

BİR İNVERS ISI TRANSFERİ PROBLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Rafayel SHALİYEV¹, Uğur AKYOL², Soner ÇELEN²

¹Trakya Üniversitesi Çorlu Mühendislik Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü 59860 Çorlu/TEKİRDAĞ

²Trakya Üniversitesi Çorlu Mühendislik Fakültesi
Makina Mühendisliği Bölümü 59860 Çorlu/TEKİRDAĞ
Tel: 282 6529475-142, Fax: 282 6529372, e-mail: ugura@corlu.edu.tr

Alınış: 19 Temmuz 2005
Kabul Ediliş: 27 Şubat 2006

Özet: Bu çalışmada metodolojik bir invers ısı transferi problemi ele alınmıştır. Doğrudan yöntemin kullanılması ile invers ısı transferi problemi çözülerek az alaşımli bir çelik malzemenin ısı iletim katsayısı $\lambda(T)$ ve birim hacmin ısı sığasının $C_v(T)$ sıcaklığa bağılılığı bulunmuştur. Çözümde kullanılan deneysel sıcaklık alanı $T_d(x, \tau)$ değerleri yerine, düz ısı transferi probleminin sonlu farklar yönteminin örtülü şeması ile çözümünden elde edilen model sıcaklıkları $T_m(x, \tau)$ alınmıştır. Çözümün hassaslığını etkileyebilecek birçok faktörün (uzay ve zaman adımlarının değerlerinin, çözüm algoritmasının, $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ niceliklerinin değiştiği sıcaklık bölgesinin alt aralıklara bölünme sayısının, λ_b başlangıç değerinin, vb.) etkisi incelenmiştir. İvers ısı transferinin farklı durumlar için incelenmesi; ΔT_d sıcaklık ölçüm hatasının, λ_b başlangıç değerinin ve M sıcaklık aralığı sayısının, çözüm hassaslığına etkisinin büyük olduğunu göstermiştir.

Ahtar Kelimeler: Doğrudan yöntem, invers problem, sonlu farklar.

A Numerical Solution of an Inverse Heat Transfer Problem

Abstract: In this study an inverse heat transfer problem was considered. The dependence of the thermal conductivity $\lambda(T)$, and the dependence of the heat capacity $C_v(T)$ to the temperature were obtained by using the direct method for a poor alloyed steel material. The model temperatures $T_m(x, \tau)$ obtained from the solutions of the finite difference method were taken into account instead of the experimental temperature field values $T_d(x, \tau)$. The influence of some factors (time and space step values, solution algorithm, division number of the temperature region where $\lambda(T)$ and $C_v(T)$ changes, the initial value of λ_b , etc.) which can effect the solution sensitivity was examined. It was found that the values of ΔT_d , λ_b and M had a strong effect to the solution sensitivity.

Key words: Direct method, inverse problem, finite difference.

Semboller Dizini

C_K, Λ_K	: polinom katsayıları
D	: deneysel sıcaklıkları içeren katsayı, K/s
E	: deneysel sıcaklıkları içeren katsayı, K/m ²
h	: uzay adımı; ağ parametresi, m
i, j	: ağ koordinatları
L	: kalınlık, m
ℓ	: sıcaklık aralığı numarası
M	: sıcaklık aralığı sayısı
T_d	: deneysel sıcaklık, K

T_m	: model sıcaklığı, K
q_y	: yüzey ısı kaynağı gücü, W/m^2
x	: uzay koordinatı, m
z	: sıcaklık aralığına düşen düğüm noktalarının sayısı
$C_v(T)$: birim hacmin ısı sığası, $J/(m^3K)$
$\lambda(T)$: ısı iletim katsayısı, $W/(mK)$
τ	: zaman, s
$\delta\tau$: zaman adımı; ağ parametresi, s

