GAZİOSMANPAŞA BİLİMSEL ARAŞTIRMA DERGİSİ (GBAD)
Gaziosmanpasa Journal of Scientific Research
ISSN: 2146-8168
http://dergipark.gov.tr/gbad
Araştırma Makalesi/Research Article

Cilt/Volume : 10
Sayı/Number: 3
Yıl/Year: 2021
Sayfa/Pages:165-173

Alınış tarihi(Received): 07.12.2021
Kabul tarihi (Accepted): 30.12.2021

Üç-Aralıklı Bir Süreksiz Sturm-Liouville Probleminin Zayıf Çözümleri

Hayati OLĞAR[1,*]

[1] *Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü / Tokat*
**Sorumlu Yazar: hayati.olgar@gop.edu.tr*

ÖZET: Bu çalışmanın amacı, geçiş koşulları (böyle koşullar literatürde arayüz koşulları, sıçrama koşulları, impulsif koşullar gibi isimlerle de adlandırılmaktadır) ve sınır koşulları altında parçalı sürekli potansiyele sahip üç ayrık aralıkta tanımlanan ikinci mertebeden diferansiyel denklemden oluşan üç aralıklı bir Sturm-Liouville probleminin bazı spektral özelliklerini araştırmaktır. İlk olarak klasik Sobolev uzaylarında üç aralıklı Sturm-Liouville problemimize özgü yeni uzaylar ve bu uzaylara özgü iç çarpımlar tanımlanmıştır. İkinci olarak, klasik bir özfonksiyonun genellemesi olan zayıf özfonksiyon olarak adlandırılan yeni bir kavram tanımladık. Üçüncü olarak, üç-aralıklı Sturm-Liouville probleminin bir operatör-polinom denklemine indirgenebileceğini göz önünde bulundurarak uygun Sobolev uzaylarında bazı kompakt operatörler tanımladık. Daha sonra operatör-demet teorisi yöntemleri kullanılarak zayıf özfonksiyonlar incelenmiştir. Son olarak, bu operatör-demetinin kendine-eşlenik olduğunu kanıtladık.

Anahtar Kelimeler –*Sturm-Liouville problemi, sınır şartları, geçiş şartları, operatör,zayıf çözüm.*

Weak Solutions of a Sturm-Liouville Problem with Three-Interval

ABSTRACT: The aim of this study is to investigate some spectral properties of a three-interval Sturm-Liouville problem which consist of a three-interval second order differential equation defined on three disjoint intervals with piecewise continuous potential under boundary conditions and transmission conditions (which are known by various names including interface conditions, jump conditions, impulsive conditions etc.). Firstly, new spaces and inner products specific to these spaces, which are specific to our three-interval Sturm-Liouville problem, are defined in classical Sobolev spaces. Secondly, we define a new concept, the so-called weak eigenfunction which is an generalization of a classical eigenfunction. Thirdly, we introduce to the consideration some compact operators such a way that the considered three-interval Sturm-Liouville problem can be reduced to the appropriate operator-polynomial equation in suitable functional space. Then, generalized eigenfunctions are examined by using the methods of operator-pencil theory. Finally, we prove that this operator-pencil is self-adjoint.

Keywords–*Sturm-Liouville problem, boundary conditions, transmission conditions, operator, weak solution.*

1. Giriş

Ondokuzuncu yüzyılın ortalarında ilk olarak Sturm ve Liouville tarafından incelendiği için Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılan, ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için sınır-değer problemi günümüzde çok yoğun bir şekilde araştırılmış ve araştırılmaktadır. Başlangıçta, ısı iletimi problemlerine uygulanan Sturm-Liouville teorisinin daha sonra çok sayıda fiziksel problemlere uygulanabildiği görülmüştür. Matematik fiziğin birçok probleminin çözümünde kullanılan Fourier yöntemini uygulayabilmek için, verilmiş fonksiyonu adi diferansiyel denklemler için sınır-değer

