_1^{PIS} = \min\ (c^m - c^p)\ x$ $\qquad\qquad$ $z_1^{NIS} = \text{maks}\ (c^m - c^p)\ x$

$x \in X$ $\qquad\qquad$ $x \in X$

$z_2^{PIS} = \text{maks}\ c^m x$ $\qquad\qquad$ $z_2^{NIS} = \min\ c^m x$

$x \in X$ $\qquad\qquad$ $x \in X$

$z_3^{PIS} = \text{maks}\ (c^o - c^m)\ x$ $\qquad\qquad$ $z_3^{NIS} = \min\ (c^o - c^m)\ x$

$x \in X$ $\qquad\qquad$ $x \in X$

amaç fonksiyonlarının üyelik fonksiyonları aşağıdaki şekilde belirlenmektedir:

$$\mu_{z1} = \begin{cases} 1 & z_1 < z_1^{PIS} \\ (z_1^{NIS} - z_1) / (z_1^{NIS} - z_1^{PIS}) & z_1^{PIS} \leq z_1 \leq z_1^{NIS} \\ 0 & z_1 > z_1^{NIS} \end{cases}$$

$$\mu_{z2} = \begin{cases} 1 & z_2 > z_2^{PIS} \\ (z_2 - z_2^{NIS}) / (z_2^{PIS} - z_2^{NIS}) & z_2^{PIS} \leq z_2 \leq z_2^{NIS} \\ 0 & z_2 < z_2^{NIS} \end{cases}$$

μ_{z3} de μ_{z2} gibi hesaplanmaktadır. Nihayet,

$$\begin{aligned} & \text{maks}\ \alpha \\ & \mu_{zi}(x) \geq \alpha \quad i = 1,2,3 \qquad (5) \\ & x \in X \end{aligned}$$

tek amaçlı DP modeli, daha düşük kar riskini minimize etme, en olası değeri ve daha yüksek kâr olasılığını maksimize etme olasılığı altında tatmin edici bir çözüm sağlamaktadır (LAI, v.d., 1992b:208).

3.2. Rommelfanger , Hanuscheck ve Wolf Yaklaşımı

Bulanık amaç katsayılarının konveks olasılık dağılımına sahip olduğunun kabul edildiği yaklaşımda, karar vericiden her amaç katsayısı için [c^U c^L] aralığı alınmakta, Lai ve Hwang yaklaşımındaki (5) problemi gibi

$$\text{maks } \alpha$$

$$\mu_{i,k}(x) \geq \alpha \qquad k = \text{min, maks ve } i = 1,2,\ldots, r \qquad (6)$$

$$x \in X$$

DP problemi çözülmektedir. (6) problemindeki $\mu_{i,k}$ i. Amacın sırasıyla, minimum ve maksimum değerleri için oluşturulan üyelik fonksiyonlarıdır. Ancak buradaki fark her i için

$$z^*_{i,min} = z_{i,min}(x^*_{i,min}) = \underset{x \in X}{\text{maks}}\ z_{i,min}(x)$$

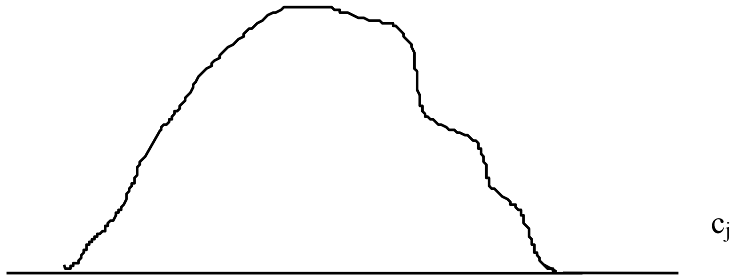
$$z^*_{i,\ min} = z_{i,maks}(x^*_{i,maks}) = \underset{x \in X}{\text{maks}}\ z_{i,maks}(x)$$

$$z_{i,min} = z_{i,min}(x^*_{i,maks}) \text{ ve } z_{i,maks}(x) = z_{i,maks}(x^*_{i,min})$$

olmak üzere,

$$\mu_{i,k}(x) = \begin{cases} 1 & z_{i,k}(x) > z^*_{i,k} \\ (z_{i,k}(x) - z_{i,k}) / (z^*_{i,k} - z_{i,k}) & z_{i,k} \leq z_{i,k}(x) \leq z^*_{i,k} \\ 0 & z_{i,k}(x) < z_{i,k} \end{cases}$$

üyelik fonksiyonlarının oluşturulmasındadır(Bkz. Şekil 3).