Giriş

Literatürde, doğanın bilinen esas kanunlarının ısı ve kütle transferi proseslerine uygulanması sırasında prosesleri ifade eden nicelikler, sebep ve sonuç olmak üzere iki kısma ayrılırken, problemler de sebep sonuç ilişkisinden yola çıkılmak suretiyle düz ve ters (invers) problemler olmak üzere iki ayrı kısma ayrılmaktadır (Kozdoba ve Krukovskiy, 1982). Isı transferi problemlerinde tek çözümlülük koşullarına (başlangıç ve sınır koşulları, termofiziksel özellikler, hacimsel ve yüzeyel ısı kaynakları, geometrik ölçüler, vb.) sebepler (A_i) adı verilmektedir. A_i sebeplerine bağlı olan sıcaklıklar ise sonuç (T) olarak adlandırılmaktadır. Verilen sebeplere göre sonucun belirlendiği problemler düz problemler, sonuca göre sebebin bulunması problemleri ise invers problemlerdir. Sıcaklık değerlerinin hassas bir şekilde belirlenememesi, matematik modellendirme tek çözümlülük koşullarının içerdiği niceliklerin hassas değerlerinin bilinmesini gerektirir. Bu nedenle çalışmalar invers ısı transferi problemlerinin (İİTP) çözümleri üzerinde yoğunlaşmaktadır. İİTP'de deneylerden elde edilen sıcaklıklara ($T_d(x, t)$) göre tek çözümlülük koşullarından biri veya birkaç tanesi belirlenebilir. Yani T_d 'nin sonucuna göre A_i sebepleri bulunur.

Metod

Invers problemlerin çözüm yöntemlerini, çözüm prosesi sırasında deneysel sıcaklık değerlerinin denklemde kullanıldıkları yerlere bağlı olarak doğrudan yöntemler ve ekstremal yöntemler olarak iki gruba ayırmak mümkündür (Kozdoba ve Krakovskiy, 1982; Alifanov, 1994; Alifanov ve Ark., 1995; Beck ve Ark., 1985). Doğrudan yöntemlerde, deneysel olarak elde edilen sıcaklık değerleri $T_d(x, \tau)$, matematik modelin temel denkleminde doğrudan yerine konularak $A = F^{-1}(T_d)$ sebepleri bulunur. Ekstremal yöntemlerde ise, deneysel olarak elde edilmiş olan T_d sıcaklıkları, $\delta = T_M - T_d$ sapmalarının minimumunun bulunmasında kullanılır. Ekstremal yöntemlerin doğrudan yöntemlerden farkı, çözüm prosesinin $\Phi(\delta)$ sapma fonksiyonunun minimumunu bulmak için kullanılmasıdır.

Metodolojik problemlerin çözümünde kullandığımız doğrudan yöntemin kısa bir tasvirini ısı iletim katsayısı $\lambda(T)$ ve birim hacmin ısı sığasının $C_v(T)$ sıcaklığa bağlılığının belirlenmesi durumu için ele alalım. Uygun başlangıç ve sınır koşulları için bir boyutlu zamana bağlı sanki-lineer ısı iletim denklemini aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$C_v(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x}) \quad (1)$$

(1) denklemi h ve $\delta\tau$ uzay ve zaman adımlarına sahip ağda sonlu farklar şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$C_{vi}^j \frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\delta\tau} = \lambda_i^j \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{h^2} - \lambda_{i-1}^j \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{h^2} \quad (2)$$

$$0 < x_i < L; \quad 0 < \tau^j < \tau_m; \quad x_i = ih; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n; \quad \tau^j = j\delta\tau; \quad j = 1, 2, \dots, m$$

İnvers problemi çözmek için aranan λ_i^j ve C_{vi}^j termofiziksel özelliklerine göre (2) numaralı denklemi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz;

$$C_{vi}^j D_i^j = \lambda_i^j E_i^j - \lambda_{i-1}^j E_{i-1}^j \quad (3)$$

$$D_i^j = \frac{T_{i,d}^j - T_{i,d}^{j-1}}{\delta\tau}, \quad E_i^j = \frac{T_{i+1,d}^j - T_{i,d}^j}{h^2} \quad (4)$$

D_i^j , E_i^j ve E_{i-1}^j ifadeleri ağ düğüm noktalarında deneylerden elde edilmiş olan sıcaklıkları içeren katsayılardır. Deneysel sıcaklıklar temel denklem içerisinde doğrudan kullanıldığı için çözüm yöntemi burada doğrudan yöntem

olarak adlandırılmaktadır. Her bir τ^j zamanında ve her bir düğüm noktası için (3) denkleminde olduğu gibi matematiksel ifadeler yazılabilir. $x - \tau$ ağ bölgesinde $m(n-1)$ sayıda (3) şeklinde matematiksel denklemler elde edilir. Her denklemde iki adet bilinmeyen bulunduğundan (λ_i^j ve C_{vi}^j), bilinmeyenlerin sayısı denklemlerin sayısından iki kat daha fazladır. İncers problemin tek değerli çözümü bu şekilde mümkün değildir. Bununla birlikte ısı iletim katsayısının ve ısı sığasının sıcaklığa bağlı olarak değişimi polinom şeklinde ifade edilebiliyorsa bu durumda incers problemin çözümü mümkündür.

$$\begin{aligned} \lambda(T) &= \sum_{K=0}^N \Lambda_K T^K, & C_v(T) &= \sum_{K=0}^N C_K T^K \\ \lambda(T) &= \Lambda_0 + \Lambda_1 T, & C_v(T) &= C_0 + C_1 T \end{aligned} \quad (5)$$

Ele alınan çalışmada $N = 1$ olarak alınmıştır.