probleminin özfonksiyonları cinsinden açılımı şeklinde ifade etmek gerekir. Diğer bir ifadeyle adi diferansiyel denklem için sınır-değer probleminin özfonksiyonlarının hangi fonksiyon uzayında baz olduğunu incelemek gerekir. Özfonksiyonlarının hangi fonksiyon uzayında baz olması gerektiğinin incelenmesini gerektiren sınır değer problemlerine uygun spektral problemler ise Sturm-Liouville problemleri olarak adlandırılmaktadır. Son yıllarda farklı doğa bilimlerinde ortaya çıkan süreçlerin matematiksel modeli kurulurken yeni tipten, yani klasik olmayan kısmi türevli denklemler için başlangıç ve sınır-değer problemleri ile karşılaşılmaktadır. Bu durum beraberinde Sturm-Liouville problemlerinin de farklı yollarda genelleştirilmesi ihtiyacını ortaya çıkarmaktadır.
Bilindiği gibi

$$y''(x)+q(x)y(x)=\lambda y(x)\ ,\ x\in[a,b] \tag{1}$$

ikinci mertebeden adi lineer diferensiyel denkleminden ve kendine eşlenik olan

$$\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0 \tag{2}$$

$$\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0 \tag{3}$$

sınır şartlarından oluşan sınır-değer problemleri genel olarak Sturm-Liouville problemleri olarak bilinmektedir. Klasik Sturm-Liouville problemi olarak da ifade edilen $(1)-(3)$ sınır-değer probleminde sınır şartları özdeğer parametresine bağlı değildir. Klasik Sturm-Liouville problemleri ile ilgili ayrıntılı bilgiler için (Atkinson, 1964; Levitan ve Sargsyan, 1988; Titchmars, 1962) kaynaklarına başvurulabilir. Bu problemler için en uygun fonksiyonel uzayın karesi Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonlardan oluşan $L_2[a,b]$ Hilbert uzayı olduğu bilinmektedir. Ancak özdeğer parametresi lineer olarak sınır şartlarında da ortaya çıktığında $L_2[a,b]$ uzayı yerine $L_2[a,b]\oplus\mathbb{C}^N$ tipindeki uzaylar daha uygundur. Çünkü bu durumda sınır değer problemleri $L_2[a,b]\oplus\mathbb{C}^N$ tipindeki uzaylarda tanımlanmış lineer diferensiyel operatörler için özdeğer problemlerine indirgenebilir (Hinton, 1979; Russakovskii, 1993; Schneider, 1974; Walter, 1973). 1983 yılında yayımlanmış olan çalışmalarında Kostyuchenko ve Shkalikov,

$$n=2\ \ i\c{c}in \qquad L(\lambda)\psi=0\ , \qquad L(\lambda)=\sum_{i=0}^{n}\lambda^i A_i \tag{4}$$

formundaki operatör demetlerini incelemişlerdir. Kostyuchenko ve Shkalikov bu çalışmalarında, en az bir $c\in\mathbb{R}$ reel sayısı için $L(c)-$nin pozitif tanımlı olduğunu kabul etmişlerdir. 1985 yılında yayınlamış olduğu kitabında Ladyzhenskaia, bir Hilbert uzayında genelleştirilmiş çözümler kavramı yardımıyla, özdeğer probleminin bir operatör polinomal denkleme indirgenmesine olanak sağlamıştır. Belinsky ve Dauer 1997 yılında yayımlamış oldukları çalışmalarında, sınır şartlarında özdeğer parametresi lineer olarak bulunan regüler Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonlarını incelemişlerdir. Ancak yukarıda bahsettiğimiz bütün çalışmalarda Sturm-Liouville problemleri, geçiş şartları içermeyen sınır değer problemleri için incelenmiştir. Bu alanda çalışan bazı bilim insanları ve özellikle O. Sh. Mukhtarov' un (Akcay, 2021; Allahverdiev, Tuna, 2021; Aydemir ve Mukhtarov, 2017; Kandemir ve Mukhtarov, 2017; Muhtarov, 1994; Mukhtarov ve ark. 2015, 2018, Mukhtarov ve Aydemir, 2020; Mukhtarov ve Aydemir, 2021; Şen ve Stikonas, 2021) çalışmalarında ise süreksiz katsayılı adi ve kısmi türevli diferensiyel denklemler için sınır değer geçiş problemleri araştırılmıştır.

