http://fbe.trakya.edu.tr/tujs
Trakya Univ J Sci, 9(2): 105-117, 2008
ISSN 1305–6468
DIC: 261YYET14100812080109

Derleme / Review

ÜRETİM PLANLAMASI VE OPTİMİZASYONUNDA KULLANILAN YÖNTEMLERDEN ŞANS SINIRLANDIRILMIŞ PROGRAMLAMA

Yılmaz YÜCEL

Trakya Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi,
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, 22100, Edirne, Türkiye
e-posta: yilmazy@trakya.edu.tr

Alınış: 14 Ekim 2008
Kabul Ediliş: 19 Aralık 2008

Özet: *Üretim planlama ve optimizasyonu konusu onlarca yıl boyunca araştırmacılar ve uygulamacıların ilgisini çekmistir ve araştırma camiasında bildirilen çok sayıda modelleme ve üretim optimizasyonu hattı vardır. Bu önemli bir konu olmasına rağmen gelişmelere de açıktır. Var olan metodların çoğu üretim zamanlarının deterministik olduğunu varsayar. Ne var ki uygulamada üretim zamanları tesadüfi şekilde davranır. Bu makale geleneksel parça makina yerleştirme problemini ele alır ve üretim zamanlarının tesadüfi değişken olarak modellendiği bir stokastik programlama modeli önerir.*
Anahtar kelimeler: *Stokastik programlama, Optimizasyon, Şans sınırlandırılmış programlama, Proses zamanlarının rassallığı*

Abstract*: The issue of production planning and optimization has received a consistent attention from researchers and practitioners for decades, and a number of methodologies for modeling and optimizing production lines have been reported in the research community. Although this is an important issue, there is room for improvement. The majority of existing methodologies assume that processing times are deterministic. From the practical point of view, however, the processing times behave in a random fashion. This paper revisits the traditional part-machine allocation problem and proposes a stochastic programming model where the processing times are described by random variables.*
Keywords *Allocation, Processing time, Stochastic programming, Chance Constraint Programming, Optimization.*

Giriş

Üretim sistemleri planması ve analizinde üretim zamanları konusu önemli bir rol oynar. Literatürde çok sayıda değişik üretim zamanı çeşidi ele alınmıştır. Var olan metodların çoğu üretim zamanlarının deterministik olduğunu varsayar ve geleneksel parça makina yerleştirme sistemleri pek çok endüstriyel ve ekonomik sürecin modellenmesi için ilginç bir kalıp oluşturur. Bazı yazarlar üretim zamanlarının deterministik olduğunu varsayarak üretim sistemi tasarımlarında değişik yaklaşımlar kullanmışlardır.

Örneğin [1] ve [2] lineer yaklaşım metodunu ve [3], [4], [5], [6], [7], [8] ise klasik nonlineer programlama metodunu kullanmıştır. Simulasyonlar geniş ölçüde işlem zamanı tahsisine uygulanmıştır. Gerçek zamanlı süreç kontrol verisinin simülasyon ile sağlamasını yaparak değerlendirmesi [9] tarafından yapılmıştır.

Simulasyon kullanarak ardışık yaklaşımlar tarafından hesaplanmış sıra zamanı kestirimlerini [10] kullanmıştır. Esnek kaynakların eş zamanlı yerleştirilmesi ve işlerin sıralanması probleminin paralel makine esnek-kaynak zamanlaması problemi için makul bölgenin global örneklenmesi ve yerel arama sezgilerini birleştiren içiçe bölme metodunu [11] sunmuştur. Parça makina yerleştirmesi probleminin çözümü için üretim zamanları deterministik olmadığında düzenli yığma (stack-up) yaklaşımı, dinamik programlama yaklaşımı, stokastik programlama, dayanıklı tasarım metodu gibi çok sayıda değişik yaklaşım geliştirilmiştir.

Düzenli yığma (stack-up) metodları için üretim zamanları bilindiğinde ve toplam akış zamanı performansı ölçüsüne göre sabit oldugunda *n* işin *m* makina için zamanlanması [12] tarafından çalışılmıştır. [13] iki makinali flowshop problemi için ayrı bir işlemci ve iki makinali yığın işlemci gözönüne almıştır.