Geniş sıcaklık aralıklarında malzemelerin $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ termofiziksel özelliklerinin sıcaklığa bağlılığı lineer olmayıp karmaşık bir eğri karakterine sahiptir. Bundan dolayı çözümde (5) eşitliğinin kullanılması büyük hatalara neden olur. Fakat çok küçük sıcaklık aralıklarında eğri büyük bir hassaslıkla doğru parçaları yardımıyla ifade edilebilir. Bu nedenle sıcaklık aralığının tamamı M sayıda küçük sıcaklık aralıklarına bölünerek her bir ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, M$) küçük sıcaklık aralığında, $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\lambda_i^j = \Lambda_0^\ell + \Lambda_1^\ell (T_{i,\lambda}^j - T_{i,\lambda}^\ell), \quad C_{vi}^j = C_0^\ell + C_1^\ell (T_{i,C_v}^j - T_{i,C_v}^\ell) \quad (6)$$

Λ_0^ℓ ve C_0^ℓ , ℓ . sıcaklık aralığının başlangıç sıcaklığındaki ($T_{i,\lambda}^\ell$ ve T_{i,C_v}^ℓ 'deki) ısı iletim katsayısının ve birim hacmin ısı sığasının değerleridir. Λ_1^ℓ ve C_1^ℓ aranan katsayılar olup $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ lineer bağıntılarının ℓ . sıcaklık aralığındaki eğimlerini karakterize ederler.

$T_{i,\lambda}^j = \frac{T_i^j + T_{i+1}^j}{2}$, $T_{i,C_v}^j = \frac{T_i^j + T_{i+1}^j}{2}$ gibi belirlenir ve uygun olarak λ_i^j ve C_{vi}^j ayrıık değerlerine karşılık gelen sıcaklıklardır. (6) ifadeleri (3) denkleminde yerine yazıldığında aşağıdaki ifade elde edilir ;

$$\left[C_0^\ell + C_1^\ell (T_{i,C_v}^j - T_{i,C_v}^\ell) \right] D_i^j = \left[\Lambda_0^\ell + \Lambda_1^\ell (T_{i,\lambda}^j - T_{i,\lambda}^\ell) \right] E_i^j - \left[\Lambda_0^\ell + \Lambda_1^\ell (T_{i-1}^\ell - T_{i,\lambda}^\ell) \right] E_{i-1}^j \quad (7)$$

$x - \tau$ ağının ℓ . sıcaklık aralığına düşen bütün düğüm noktalarının sayısı z olsun. Bu noktalar için (7) şeklinde matematiksel denklemler yazılabilir. Böylece dört tane bilinmeyenden meydana gelen ($C_0^\ell, C_1^\ell, \Lambda_0^\ell, \Lambda_1^\ell$) matematiksel bir denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemini ise aşağıdaki gibi ifade edebiliriz;

$$Ax = b \quad (8)$$

Burada; A , katsayılar matrisi; x , aranan nicelikler vektörü, b ise sağ taraf vektörüdür.

(7) veya (8) denklemler sisteminin tek değerli bir çözümünün olabilmesi için $z \geq 3$ olmak koşulu ile verilmiş ℓ . sıcaklık aralığında herhangi bir sıcaklıktaki ısı iletim katsayısının veya ısı sığasının bir değerinin verilmesi gerekir.