2. Sınır Değer Geçiş Problemin İfadesi ve Probleme Uygun Fonksiyonel Uzayların Kurulması

Bu çalışmada;

$$-u_1''(x)+q_1(x)u_1(x)=\mu u_1(x),\ x\in[-1,-c) \tag{5}$$

$$-u_2''(x)+q_2(x)u_2(x)=\mu u_2(x),\ x\in(-c,c) \tag{6}$$

$$-u_3''(x)+q_3(x)u_3(x)=\mu u_3(x),\ x\in(c,1] \tag{7}$$

şeklinde tanımlı Sturm-Liouville denklemlerinden, $x=-1$ ve $x=1$ uç noktalarında verilmiş

$$u_1(-1)=u_1'(-1) \tag{8}$$

$$u_3(1)=u_3'(1) \tag{9}$$

sınır şartlarından ve $x=-c$ ve $x=c$ geçiş noktalarında verilmiş

$$u_2(-c^+)-u_1(-c^-)=0 \tag{10}$$

$$u_2'(-c^+)=u_1'(-c^-)+\gamma_1 u_1(-c^-)+\delta_1 u_2(-c^+) \tag{11}$$

$$u_3(c^+)-u_2(c^-)=0 \tag{12}$$

$$u_3'(c^+)=u_2'(c^-)+\gamma_2 u_3(c^+)+\delta_2 u_2(c^-) \tag{13}$$

geçiş şartlarından oluşan Sturm-Liouville tipindeki bir sınır değer geçiş probleminin bazı spektral özellikleri incelendi.

Burada λ kompleks spektral parametre; $q_1(x),\ q_2(x)$ ve $q_3(x)$ fonksiyonları sırasıyla $\Omega_1:=[-1,-c)$, $\Omega_2:=(-c,c)$ ve $\Omega_3:=(c,1]$ aralıkları üzerinde reel-değerli sürekli fonksiyonlar ve sonlu $q_1(-c^-),\ q_2(-c^+),\ q_2(c^-),\ q_3(c^+)$ limit değerleri mevcuttur; $\gamma_i,\delta_i\ (i=1,2)$ sıfırdan farklı ve pozitif reel katsayılardır.

Şimdi dikkate alınan $(5)-(13)$ sınır-değer-geçiş problemini araştırmak için ihtiyaç duyulan bazı yeni Hilbert uzaylarını tanımlayacağız ve bu uzaylarda geçerli olan bazı eşitsizlikleri ifade edeceğiz. $\Omega:=\Omega_1\oplus\Omega_2\oplus\Omega_3$ ve $\Xi_0:=\overset{3}{\underset{i=1}{\oplus}}L_2(\Omega_i)$ gösterimlerinden yararlanacağız.

$$\Xi_1:=\left\{\begin{array}{l} u\in\Xi_0 : u_i\in W_2^1(\Omega_i)(i=1,2,3), u_2(-c^+)=u_1(-c^-),\\ u_3(c^+)=u_2(c^-)\end{array}\right\}$$

lineer uzayında

$$\langle u,v\rangle_{\Xi_1}=\int_{\Omega_1}\left\{u_1'\overline{v_1'}+u_1\overline{v_1}\right\}dx+\int_{\Omega_2}\left\{u_2'\overline{v_2'}+u_2\overline{v_2}\right\}dx+\int_{\Omega_3}\left\{u_3'\overline{v_3'}+u_3\overline{v_3}\right\}dx \tag{14}$$