[14] maximum gecikmeyi en aza indirmek için, *n* iş, *m* makina, atölye planlama problemine bir çözüm süreci sunmuştur. Öte yandan, [15], [16], [17], [18], [19], [20] tarafından dinamik programlama yaklaşımı kullanılmıştır.

[19] yapı karmaşıklığını indirgemek için iki aşamalı dinamik programlama algoritmalarını kullanarak daha küçük bağımsız akış hatlarına ayrıştırma yöntemi önermiştir.

Bitiş tarihi ve büyük partiler halindeki varış zamanlarının her ikisindeki değişikliklere cevap veren parametreleri kontrol eden nonlineer kontrol sisteminin ayrık zamanlı dinamiklerini analiz etmek için fark denklemi tabanlı bir model [20] tarafından geliştirilmiştir. Özellikle [18] iki adımlı yaklaşım bağlamında geniş olay ağacı olan sonlu ufuklu sürekli zamanlı stokastik kontrol problemi için Hamilton-Jacobi-Bellman dinamik programlama denklemlerini kullanan bir matematik programlama alanı takdim etmiştir.

Deterministik ve stokastik modellerin iyi çalışmadığı durumlar için bir zamanlama dayanıklılığı ölçüsü [21]'de sunulmuştur. Dengelenmemiş iş yükünde tampon uzayı sayısını indirgeyerek değişken işlem zamanlı optimal yerleştirmeyi [22] dikkate almıştır. Stokastik süreç ve stokastik programlama parça makina problemi için geniş ölçüde kullanılmıştır. Örneğin [23] ve [24] stokastik programlama uygulamasını takdim etmişlerdir.

Özellikle [24] işlem zamanları tesadüfi olduğunda parça makina probleminin çözümü için iki aşamalı programlama tekniği ve şans sınırlandırılmış programlama yöntemi kullanarak bir stokastik programlama metodu geliştirmiştir. Son zamanlarda parça makina problemi için yeni yaklaşımlar ortaya çıkmıştır. Örneğin, [25] son derece küçük perturbasyon tekniği yoluyla suboptimal kontrol sınıfları kullanan sonlu sayıda parametre kümesi tabanlı bir yaklaşım önermiştir. Ve [26] etkili bir bitiş tarihi için *n* iş ve *m* makina için ilk siparişi belirlemek için gevşek değişken kullanmıştır.

Parça-makina problemi önemli olmasına rağmen, gelişmeye açıktır. İlk olarak, varolan tekniklerin çoğu işlem zamanlarının verilmiş ve deterministik olduğunu varsayar. Pek çok gerçek dünya endüstriyel uygulamasında işlem zamanları tesadüfî şekilde davranır. Bu demek oluyor ki, her makinada bireysel işlerin işlem zamanları belirsizdir ve aslında bir tesadüfî değişken tarafından tanımlanır.

İkinci olarak, modellerin çoğu olasılıksal/stokastik modelleri parça makina problemi ile ilişkili olarak deterministik optimizasyon modellerine dönüştürmek için yaklaşım teknikleri kullanmıştır. Bu eksiklikleri gidermek amacıyla, bu makale geleneksel parça makina probleminin normal dağılım tabanlı rastlantısal süreç zamanları göz önünde tutularak nasıl modelleneceğini ve önerilen metodun yaklaşım tekniği kullanmadan nasıl optimize edileceğini gösterir.