1. sıcaklık aralığının başlangıç değerinde ($T_{i,\lambda}^1$ de) ısı iletim katsayısının başlangıç değerinin $\lambda_b = \Lambda_0^1$ olarak verildiğini varsayalım. Bu durumda (8) denklem sisteminde üç tane bilinmeyen olduğu ($C_0^1, C_1^1, \Lambda_1^1$) görülür. (8)

numaralı sistemin çözümünün olabilmesi için birinci sıcaklık aralığında $T_{i,\lambda}^2 - T_{i,\lambda}^1$ en azından üç tane iç düğüm noktası bulunmalıdır. İç düğümlerin sayısının üçten fazla olması çözümün hassaslığını artırır. (8) şeklinde ifade edilebilen bu tür matematiksel denklemler sisteminin çözümü en küçük kareler yöntemi ile elde edilebilir (D'Souza, 1975; Raynaud ve Bransier, 1986). (8) eşitliğinin içerdiği deneysel sıcaklıkların ölçülmesi sırasında meydana gelen sistematik hatalar bazen büyük değerlere kadar varabilir. Bu denklemin çözümünden elde edilen λ ve C_v 'nin değerleri gerçek değerlerinden çok farklı olabilir. Bundan dolayı çözüm prosesinin yürütülmesi için aşağıdaki gibi bir iterasyon prosedürü uygulanır.

Aranan C_1^ℓ katsayısına bir başlangıç değeri verilerek bu değer ℓ . sıcaklık aralığı için (3) denkleminde yerine konularak λ_g 'lerin ($g = 1, 2, 3, \dots, z$) ayrıık değerleri bulunur ve aşağıdaki nicelikler hesaplanır;

$$\varepsilon = \sqrt{\xi/(z-1)}, \quad \xi = \sum_{g=2}^z \rho_g \left[\lambda_g - \Lambda_o^\ell - \Lambda_1^\ell (T_{g,\lambda}^j - T_1^\ell) \right]^2 \quad (9)$$

ε niceliği, verilmiş olan C_1^ℓ değerinde bulunan ayırık λ_g değerlerinin, $\lambda(T) = \Lambda_o^\ell + \Lambda_1^\ell (T_{g,\lambda}^j - T_1^\ell)$ doğrusundan olan sapmalarının orta karesini karakterize eder. ξ niceliğinin minimumluk koşulundan yola çıkarak, Λ_1^ℓ için aşağıdaki ifade bulunur;

$$\Lambda_1^\ell = \left[\sum_{g=2}^z \rho_g (\lambda_g^j - \Lambda_o^\ell) (T_{g,\lambda}^j - T_1^\ell) \right] / \left[\sum_{g=2}^z \rho_g (T_{g,\lambda}^j - T_1^\ell)^2 \right] \quad (10)$$

C_1^ℓ katsayısı değiştirilerek, C_1^ℓ 'nin farklı değerleri için ε^ℓ nicelikleri hesaplanır ve ε^ℓ 'yi minimum yapan C_1^ℓ değeri bulunur. Böylece (6) eşitliği şeklinde aranan $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ bağıntılarının bulunması $\varepsilon^\ell = f(C_1^\ell)$ fonksiyonunu minimum yapan katsayıların bulunmasına indirgenir.

İnvers problemlerin çözümünde deneysel verilerden yararlanıldığına göre, İİTP çözümünde kullanılan bu veya başka algoritmalar natürel deneylerin yapılması üzerine belirli şartlar ortaya çıkarır. Metodolojik problemlerin çözümü, hassas sonuçlara ulaşılabilecek deneylerin bir program haline getirilmesini mümkün kılar. Metodolojik problemlerin çözümü, deneyler sırasında sonuca keskin etki yapabilecek faktörlerin dikkate alınması gerektiğini ortaya koyar. Metodolojik İİTP'lerin genel şeması aşağıdaki gibi verilebilir.

- Verilmiş tek değerlilik koşullarında düz ısı transferi probleminin çözülmesi,
- Düz ısı transferi probleminde bulunan $T_m(x_i, \tau)$ sıcaklıklarının, T_d deneysel sıcaklıklar gibi alınarak invers problemin çözülmesi,
- İnvers problemin çözümünden elde edilen niceliklerin düz problemin çözümünde kullanılan niceliklerle karşılaştırılması,

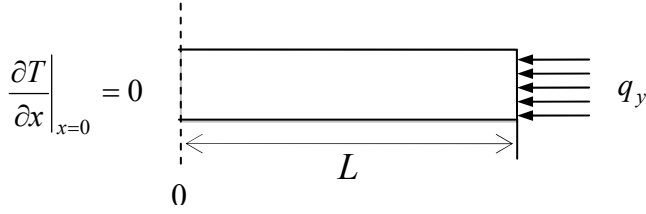
İnvers problemin çözüm hassaslığına etki edebilecek faktörler arasında aşağıda verilmiş olan muhtemel hataları sayabiliriz;