eşitliği ile iç çarpımı ve bu iç çarpıma karşılık gelen normu $\|u\|_{\Xi_1}^2=\langle u,u\rangle_{\Xi_1}$ eşitliği ile tanımlayalım; burada $u(x)=\begin{cases}u_1(x)\ ,\ x\in\Omega_1\\ u_2(x)\ ,\ x\in\Omega_2\\ u_3(x)\ ,\ x\in\Omega_3\end{cases}$ göstermişiz. Ξ_1 iç çarpım uzayının Hilbert uzayı olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi Ξ_1 Hilbert uzayında yeni bir iç çarpımı $\langle u, v\rangle_{\Xi_{1,q}} = \langle u', v'\rangle_{\Xi_0} + \langle u, qv\rangle_{\Xi_0}$ eşitliği ile ve bu iç çarpıma karşılık gelen normu ise $\|u\|^2_{\Xi_{1,q}} = \langle u, u\rangle_{\Xi_{1,q}}$ şeklinde tanımlayalım. $q(x)$ fonksiyonu sınırlı, pozitif tanımlı ve ölçülebilir olduğundan dolayı $0 < m < M$ olacak biçimde öyle m ve M sayıları mevcuttur ki, $\forall u \in \Xi_1$ için

$$m\,\|u\|_{\Xi_1} < \|u\|_{\Xi_{1,q}} < M\,\|u\|_{\Xi_1} \tag{15}$$

eşitsizliği sağlanır.

3. $(5)-(13)$ Probleminin Genelleştirilmiş Çözüm Kavramı

Keyfi $\eta \in \Xi_1$ kompleks fonksiyonunu alalım ve $\overline{\eta}$ fonksiyonu da η fonksiyonunun kompleks eşleneği olsun. $(5)-(7)$ diferensiyel denklemlerinin her iki tarafını $\overline{\eta}$ eşlenik fonksiyonu ile çarpıp sonra $\Omega_i (i = 1,2,3)$ aralıklarında integrallerini alırsak

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_i} \left\{-u_i''(x) + q_i(x)u_i(x)\right\}\overline{\eta_i}(x)dx = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_i} \mu u_i(x)\overline{\eta_i}(x)dx \tag{16}$$

eşitliğini elde ederiz. Elde ettiğimiz (16) denkleminin sağındaki ilk terime kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_i} \left\{u_i'(x)\overline{\eta_i'}(x) + q_i(x)u_i(x)\overline{\eta_i}(x)\right\}dx - u_3'(1)\overline{\eta_3}(1) + u_1'(-1)\overline{\eta_1}(-1) + u_2'(-c)\overline{\eta_2}(-c) \\
&-u_1'(-c)\overline{\eta_1}(-c) + u_3'(c)\overline{\eta_3}(c) - u_2'(c)\overline{\eta_2}(c) \\
&= \mu \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_i} u_i(x)\overline{\eta_i}(x)dx
\end{aligned} \tag{17}$$

eşitliği elde edilir. $(8)-(13)$ sınır-geçiş şartlarını (17) ye uyguladıktan sonra düzenlersek

$$\begin{aligned}
&\langle u, \eta\rangle_{\Xi_{1,q}} - u_3(1)\overline{\eta_3}(1) + u_1(-1)\overline{\eta_1}(-1) + \left[\gamma_1 u_1(-c) + \delta_1 u_2(-c)\right]\overline{\eta_2}(-c) \\
&+\left[\gamma_2 u_3(c) + \delta_2 u_2(c)\right]\overline{\eta_3}(c) = \mu\langle u, \eta\rangle_{\Xi_0}
\end{aligned} \tag{18}$$

eşitliği elde edilir. Böylece (17) eşitliği bütün terimleri Ξ_1 uzayının elemanları olan (18) ile temsil edilen bağıntıya dönüşür. Şimdi Ξ_1 Hilbert uzayında $(5)-(13)$ sınır-değer-geçiş problemimize uygun genelleştirilmiş çözümü tanımlayabiliriz.

Tanım 1. $u(x) \in \Xi_1$ elemanı verilsin. Eğer (18) denklemi $\forall \eta(x) \in \Xi_1$ için sağlanıyorsa $u(x) \in \Xi_1$ elemanı $(5)-(13)$ sınır-değer-geçiş probleminin genelleştirilmiş çözümü olarak adlandırılır.