Stokastik Model Formülasyonu

Genel bir Lineer programlama (L.P.) modelini ele alalım

$$Max\ \ c'x$$

$$x \in X\left\{x \mid Ax \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} b, x \geq 0\right\} \qquad (1)$$

Böyle bir model ile ekonomi ve endüstri mühendisliği problemlerinde çokça karşılaşılır. (1) denkleminde ifade edilen modelde (*A*,*b*,*c*) parametre vektörlerinin elemanları sabit değerler olup deterministik bir model söz konusudur. Karşılaşılan bazı problemlerde bu parametrelerin sabit değer almamaları bu modeli geçersiz kılar. Bu takdirde probabilistik programlama tekniklerini kullanmamız gerekir. Probabilistik programlama (Stochastic Programming) yaklaşımı şu ana başlıklar altında incelenebilir:

1-Risk Programlaması (Risk Programming):

a-Şans Sınırlandırılmış Programlama (Chance Constraint Programming)
b-Belirsizlik Altında İki Basamaklı Programlama (Two Stage Programming Under Uncertainty)
c-Stokastik Lineer Programlama (Stochastic Linear Programming)

2-Olasılıksal Duyarlılık Analizi (Probabilistic Senstivity Analysis)

3-Simulasyon Yöntemleri ile Olasılıksal Programlama Yaklaşımı

Probabilistik programlama teknikleri çok çeşitli olduğundan burada nonlinear ve kuadritik programlama ile aralarındaki ilişkilerden dolayı şans sınırlandırılmış programlama yaklaşımını inceleyeceğiz.

2-1. Şans Sınırlandırılmış Programlama (Chance Constraint Programming - C.C.P.)

Şans sınırlandırılmış programlama C.C.P. genel L.P. modelindeki parametrelerin tesadüfî olarak değişmesine ve önceden belirlenmiş bir olasılığa kadar kısıt koşullarının ihlâl edilmesine izin verir. Bu sebeple problemin muhtevasına göre çeşitli karar kuralları kullanılabilir. Belirli şartlar altında programlanacak problemdeki (lineer olması gerekmeksizin) bütün tesadüfî parametrik vektör elemanlarının elimine edilerek deterministik hale dönüşümü sağlanır. Deterministik eşleniği bulunabilen problem genel doğrusal karar kuralı altında birbirinden farklı üç ayrı amaç altında konveks programlama problemine dönüştürülebilir.

1-Maksimum Beklenen Değer Modeli (*E Model*)
2-Minimum Varyans Modeli (*V Model*)
3-Maksimum Olasılık Modeli (*P Model*)

E modelde rassal kazancın beklenen değeri maksimize edilir. *V* modelde rassal kazancın varyansı minimize edilir. *P* modelde ise rassal kazancın değerinin belirlenmiş bir değerden fazla olması olasılığı maksimize edilir.

Genel bir L.P. problemini şu şekilde gösterebiliriz.

$$\begin{array}{lll} Max\ c'x & & \\ Ax \le b & A: m\mathrm{x}n \quad matris & (2) \\ x \ge 0 & \left.\begin{array}{l} b: m\mathrm{x}1 \\ c: n\mathrm{x}1 \end{array}\right\} vektör & \end{array}$$

Şans sınırlandırılmış programlama (*C.C.P.*) modelinde genel *L.P.* modeli ((1) ve(2)) şu formu alır.

$$\begin{array}{ll} Max\ f(c,x) & \\ P(Ax \le b) \ge \alpha & (3) \\ x \ge 0 & \end{array}$$

Burada (*A,b,c*) değerleri sabit olmayabilir. Genellikle bazıları veya tamamı rassal değişken olabilir. α vektörü önceden belirlenmiş sabit değerlerdir. $\alpha_i \in \alpha\ ve\ (0 \le \alpha_i \le 1)$ α bir olasılık ölçüsü olup kısıt şartlarının uyması gereken olasılığı belirler. (3)' deki sınırlayıcı şartı biraz daha açık yazarsak

$$P(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i) \ge \alpha_i \quad (4)$$

i'inci sınırlayıcı koşul a_{ij} *ve* b_i'nin rassal olarak değişme koşlu altında en az α_i olasılıkla gerçeklenecektir. Diğer bir deyişle *i* 'inci sınırlayıcı şart en fazla $(1-\alpha_i)$ kadar bir olasılıkla $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ şartının ihlâline izin verir.