- Deneylerin yapılmasıyla ilgili hatalar: Sıcaklık veya ısı akısını ölçen deneysel cihazlardan kaynaklanan hatalar, termociftlerin yerleştirildiği noktaların koordinatlarının belirlenmesindeki hatalar;
- Reel fizik prosesi tam olarak içermeyen matematik modelin seçilmesinden dolayı oluşan hatalar: Matematik modelin kısmen veya tam olarak lineerleştirilmesinden dolayı oluşan hatalar, incelenen cismin boyutunun küçültülmesinden dolayı meydana gelen hatalar;
- İnvers problemlerin sayısal çözümünde yardımcı yöntem gibi kullanılan algoritmalarındaki, uzay ve zaman adımlarından dolayı oluşan hatalar. İnvers problemin çözümünde kullanılan temel yöntemin kendisine ve algoritmasına özgü olan hatalar; $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ sıcaklığa bağlılığı karmaşık olan invers ısı transferi problemlerinin geniş sıcaklık aralıklarında aranan çözümlerinin lineer yaklaşım şeklinde aranmasından dolayı oluşan hatalar;

Bu faktörlerin İİTP'lerin çözümüne etkisini inceleyen birçok sayıda çalışma yapılmıştır. Fakat bu tür problemlerin çözümüne yönelik olarak genel bir öneri bulunmaması nedeniyle her bir İİTP'lerin çözümü, metodolojik problemlerin çözümünü gerektirir.

Problemin Isı Şeması ve Matematik Modeli

Bu çalışmada uygun başlangıç ve sınır koşullarında düz bir ısı transferi problemi çözülmüştür. Bulunan model sıcaklıkları ($T_m(x_i, \tau^j)$), deneysel sıcaklıklar gibi ($T_d(x_i, \tau^j)$) alınarak, $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ 'nin sıcaklığa bağlı olarak değişimi doğrudan yöntemle belirlenmiş ve bu invers problemin çözüm hassaslığına tesir eden bazı faktörlerin etkisi incelenmiştir. Her bir İİTP'nin çözümü düz ısı probleminin çözümünde olduğu gibi, fizik prosesinin ısı şemasının verilmesi ile başlar. Prosesin bir boyutlu ısı şeması Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. Düz problemin ısı şeması.

Kalınlığı $2L = 20$ mm olan az alaşımlı çelik levha simetrik olarak gücü $q_y = 3 \cdot 10^6$ W/m² olan sabit yüzey ısı kaynağı ile ısıtılmaktadır. Düz problemin matematik modeli (1) denklemi ile, başlangıç ve sınır koşulları ise (11) ve (12) eşitlikleri ile verilmektedir.

$$C_v(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x}), \quad 0 < x < \pm L, \quad 0 < \tau < \tau_m \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0 = 293 \text{ K} = \text{sabit} \quad (11)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=\pm L} = q_y, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (12)$$

Sonuçlar ve Tartışma

Düz problem, verilen başlangıç ve sınır koşullarında literatürden alınan (Mehrabov ve Shaliyev, 1983), bilinen termofiziksel özelliklerinde ($\lambda(T)$, $C_v(T)$) sonlu farklar yönteminin örtülü şeması ile çözülmüştür. Burada non-lineerlik, iterasyon şeması ile dikkate alınmıştır. Çözüm hassaslığına etki eden faktörlerden biri ağ parametreleri olan uzay ve zaman adımlarıdır. Bunlarda oluşan hataları minimuma indirmek için Runge prensibi kullanılmıştır (Berkovskiy ve Nogotov, 1976; Incropera ve DeWitt, 2001). Buna göre yoğunluğu düşük olan ağda elde edilen çözüm, yoğunluğu gittikçe artan ağlarda elde edilen çözümlerle karşılaştırılmıştır. Uzay adımı (h) ile zaman adımından ($\delta\tau$) kaynaklanan bağıl hatalar prosesin başlangıcında çok küçük bir zaman aralığında ($\tau = 0 \div 5\delta\tau$, $\delta\tau = 0,25$ s) %0,8 civarında olup, zamanla azalarak %0,1'e kadar düşmektedir. Ağ düğümlerinde sıcaklığın zamana bağlı olarak değişimi Şekil 2'de görülmektedir.