Not. $(5)-(13)$ sınır-değer-geçiş probleminin her $u \in \bigoplus_{i=1}^{3} W_2^2(\Omega_i)$ klasik çözümü aynı zamanda bu problemin bir genelleştirilmiş çözümüdür.

4. Esas Sonuçlar

Çalışmanın bundan sonraki kısmında aşağıdaki lineer fonksiyonellerden yararlanılacaktır.

$$\tau_1(u,\eta) := -u_3(1)\overline{\eta_3}(1) + u_1(-1)\overline{\eta_1}(-1) + \left[\gamma_1 u_1(-c) + \delta_1 u_2(-c)\right]\overline{\eta_2}(-c)$$
$$+\left[\gamma_2 u_3(c) + \delta_2 u_2(c)\right]\overline{\eta_3}(c) \tag{19}$$

$$\tau_2(u,\eta) := \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_i} u_i(x)\overline{\eta_i}(x)dx \tag{20}$$

Lemma 2. $\forall d \in \Omega$ için

$$|u(d)| \le C_1 \|u\|_{\Xi_{1,q}} \tag{21}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3. Verilen her bir $u(x) \in \Xi_1$ için $\tau_i(u,\eta)$ $(i=1,2)$ lineer fonksiyonelleri $\eta(x) \in \Xi_1$ değişkenine göre süreklidirler.

İspat. $\tau_i(u,\eta)$ $(i=1,2)$ fonksiyonelleri η değişkenine göre Ξ_1 Hilbert uzayında sürekli olduklarını göstermek için ilk önce

$$|\tau_1(u,\eta)| \le C_2 \left\{ \begin{array}{l} |u_3(1)||\eta_3(1)| + |u_1(-1)||\eta_1(-1)| + \left(|u_1(-c)| + |u_2(-c)|\right)|\eta_2(-c)| \\ + \left(|u_3(c)| + |u_2(c)|\right)|\eta_3(c)| \end{array} \right\} \tag{22}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu göstereceğiz.

$(5)-(13)$ sınır-değer-geçiş problemi için verilen sınır-geçiş şartlarını ve Schwarz eşitsizliğini göz önünde bulundurursak

$$
\begin{aligned}
|\tau_1(u,\eta)| &\le \left| -u_3(1)\overline{\eta_3}(1) + u_1(-1)\overline{\eta_1}(-1) + \left[\gamma_1 u_1(-c) + \delta_1 u_2(-c)\right]\overline{\eta_2}(-c) \right| \\
&\quad + \left| \left[\gamma_2 u_3(c) + \delta_2 u_2(c)\right]\overline{\eta_3}(c) \right| \\
&\le \left| -u_3(1)\overline{\eta_3}(1) \right| + \left| u_1(-1)\overline{\eta_1}(-1) \right| + \left| \left[\gamma_1 u_1(-c) + \delta_1 u_2(-c)\right]\overline{\eta_2}(-c) \right| \\
&\quad + \left| \left[\gamma_2 u_3(c) + \delta_2 u_2(c)\right]\overline{\eta_3}(c) \right| \\
&= \left| u_3(1)\overline{\eta_3}(1) \right| + \left| u_1(-1)\overline{\eta_1}(-1) \right| + |\gamma_1| |u_1(-c)| \left| \overline{\eta_2}(-c) \right| \\
&\quad + |\delta_1| |u_2(-c)| \left| \overline{\eta_2}(-c) \right| + |\gamma_2| |u_3(c)| \left| \overline{\eta_3}(c) \right| + |\delta_2| |u_2(c)| \left| \overline{\eta_3}(c) \right| \\
&\le C_2 \left\{ \begin{array}{l} |u_3(1)||\eta_3(1)| + |u_1(-1)||\eta_1(-1)| + |u_1(-c)||\eta_2(-c)| + |u_2(-c)||\eta_2(-c)| \\ + \ |u_3(c)||\eta_3(c)| + |u_2(c)||\eta_3(c)| \end{array} \right\},
\end{aligned}
$$

elde edilir; burada $C_2 := \max\{|\gamma_1|, |\delta_1|, |\gamma_2|, |\delta_2|\}$ gösteriminden yararlanmışız. Böylece (22) eşitsizliği ispat olundu.