Şans sınırlandırılmış modelde çözüme yaklaşım iki temel görüş altında yapılabilir. Bunlar:

I-Programdan öyle *x* değerleri istenir ki, bu değerler şans sınırlanmış koşulları sağlasın. Bunun için rassal olarak değişen parametrelerin dağılımları belirlenir ve rassal elemanın alacağı değerler bulunmadan *x* değerleri bulunur. Bu kural zero-order kuralı (*Charnes and Cooper zero-order rule*) olarak bilinir.

II-Bu görüş altında öyle bir şans mekanizması meydana getirilir ki bu mekanizma ile belirlenmiş olasılıklar içinde sınırlayıcı koşulları sağlayan *x* değerleri belirlenir.

Durum I için şans sınırlandırılmış koşullara eşdeğer deterministik sınır koşulları haline dönüştürülerek modelin deterministik çözümü yapılır. Bunun için en uygun teknik *quantil* tekniğidir.

2-1-1. ***Quantil Kuralı*:**
Şans sınırlandırılmış bir model ele alalım.

$$Min\ c'\,x \qquad\qquad Min\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$P(Ax \geq b) \geq \alpha \qquad\qquad P(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i) \geq \alpha_i$$

$$x \geq 0 \qquad \text{veya} \qquad x_j \geq 0 \qquad\qquad (5)$$

$$A : m\text{x}n \qquad\qquad i = 1,2,....,m$$

$$b : m\text{x}1 \qquad\qquad j = 1,2,.....,n$$

$$c : n\text{x}1$$

Şeklinde olup burada kaynak vektörünün elemanları olan b_i ler veya *A* matrisinin elemanları olan a_{ij} ler rassal olarak değişebilir.

2-1-2. ***b_i nin rassal olarak değişimi***

a_{ij} ve c_j değerleri sabit değerler olup b_i, $(i = 1,2,\ldots,m)$ rassal olarak değişmekte ve b_i nin kümülatif fonksiyonu

$$P(b_i \leq z) = F_{b_i}(z) = \int_{-\infty}^{z} f(b_i)\, db_i$$

şeklindedir. b_i nin değeri yerine konur ise

$$P(b_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) = F_{b_i}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) \geq \alpha_i$$

olur. Buradan $F_{b_i}^{-1}(\alpha_i) \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ yazılabilir. Probabilistik koşul olan $P(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i) \geq \alpha_i$ 'yi yukarda belirtildiği gibi deterministik sınırlayıcı koşul haline dönüştürebiliriz.

$$P(b_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) = 1 - F_{b_i}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) = 1 - F_{b_i}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) \geq \alpha_i \quad ve \quad F_{b_i}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) \leq 1 - \alpha_i$$

olup buradan

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq F_{b_i}^{-1}(1 - \alpha_i)$$

yazılabilir.

Böylece probabilistik koşul olan $P(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i) \geq \alpha_i$ deterministik olan $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq F_{b_i}^{-1}(1 - \alpha_i)$ koşulu haline dönüşür.

Basit bir örnek ile bu durumu inceleyelim

$$Min\ f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

sınırlayıcı şartlar

$$P(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1) \geq \alpha_1$$

$$P(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2) \geq \alpha_2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

burada *c* vektörü ve *A* matrisi elemanları sabit değerler alıp b_1 ve b_2 rassal olarak aşağıdaki gibi dağılmıştır:

$$b_1 \sim U(\underline{b}_1, \overline{b}_1)$$

$$b_2 \sim U(\underline{b}_2, \overline{b}_2)$$

Problemdeki sınırlayıcı koşulları deterministik sınırlayıcı koşullar haline sokmaya çalışalım

$$P(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1) = 1 - P(b_1 \le a_{11}x_1 + a_{12}x_2) \ge \alpha_1$$
$$= 1 - F_{b_1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) \ge \alpha_1$$
$$F_{b_1}^{-1}(1-\alpha_1) \ge a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$\overline{b}_1, \underline{b}_1$ arasında uniform dağılmış b_1 rassal değişkeni için kümülatif dağılım ve oradan da $F_{b_1}^{-1}(1-\alpha_1)$ değeri yazılarak

$P(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1) \ge \alpha_1$ sınır koşulu $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le \underline{b}_1 + (1-\alpha_1)(\overline{b}_1 - \underline{b}_1)$
$P(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2) \ge \alpha_2$ sınır koşulu $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le \underline{b}_2 + (1-\alpha_2)(\overline{b}_2 - \underline{b}_2)$

dönüşür böylece problemimiz son olarak şöyle olacaktır.