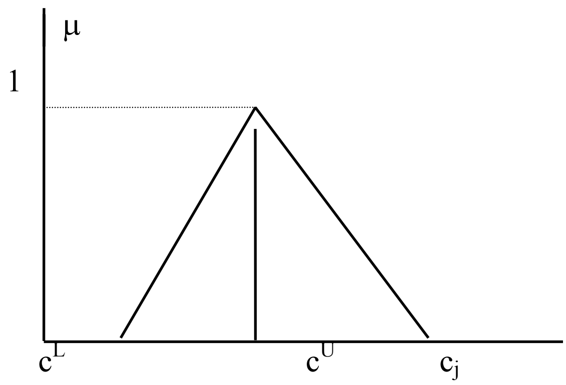


Şekil 3. c_j nin olasılık dağılımı

3.3. Tanaka, Ichihashi ve Asai Yaklaşımı' nın Bulanık Amaç Katsayılarına Uygulanması

Yazarlar , bulanık a_{ij} teknolojik katsayıları ile b_i sağ taraf değerlerine sahip ve bu katsayıların üçgensel olasılık dağılımına uyduğu bir model geliştirmişlerdir (Lai, v.d., 1992a: 196). Çalışmada, bulanık amaç fonksiyonu katsayılarının da simetrik üçgensel olasılık dağılımına uyduğu varsayımı altında, α - keseni kavramını da kullanarak Tanaka , Ichihashi ve Asai yaklaşımının farklı bir versiyonu sunulmuştur.

Yeni yaklaşımda her c_j katsayısı için karar vericiden [c^L c^U] aralığının verilmesi istenmektedir. c_j 'lerin simetrik üçgensel dağılıma uygunluğu kabul edilerek (Bkz. Şekil 4) , üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır.



Şekil 4. Simetrik üçgensel dağılım

$$2\,(c_j - c_j^L)\,/\,(c_j^U - c_j^L) \qquad\qquad c_j^L \le c_j \le (c_j^L + c_j^U)\,/\,2$$

$$\mu_i = \begin{cases} (c_j^U - c_j)/(c_j^U - c_j^L) & (c_j^L + c_j^U)/2 \le c_j \le c_j^U \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

α - keseni kullanılarak [c^L c^U] aralığı daraltılabilir. Rommelfanger, Hanuscheck ve Wolf Yaklaşımındaki (6) problemi oluşturularak çözülmekte ve karar verici için en iyi çözümü veren α seviyesi belirlenmektedir.

4. Önerilen Yöntem

Karar vericinin amaç katsayılarını kesin olarak veremediği durumda [c^L c^U] şeklinde bir aralık vermesi daha kolaydır. c_j^L ve c_j^U değerleri j. amaç için alt ve üst sınırlardır. Yöntemde Bölünmüş Farklar Enterpolasyon yöntemi ile her [c^L c^U] aralığı için ikinci dereceden bir üyelik fonksiyonu bulunmakta ve farklı α- kesenleri (0.25, 0.50, 0.75) kullanılarak Newton Raphson Kök bulma tekniği ile [Aktaş, v.d., 1984:155] aralık daraltılmaktadır. Daha sonra Rommelfanger'in (6) problemi kullanılarak karar verici için en iyi çözümü veren α seviye keseni belirlenmektedir .

İkinci bölümde tanıtılan yöntemler ile önerilen yöntem bir örnek problem üzerinde tartışılmaktadır.

Örnek Problem :

Maks Z= $c_1x_1 + c_2x_2$

$$X = \{ (x_1,x_2) \in R^2 / \ x_1+ 4x_2 \le 100,\ x_1+3x_2 \le 76,\ x_1+2x_2 \le 53,$$
$$3x_1+5x_2 \le 138 ,\ 3x_1+4x_2 \le 120,\ 7x_1+8x_2 \le 260,$$
$$x_1+x_2 \le 36,\ 3x_1+2x_2 \le 103,\ 2x_1+x_2 \le 68,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \}$$

$c_1 \in [\ 0 .5 \quad 10\ ]$ ve $c_2 \in [\ 1.4 \quad 11\ ]$ olarak karar vericiden alınmış olsun (Rommelfanger, v.d., 1989 : 32) . Lai ve Hwang Yaklaşımındaki c_1^m ve c_2^m en olası değerleri sırasıyla 4 ve 7 olsun. Alt ve üst sınır değerleri ise sırasıyla en kötümser ve en iyimser değerler olarak kabul edilsin. Bu durumda (5) problemi

maks α

$3.5x_1 + 5.6x_2 - 156.8\ \alpha \geq 0$

$4x_1 + 7x_2 - 191\alpha \geq 0$

$6x_1 + 4x_2 - 206\ \alpha \geq 0$

$x \in X$

çözüldüğünde $\alpha = 0.92$, $(x_1 ,x_2) = (24.075 , \ 11.434)$ elde edilmektedir.

Aynı problem Tanaka, Ichihashi ve Asai Yaklaşımı'nın farklı versiyonu ile çözüldüğünde

maks α

$5.75\alpha - 1.687x_1 - 2.6x_2 \leq -68.05$

$8.8\alpha - 9.4x_1 - 10.4x_2 \leq -337.6$

$2.875x_1 + 3.8x_2 \geq 114.5$

$7.625x_1 + 9.8x_2 \geq 299.5$

$4.0625x_1 + 5x_2 \geq 156.25$

$6.437x_1 + 7.4x_2 \geq 239.75$

$x \in X$

$\alpha = 0.72$ ve $(x_1,x_2) = (20,15)$ bulunmaktadır.