Ξ_1 ve $\Xi_{1,q}$ Hilbert uzaylarında tanımlı iç çarpımlar ve bu iç çarpımlara karşılık gelen normların tanımları ve (15) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\|u\|_{\Xi_1} \le C_3 \|u\|_{\Xi_{1,q}} \tag{23}$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülür.

(22) ve (23) eşitsizliklerinden yararlanılarak

$$|\tau_1(u,\eta)| \le C_4 \|u\|_{\Xi_{1,q}} \|\eta\|_{\Xi_{1,q}} \tag{24}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $\tau_1(u,\eta)$ lineer fonksiyonelinin Ξ_1 Hilbert uzayında sürekli dolayısıyla sınırlı olduğunu gösterir. $\tau_2(u,\eta)$ lineer fonksiyonelinin sınırlı olduğu benzer şekilde gösterilir. İspat bitti.

Riesz temsil teoreminden yararlanarak

$$\tau_i(u,\eta) := \langle \mathrm{T}_i u, \eta \rangle_{\Xi_{1,q}} \ (i=1,2) \tag{25}$$

eşitliğini sağlayacak $\mathrm{T}_i : \Xi_1 \to \Xi_1 \ (i=1,2)$ operatörlerini tanımlayabiliriz.

Teorem 4. $\mathrm{T}_1 : \Xi_1 \to \Xi_1$ ve $\mathrm{T}_2 : \Xi_1 \to \Xi_1$ kendine eşlenik ve kompakt operatörlerdir.

İspat. $\mathrm{T}_i \ (i=1,2)$ operatörlerinin simetrik olduğunu göstereceğiz. Biz burada sadece T_2 operatörünün kendine-eşlenikliğini göstereceğiz. Bunun için de $\forall u, \eta \in D(T_2)$ için (25) eşitliği ve iç çarpım fonksiyonunun özelliklerini kullanmak suretiyle

$$\begin{aligned}\left\langle u, \mathrm{T}_2\eta\right\rangle_{\Xi_{1,q}} &= \overline{\left\langle \mathrm{T}_2\eta, u\right\rangle_{\Xi_{1,q}}} \\ &= \sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_i}\eta_i(x)\,\overline{u_i(x)}\,dx = \sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_i}u_i(x)\,\overline{\eta_i}(x)dx \\ &= \left\langle \mathrm{T}_2 u, \eta\right\rangle_{\Xi_{1,q}}\end{aligned}$$

eşitliğini elde ediyoruz. Bu yüzden, T_2 operatörü Ξ_1 uzayında simetriktir. T_2 operatörü Ξ_1 uzayında simetrik ve tanım bölgesi $D(T_2)$, Ξ_1 uzayında her yerde yoğun olduğundan ve de Fonksiyonel Analizden iyi bilinen yöntemi uygularsak T_2 operatörünün kendine-eşlenik operatör olduğunu elde ederiz. T_1 operatörünün kendine-eşlenikliği benzer şekilde ispat olunur. $\mathrm{T}_i\ (i=1,2)$ operatörlerinin kompaktlığı (Mukhtarov ve ark., 2018) çalışmasındaki argümanlar kullanılmak suretiyle benzer şekilde yapılır.

Teorem 5. $\mathrm{T}_2 : \Xi_1 \to \Xi_1$ operatörü pozitif operatördür.