$Min\ f(x) = c_1x_1 + c_2x_2$
sınırlayıcı şartlar
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le \underline{b}_1 + (1-\alpha_1)(\overline{b}_1 - \underline{b}_1)$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le \underline{b}_2 + (1-\alpha_2)(\overline{b}_2 - \underline{b}_2)$
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

2-1-3. *A Matrisi Elemanlarının Rassal Olarak Değişimi*

L.P. modelinde *A* matrisi elemanlarının rassal olarak değiştiğini a_{ij} 'lerin normal olarak dağıldığını ve beklenen değer ile varyanslarının verildiğini kabul edelim.

$$E(a_{ij}) = \overline{a}_{ij} \quad ve \quad Var(a_{ij}) = \sigma^2_{a_{ij}}$$

olarak bilinmektedir.

Buradan

$$E\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}x_j \quad ve \quad Var\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \sigma^2_{a_{ij}}x_j$$

yazabiliriz. Burada a_{ij} 'ler $j = 1, 2, \dots, n$ birbirinden bağımsız rassal değişkenler olarak alınmışlardır.

$$u = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

olarak alalım.

$$U \sim N\left(\overline{u} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}x_j \ , \sigma^2_{(u)} = \sum_{j=1}^{n} \sigma^2_{a_{ij}}x_j^2\right) \quad (6)$$

$$P(U_i \le b_i) = \int_{-\infty}^{b_i} h(u_i)du_i = \int_{-\infty}^{\frac{b_i - \overline{u}_i}{\sigma(u_i)}} f(z_i)dz_i = F\left(\frac{b_i - \overline{u}_i}{\sigma(u_i)}\right) \ge \alpha_i$$

şeklinde yazarak

$$b_i - \overline{u}_i \ge \sigma_{(u_i)}F^{-1}(\alpha_i)$$

u_i ve $\overline{u}_i$ yerine (6) daki değerler yerine konursa

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}x_j + F^{-1}(\alpha_i)\left[\sum_{j=1}^{n} \sigma^2_{a_{ij}}x_j^2\right]^{1/2} \le b_i \qquad (7)$$

bulunur.

Şimdi de a_{ij}, $(j = 1,2,....,n)$lerin birbirlerinden bağımsız olmamaları durumunda ne olacağını inceleyelim. Bu durumda çok değişkenli normal (*Multivariate normal*) dağılımı kulanmamız gerekecektir. Bu durumda
$a_i \sim N[E(a_i), Var(a_i)]$
için inceleyelim.

$$E(a_i) = [E(a_{i1}) = \bar{a}_{i1}, E(a_{i2}) = \bar{a}_{i2}, ..., E(a_{in}) = \bar{a}_{in},]$$

$$Var[a_i] = \begin{bmatrix} Var(a_{i1}) & Cov(a_{i1}a_{i2}) & .... & Cov(a_{i1}a_{in}) \\ Cov(a_{i2}a_{i1}) & Var(a_{i2}) & .... & Cov(a_{i2}a_{in}) \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ Cov(a_{in}a_{i1}) & . & & Var(a_{in}) \end{bmatrix}$$

Matris notasyonundan yararlanarak yazarsak

$$a_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ . \\ . \\ a_{in} \end{bmatrix} \quad \bar{a}_i = \begin{bmatrix} \bar{a}_{i1} \\ \bar{a}_{i2} \\ . \\ . \\ \bar{a}_{in} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = u_i = a_i' x \quad ve \quad E(u_i) = \bar{u}_i = a_i' x \quad Var(a_i' x) = x' Var(a_i') x$$

$$(7)' \ de \ \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \quad yerine \quad \bar{a}_i' x_j \quad ve \quad \sum_{j=1}^{n} \sigma_{a_{ij}}^2 x_j \quad yerine \quad x' Var(a_i) x \quad yazarsak$$

$$a_i' x + F^{-1}(\alpha_i)[x' Var(a_i) x]^{1/2} \geq b_i \qquad (8)$$

Şimdi bu durumu bir örnek problem üzerinde görelim.