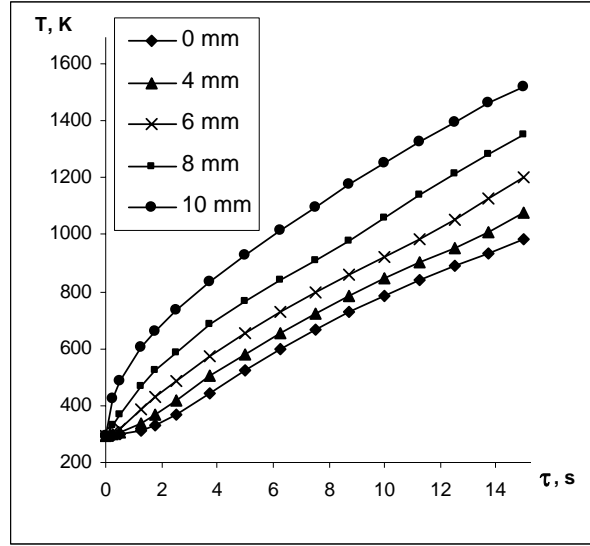
Matematik modellirmeden elde edilen $T_m(x_i, \tau^j)$ model sıcaklıkları deneylerden elde edilen hassas sıcaklıklar gibi alınarak (3) denkleminde kullanılmak suretiyle incers problem yukarıda anlatılan yöntemle aşağıdaki durumlar için çözülmüştür:

- Durum 1: Hassas değerler olarak, düz problemin çözümünde kullanılan ve literatürden alınmış $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ değerleri kullanılmıştır (Şekil 3, 4 - eğri 1).
- Durum 2: İncers problemin çözümünde kullanılan deneysel sıcaklıklar yerine model sıcaklıkları ($T_d(x_i, \tau^j) = T_m(x_i, \tau^j)$) ve malzemenin ısı iletim katsayısının başlangıç değeri için $T = 340$ K sıcaklığında $\Lambda_0^1 = 34,25$ W/(mK) olan gerçek değeri alınmıştır. Ayrıca bu durum için sıcaklık aralığı sayısı $M = 11$ olarak alınmıştır. Bu durumda çözülen incers problem için alınan termofiziksel katsayılar Şekil 3 ve 4'deki 2 eğrisi ile gösterilmektedir.
- Durum 3: Durum 2'den farklı olarak $T_d = T_m$ sıcaklığına, yapay olarak ΔT_d hatası yapılmıştır. ($T_d(x_i, \tau^j) = T_m(x_i, \tau^j) + \Delta T_d$).
- Durum 4: Durum 2'den farklı, $T = 340$ K sıcaklığında farklı olarak alınan tahmini $\Lambda_0^1 = 30$ W/(mK) değeridir (Şekil 3, 4 - eğri 4).
- Durum 5: Durum 2'den farklı olarak sıcaklık aralığı sayısı için $M = 4$ değeri alınmıştır (Şekil 3, 4 - eğri 5).

Böylece bu durumlar için $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ 'nin sıcaklığa bağlılıkları elde edilmiş ve bilinen $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ eğrileri ile karşılaştırılmıştır. Durum 1 ile Durum 2'nin karşılaştırılması çözüm algoritmasından dolayı oluşan hataları göstermektedir. Şekil 3 ile Şekil 4'deki 1 ve 2 eğrilerinin karşılaştırılmasından görüldüğü gibi çözüm algoritmasından kaynaklanan maksimum bağıl hatalar $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ 'nin keskin bir şekilde değiştiği sıcaklık bölgelerinde gözlenmekte olup bu değerler $\lambda(T)$ için %1,2 ve $C_v(T)$ için %4 olarak bulunmuştur.

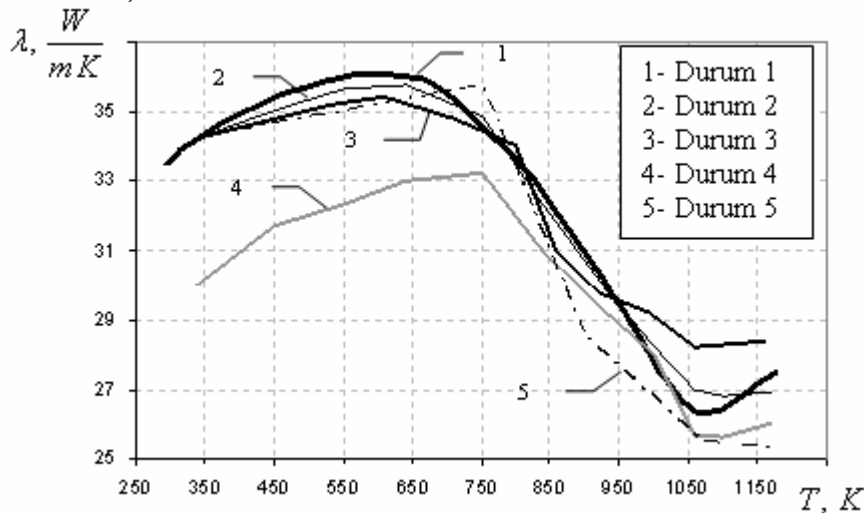
İncers problemlerde kullanılan deneysel sıcaklıkların ölçülmesi sırasında oluşan ΔT_d hatalarının incers problemin çözümüne etkisini incelemek için Durum 1 ile Durum 3 karşılaştırılmıştır. Burada hassas sıcaklık olan $T_d = T_m$