İspat. $\mathrm{T}_2 : \Xi_1 \to \Xi_1$ operatörünün (25) tanımından yararlanırsak kolayca görürüz ki en az bir $C_5 > 0$ reel sayısı vardır öyle ki

$$\forall u \in \Xi_1 \text{ için } \left\langle \mathrm{T}_2 u, u\right\rangle_{\Xi_{1,q}} = \sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega_i}\left|u_i(x)\right|^2 dx \geq C_5\left\|u\right\|_{\Xi_1}^2$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ise T_2 operatörünün pozitif olduğunu gösterir. İspat bitti.

Teorem 4. ve Teorem 5. gereği (18) ile verilen integral özdeşliği

$$\left\langle u, \eta\right\rangle_{\Xi_{1,q}} + \left\langle \mathrm{T}_1 u, \eta\right\rangle_{\Xi_{1,q}} = \mu\left\langle \mathrm{T}_2 u, \eta\right\rangle_{\Xi_{1,q}} \tag{26}$$

şeklinde yazılır. Eğer $u(x) \in \Xi_1$, $(5)-(13)$ sınır-değer-geçiş probleminin genelleştirilmiş (zayıf) bir çözümü ise bu takdirde (26) ifadesi $\forall \eta(x) \in \Xi_1$ için sağlanır. Yani Ξ_1 Hilbert uzayından alınan keyfi η değişkeni için (26) ifadesinin $u + \mathrm{T}_1 u = \mu \mathrm{T}_2 u$ lineer denklemi şeklinde yazılabileceğini göstermiş olduk. Şimdi

$$\mathrm{T}(\mu) = I + \mathrm{T}_1 - \mu \mathrm{T}_2 \tag{27}$$

operatör-demetini tanımlayalım. O halde genelleştirilmiş çözüm tanımından yararlanırsak, aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 6. $(5)-(13)$ sınır-değer-geçiş probleminin genelleştirilmiş (zayıf) özfonksiyonları, Ξ_1 Hilbert uzayında

$$\mathrm{T}(\mu)u(x) = 0 \tag{28}$$

operatör-polinom denklemini sağlar.

[Mukhtarov, Olğar, Aydemir ve Jabbarov, 2018] çalışmasında uygulanan yöntemden yararlanırsak aşağıdaki teoremi ispat edebiliriz.

Teorem 7. $\forall \mu_0 \in \mathbb{R}$ için $\mathrm{T}(-\mu_0)$ operatörü kendine-eşleniktir.

İspat. $\mathrm{T}(-\mu_0)$ operatörünün kendine-eşlenik olduğunu kanıtlamak için ilk önce bu operatörün simetrik olduğunu göstereceğiz. Bunun için u ve v, Ξ_1 Hilbert uzayının elemanları ve Tanım 1 deki gibi tanımlı olan herhangi iki genelleştirilmiş (zayıf) özfonksiyonlar olsun. $\forall u, v \in D\left(\mathrm{T}\left(-\mu_0\right)\right)$ için (27) eşitliği ve iç çarpım fonksiyonunun özelliklerini kullanmak suretiyle

$$
\begin{aligned}
\left\langle u, \mathrm{T}\left(-\mu_0\right) v\right\rangle_{\Xi_{1,q}} &= \overline{\left\langle \mathrm{T}\left(-\mu_0\right) v, u\right\rangle_{\Xi_{1,q}}} = \overline{\left\langle \left(I + \mathrm{T}_1 + \mu_0 \mathrm{T}_2\right) v, u\right\rangle_{\Xi_{1,q}}} \\
&= \overline{\left\langle v, u\right\rangle_{\Xi_{1,q}}} + \overline{\left\langle \mathrm{T}_1 v, u\right\rangle_{\Xi_{1,q}}} + \overline{\left\langle \mu_0 \mathrm{T}_2 v, u\right\rangle_{\Xi_{1,q}}} \\
&= \left\langle u, v\right\rangle_{\Xi_{1,q}} + \left\langle \mathrm{T}_1 u, v\right\rangle_{\Xi_{1,q}} + \mu_0 \left\langle \mathrm{T}_2 u, v\right\rangle_{\Xi_{1,q}} \\
&= \left\langle \left(I + \mathrm{T}_1 + \mu_0 \mathrm{T}_2\right) u, v\right\rangle_{\Xi_{1,q}} \\
&= \left\langle \mathrm{T}\left(-\mu_0\right) u, v\right\rangle_{\Xi_{1,q}} \qquad (29)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten ve Fonksiyonel Analizden iyi bilinen yöntemden yararlanarak $\mathrm{T}(-\mu_0)$ operatörünün kendine-eşlenik olduğunu kolayca elde ederiz.