Örnek: Bir çiftlikte büyük baş hayvan yetiştirilmekte olup elde mevcut yemler kullanılarak minimum maliyet ile hayvanların en iyi şekilde beslenmesini sağlayacak şekilde bir karışım sağlamak istenmektedir.

	Arpa	Yulaf	Yer Fıstığı	Susam	Gereksinme
Protein Besleyici %	12.0	11.9	41.8	52.1	21
Diğer Besleyici %	2.3	5.6	11.1	1.3	5
Ton Başına Maliyet $	24.5	26.7	39.0	40.5	

Bu problem için kurulacak model şu şekildedir.

$$Min \ f(x) = c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$x_j = 0$$

Bu veriler yerine konduğunda

$$Min\ \ f(x) = 24.5x_1 + 26.7x_2 + 39.0x_3 + 40.5x_4$$
$$12.0x_1 + 11.9x_2 + 41.8x_3 + 52.1x_4 \geq 21.0$$
$$2.3x_1 + 5.6x_2 + 11.1x_3 + 1.3x_4 \geq 5.0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.0$$
$$\forall x_j \geq 0$$

Çözüm şu şekilde bulunmuştur.

$$Z = Min\ \ f(x) = 28.90775 \quad x_1 = 0.685 \quad x_2 = 0.013 \quad x_3 = 0.302$$

Gerçekte çiftlikte kullanılan dört yem çeşidinin protein oranları rassal olarak değişmekte olup oranların dağılımı ve parametre değerleri aşağıdaki gibidir.

Arpa protein yüzdesi $a_{11} \sim N(\bar{a}_{11} = 12\ \ ; \sigma^2_{a_{11}} = 0.28)$

Yulaf protein yüzdesi $a_{12} \sim N(\bar{a}_{12} = 11.9 ; \sigma^2_{a_{12}} = 0.19)$

Susam protein yüzdesi $a_{13} \sim N(\bar{a}_{13} = 41.8\ \ ; \sigma^2_{a_{13}} = 20.58)$

Yer fıstığı protein yüzdesi $a_{14} \sim N(\bar{a}_{14} = 12\ \ ; \sigma^2_{a_{14}} = 0.28)$

Diğer taraftan bu yem karışımındaki protein oranının % 21 olma şartının en az % 95 olması istenmektedir. Bu durumda probabilistik modelin eşlenik deterministik modeli (7) uygulaması ile

$$Z = Min\, f(x) = 24.5x_1 + 26.7x_2 + 39.0x_3 + 40.5x_4$$
$$12.0x_1 + 11.9x_2 + 41.8x_3 + 52.1x_4 + (-1.645)[0.28x_1^2 + 0.19x_2^2 + 20.5x_3^2 + 0.62x_3^2]^{1/2} \geq 21.0$$
$$2.3x_1 + 5.6x_2 + 11.1x_3 + 1.3x_4 \geq 5.0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.0$$
$$\forall x_j \geq 0$$

olur. Böylece problem deterministik fakat nonlinear model haline dönüşmüş olur.

Örnek: Şans sınırlandırılmış programlama metodu ile iki parçalı dört makinali bir sistemle ilgili sayısal bir örnek icra edilmiştir. Problemin amacı işlem zamanının ortalaması ve standart sapması verildiğinde kârı maximize etmektir. İki makina parçasında, değişik makinelerdeki haftalık çalışma zamanları ve her bölüm için kârlar aşağıda verilmiştir. Değişik makinalarda her parça için gereken makina zamanları kesin olarak bilinmemektedir (bunlar işçiden işçiye değiştigi için). Fakat bunların aşağıdaki tabloda gösterilen ortalama ve standart sapmalar ile normal dağılımı takip ettiği bilinmektedir. Bu problemin çözümü mevcut işlem süresini 100 hafta içinde 1 kereden fazla aşmaksızın (en az %99 olasılıkla) kârı maksimize etmek amacıyla her makina için üretilecek parçaların optimal sayıları belirlenerek elde edilebilir.