sıcaklığına yapay olarak $\Delta T = 10 \div 12$ K hatası yapılmıştır. Bu değerler ele alınan sıcaklık aralığında termoçiftler için karakteristik olan değerlerdir. Bu şekilde seçilmiş olan T_d giriş sıcaklıkları için invers problemin çözümünden elde edilen ve $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ bağılıkları Şekil 3 ve Şekil 4'de 3 eğrileri ile gösterilmiştir. Bu sonuçların bilinen $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ bağılıkları ile karşılaştırılmasından (1 ve 3 eğrileri) dolayı ortaya çıkan maksimum bağıl hatalar $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ 'nin keskin bir şekilde değiştiği bölgelerde bulunur ve değerleri $\lambda(T)$ için $\delta \approx \%9$; $C_v(T)$ için $\delta \approx \%15$ civarındadır. ΔT 'nin büyük değerlerinde, $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ 'nin gerçek değerlerinden çok farklı değerler elde edilir.



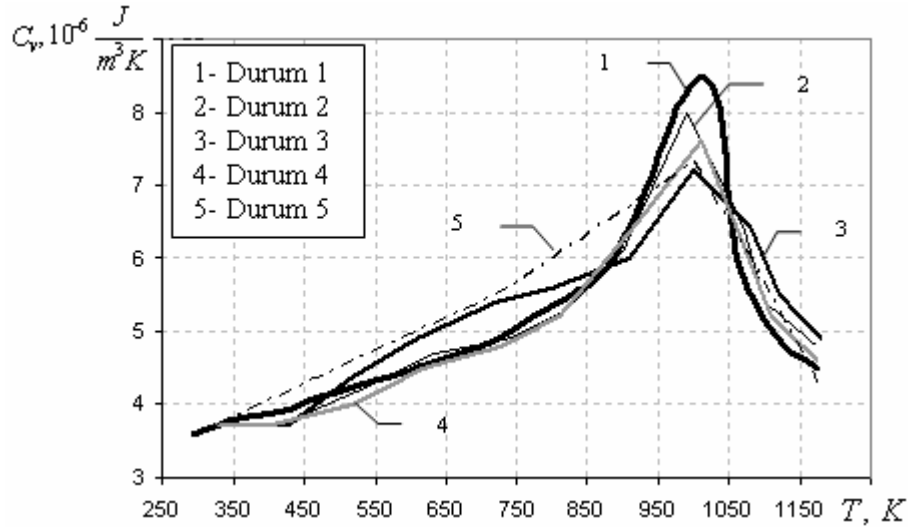
Şekil 2. Farklı noktalardaki sıcaklıkların zamanla değişimi.

İnvers problemlerin çözüm hassaslığına etki eden faktörlerden biri de aranan termofiziksel katsayılarından birinin başlangıç değeridir. Durum 1 ile Durum 4'ün karşılaştırılmasından görüldüğü gibi, λ_b değerinin tahmini olarak seçilmesinden dolayı oluşan hatalar, $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ bağıntıları eğrilerini, yanlış seçilmiş λ_b tarafına doğru kaydırmaktadır. Bu faktörün etkisi ile oluşan hatalar zamanla azalmaktadır. Şekil 3 ve 4'den görüldüğü gibi (1 ve 4 eğrileri) bu tür problemlerin çözümünde herhangi bir sıcaklıkta bir λ_b veya C_{vb} gerçek değerinin bilinmesi, çözüm hassaslığını keskin bir şekilde artırmaktadır.



Şekil 3. Az alışımlı çelik için ısı iletim katsayısının sıcaklığa bağlı olarak değişimi. (1 Düz problemin çözümünde kullanılan ve literatürden alınmış $\lambda(T)$ eğrisi, 2-5 farklı durumlar için invers problemin çözümünden elde edilen $\lambda(T)$ eğrileri.