Önerilen yöntemde ise karar vericiden, $c_1= (0.5,4,10)$ ve $c_2= (1.4,7,11)$ değerleri ile bunlara karşılık gelen $\mu(c_1) = (0,1,0)$ ve $\mu(c_2) =(0,1,0)$ üyelik derecelerinin alındığı varsayılmaktadır. Bu değerler kullanılarak Bölünmüş Farklar Yöntemi ile $-0.0477x^2 + 0.5x - 0.238 = \mu(c_1)$ ve $-0.0446x^2 + 0.554x - 0.687 = \mu(c_2)$ üyelik fonksiyonları bulunmaktadır. $\alpha = \{0.25, 0.50, 0.75\}$ değerleri için $[\ c_1^L \quad c_1^U\ ]$ ve $[\ c_2^L \quad c_2^U\ ]$ aralıkları daraltılarak (6) modeli,

maks α

$7.81\alpha \ -1.088x_1 - 2.024x_2 \leq -46.658$

$$25.11\alpha - 9.412x_1 - 10.37x_2 \leq -321.43$$

$$6.27\alpha - 1.777x_1 - 2.758x_2 \leq -71.82$$

$$8.266\alpha - 8.723x_1 - 9.641x_2 \leq -313.111$$

$$5.45\alpha - 2.64x_1 - 3.7x_2 \leq -103.51$$

$$7.35\alpha - 7.86x_1 - 8.7x_2 \leq -282.33$$

$$x \in X$$

şeklinde elde edilmekte ve çözüldüğünde $\alpha = 0.299$ ve $(x_1,x_2) = (23.67, 11.79)$ değerleri bulunmaktadır. Örnek problem Rommelfanger, Hanuscheck ve Wolf yöntemi ile çözüldüğünde elde edilen sonuç $\alpha = 0.501$, $(x_1,x_2)= (9,22)$ dır (Rommelfanger; v.d. ,1989:44).

$$z^*_F = 1/6 \left(\sum_{k=1}^{3} z_{min}^{\alpha k}(x^*_F) + z_{maks}^{\alpha k}(x^*_F) \right)$$

formülü kullanılarak ortalama amaç değeri hesaplanabilir (Rommelfanger, v.d., 1989:44).

5. Sonuç Ve Değerlendirme

Elde edilen çözümler topluca Tablo 1' de özetlenmektedir.

Tablo1. Çeşitli yöntemlere göre α ve x^* değerleri

	α	x^*	z^{*F}
Lai ve Hwang Yöntemi	0.932	(24.07 , 11.43)	181.87
Tanaka , Ichıhashi ve Asai Yöntemi	0.727	(20 , 15)	202.80
Önerilen Yöntem	0.299	(23.67, 11.79)	197.35
Rommelfanger , Hanuscheck ve Wolf Yaklaşımı	0.501	(9, 22)	192.45

Tablo 1'den görüldüğü gibi her yöntemde optimal çözümü veren α seviye keseni farklıdır. Ortalama amaç değeri en büyük olan yöntemin Tanaka, Ichıhashi ve Asai Yönteminin farklı versiyonu olduğu, bunu önerilen yöntemin izlediği açıktır. Ancak karar verici farklı üyelik dereceleri ve amaç katsayıları verirse sonuç değişebilir. Önerilen yöntem, temelde Rommelfanger, Hanuscheck ve Wolf Yaklaşımına benzemekle birlikte, verilere uygun ikinci dereceden bir eğrinin uydurulması ve [c^L c^U] aralığının daraltılması konularında Bölünmüş Fark tekniği ve Newton Kök bulma yöntemi gibi bilinen sayısal yöntemlerden faydalanması nedeni ile daha sistematiktir.

ABSTRACT

This paper describes the use of fuzzy set theory for solving linear programming problems with fuzzy coefficients in the objective function. It studies important models and theory in this field, and proposes a method which uses a membership function of secondery degree. These methods compare according to solutions obtained from an optimization problem.

KAYNAKÇA

AKTAŞ, Z. , ÖNCÜL, ve H., URAL, S., (1984), *Sayısal Çözümleme*, Cilt 1, O.D.T.Ü. Matbaası.

FEDRIZZI, M. , KACPRZYK , J., ve ROUBENS, M., (1991)**,** *Interactive Fuzzy Optimization, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems,* 368.

LAI, Y.- J., ve HWANG, C. - L.,(1992a), *Fuzzy Mathematical Programming, Methods andApplications , Lecture Notes in Economics***,** Springer-Verlag, Berlin.

LAI, Y.- ve J., HWANG, C. - L., **(**1992b), "A New Approach to Some Possibilistic Linear Programming Problem" , *Fuzzy Sets and Systems***,** 49.

ROMMELFANGER, H., HANUSCHECK, R., ve WOLF, J.,(1989), "Linear Programming with Fuzzy Objectives" *, Fuzzy Sets and Systems* , 29, 31-48.

WANG, P., P., (1983) , *Advances in Fuzzy Sets, Possibility Theory, and Applications,* Plenum Press, Newyork.

ZIMMERMAN, H. - J. ,(1987)*, Fuzzy Sets, Decision Making, and Expert Systems* , Kluwer Academic Publishers, Boston