5. Teşekkür

Bu çalışma Latin American Scientific Research Conference on Natural and Applied Sciences' da kısmen sunulmuştur.

6. Kaynaklar

Akcay, O. (2021). Uniqueness Theorems for Inverse Problems of Discontinuous Sturm–Liouville Operator. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 44, 1927–1940.

Allahverdiev, B. P., Tuna, H. (2021). Conformable fractional Sturm–Liouville problems on time scales. Math Meth Appl Sci. 2021;1–16, DOI: 10.1002/mma.7925.

Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh. 2017. Class of Sturm-Liouville problems with eigen-parameter dependent transmission conditions, Numerical Functional Analysis and Optimization , 38(10), 1260-1275.

Atkinson, F. V. 1964. Discrete and Continuous Boundary Problems, Academic Press, New York.

Belinsky, B. P. ve Dauer, J. P. 1997. On a Regular Sturm-Liouville Problem on a Finite Interval with the Eigenvalue Parameter Appearing Linearly in the Boundary Conditions, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 191, Spectral Theory and Computational Methods of Sturm-Liouville Problems, 183–196.

Hinton, D. B. 1979. An Expansion Theorem for an Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Quart J. Math. Oxford (2), 33-42.

Kandemir, M., Mukhtarov, O. Sh. 2017. Nonlocal Sturm-Liouville problems with integral terms in the boundary conditions, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017, No. 11, pp. 112.

Kostyuchenko, A. G. ve Shkalikov, A. A. 1983. Self-adjoint Quadratic Operator Pencils and Elliptic Problems, Functional Anal. Appl. 17, 109.

Levitan, B. M. ve Sargsyan, I. S. 1988. Sturm-Liouville and Dirac Operators, Nauka, Moscow.

Ladyzhenskaia, O. A. 1985. The Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Springer – Verlag, New York.

Muhtarov, O. Ş. 1994. Discontinuous Boundary Value Problem with Spectral Parameter in Boundary Condition,Tr.J. of Mathematics,18,183-192.

Mukhtarov, O. Sh. ve Aydemir, K. 2021. Oscillation properties for non-classical Sturm-Liouville problems with additional transmission conditions. Mathematical Modelling and Analysis, 26(3), 432-443.

Mukhtarov, O. Sh. ve Aydemir, K. 2020. Discontinuous Sturm-Liouville Problems Involving An Abstract Linear Operator. Journal of Applied Analysis & Computation, 10(4), 1545-1560.

Mukhtarov, O. Sh., Olğar, H. ve Aydemir, K. 2015. Resolvent Operator and Spectrum of New Type Boundary Value Problems. Filomat 29, 1671–1680.

Mukhtarov, O. Sh., Olğar, H. ve Aydemir, K. Jabbarov I. 2018. Operator-Pencil Realization Of One Sturm-Liouville Problem With Transmission Conditions. Applied And Computational Mathematics, 17(2), 284-294.

Russakovskii, E. M. 1993. Sturm-Liouville problem with parameter in the boundary conditions, Trudy Seminara imeni I. G. Petrovskogo, 18.

Schneider, A. 1974. A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Math. Z. 136, 163-167.

Şen, E., Stikonas, A. (2021) Asymptotic Distribution of Eigenvalues and Eigenfunctions of a Nonlocal Boundary Value Problem. Mathematical Modelling and Analysis, 26(2) , 253-266.

Titchmars, E. C. 1962. Eigenfunctions Expansion Associated with Second Order Differential Equations I, Second Edn. Oxford Univ. press, London.

Walter, J. 1973. Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Math. Z., 133, 301-312.