$\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ bağılıklarının karmaşık olduğu durumlarda bu yöntemin çözüm hassaslığına etki eden faktörlerden biri de $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ 'nin değiştiği geniş sıcaklık aralığının (293÷1200 K) bölündüğü küçük sıcaklık aralıklarının sayısıdır (M). Durum 1, 2 ve 5'in karşılaştırılmasından görüldüğü gibi (Şekil 3, 4'deki 1, 2 ve 5 eğrileri) $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ 'nin lineer şekilde yaklaşım yapılan sıcaklık aralıklarının boyunun küçük olması (M 'nin büyük olması) çözüm hassaslığını artırmaktadır. İncelemeler, $\lambda(T)$ ve $C_v(T)$ bağılıklarının karmaşık olduğu durumlarda sıcaklık aralıklarının boyunun olabildiğince küçük ve bu aralıkta yeterli sayıda ağ düğümleri olacak şekilde seçilmesi gerektiğini göstermektedir. İncers problemin çözümünde gereken işlemlerden birisi de sıcaklık aralıklarının başlangıç ve son değerlerinin ($T_{1,\lambda}^l, T_{1,C_v}^l$) seçimidir. Bu parametreler seçilmeden önce $T_d(x_i, \tau^j)$ sıcaklık alanı incelenmeli ve $\partial T_{di} / \partial \tau$ niceliği değerlendirilmelidir. ($i = 1, 2, 3, \dots, n$ termoçiftlerin sayısıdır). $C_v(T)$ 'nin keskin olarak değiştiği sıcaklık bölgesinde $\partial T_{di} / \partial \tau$ niceliği yeterince azalmaktadır. Bu tür sıcaklık bölgelerinde sıcaklık aralıklarından birinin başlangıcının (T_{1,C_v}^l) yerleşmesi gerekmektedir.



Şekil 4. Az alaşımlı çelik için birim hacmin ısı sığasının sıcaklığa bağlı olarak değişimi (1 Düz problemin çözümünde kullanılan ve literatürden alınmış $C_v(T)$ eğrisi, 2-5 farklı durumlar için incers problemin çözümünden elde edilen $C_v(T)$ eğrileri).

İncers ısı transferinin farklı durumlar için incelenmesi; ΔT_d sıcaklık ölçüm hatasının, λ_b başlangıç değerinin ve M sıcaklık aralığı sayısının çözüm hassaslığına etkisinin büyük olduğunu göstermektedir. Bu nedenle, incers ısı transferi problemleri çözümlenirken, metodolojik problemler çözülerek hassaslığı etkileyecek niceliklerin hatayı minimuma indireyecek değerleri bulunmalıdır.

KAYNAKLAR

1. ALIFANOV OM, Inverse Heat Transfer Problems, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
2. ALIFANOV OM, ARTYUKHIN EA, RUMYANTSEV SV. Extreme Methods of Solving Ill-Posed Problems and Their Application to Inverse Heat Transfer Problems, Begell House, New York, 1995.
3. BECK JV, BLACKWELL B, CLAIR JR CRS. Inverse Heat Conduction, Wiley, New York, 1985.
4. BERKOVSKIY BM, NOGOTOV EF. Isı Transferi Problemlerinin Sonlu Farklar Yöntemi ile İncelenmesi, Nauka i Teknika, Minsk, 1976 (Rusça).
5. D'SOUZA N. Numerical solution of one dimensional inverse transient heat conduction by finite difference method, *ASME*, 75-WA/HT-81, 1975.
6. INCROPERA FP, DEWITT DP. Isı ve Kütle Geçişinin Temelleri, Çevirenler: Taner Derbentli, Osman Genceli, Ali Güngör, 4. Baskı, 960 S. Literatür Yayıncılık, 2001,
7. KOZDOBA LA, KRUKOVSKIY PG. İvers Isı Transferi Problemlerinin Çözüm Yöntemleri, 360 S. Naukova Dumka, Kiev, 1982 (Rusça).
8. MEHRABOV AO, SHALİYEV RN. Yüksek sıcaklıklarda az alaşımlı çeliklerin termofiziksel karakteristiklerinin deneysel tayini. Sanayi Isı Tekniği Dergisi, 5, No.2, s. 32-38, Kiev, 1983 (Rusça).
9. RAYNAUD M, BRANSIER J. A new finite difference method for non-linear inverse heat conduction problem. *Numerical Heat Transfer*, 9 (1) 27-42, 1986.