	Her bir birim için gerekli makina zamanları (dakika)				Haftalık maksimum
Makina	Parça I		Parça II		zaman (dakika)
	Ortalama	Stand. sapma	Ortalama	Stand. sapma	
Makina 1	$\bar{a}_{11} = 3$	$\sigma_{a_{11}} = 9$	$\bar{a}_{12} = 5$	$\sigma_{a_{11}} = 9$	$b_1 = 3000$
Makina 2	$\bar{a}_{21} = 8$	$\sigma_{a_{21}} = 10$	$\bar{a}_{22} = 6$	$\sigma_{a_{22}} = 11$	$b_2 = 1500$
Makina 3	$\bar{a}_{31} = 2$	$\sigma_{a_{31}} = 5$	$\bar{a}_{32} = 3.5$	$\sigma_{a_{32}} = 7$	$b_3 = 500$
Makina 4	$\bar{a}_{41} = 1$	$\sigma_{a_{41}} = 6$	$\bar{a}_{42} = 1$	$\sigma_{a_{42}} = 9$	$b_4 = 1000$
Birim kâr	$c_1 = 40$		$c_1 = 30$		

$$\begin{array}{ll} \textit{Maksimize} & f = 40x_1 + 30x_2 \\ \textit{kısıtlaycı şartlar} & 3x_1 + 5x_2 + 2.33\sqrt{81x_1^2 + 64x_2^2} - 3000 \leq 0 \\ & 2x_1 + 3.5x_2 + 2.33\sqrt{100x_1^2 + 121x_2^2} - 1500 \leq 0 \\ & x_1 + x_2 + 2.33\sqrt{36x_1^2 + 81x_2^2} - 1000 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Problemi çözdüğümüzde amaç fonksionunun değeri $f^* = 1562.04$ ve $x_1^* = 32.11$, $x_2^* = 9.25$ olarak bulunur

2-2. *E Model*

Rassal kazancın beklenen değerini maksimize eden bu modelin formu

$$\begin{array}{l} Max\ \ E(c'x) \\ P(Ax \leq b) \geq \alpha \qquad (9) \\ x = Db \end{array}$$

şeklindedir. Burada *D*: *n* x *m* matristir.

A matrisinin elemanları bilinen sabit değerler almakta, *b* ve *c* vektörlerinin tüm veya bazı elemanları rassal olabilmektedir. Basitlik sağlamak amacıyla *b* ve *c* arasında korelasyon olmadığını varsayalım. (9)'un deterministik eşleniğini doğrusal karar kuralını kullanarak elde etmeye çalışalım. *x* yerine *Db* yazarak

$$E(c'x) = E(c'Db) = [E(c)]'D[E(b)] \qquad (10)$$

olur. Burada *b* ve *c* değerleri rassal olarak değişmekte $E(c)$ ve $E(b)$ değerleri ise sabit değerlerdir. Burada cx rassal değer olmakla breaber $E(cx)$'i elde etme olanağı vardır.

$$\mu_c' = [E(c)]' \ \ ve \ \ \ \mu_b' = [E(b)]'$$

yazarak (10) şu hali alır :

$$\mu_c' D \mu_b$$

Böylece (10) ile ifade edilen model şu forma girer

$$\begin{array}{l} Max\ (\mu_c' D \mu_b) \\ P(ADb \leq b) \geq \alpha \end{array}$$

b'nin rassal değişken olması dolayısıyla $P(ADb \leq b) \geq \alpha$ (*i*'inci sınırlayıcı şart için de $P(a_i Db \leq b_i) \geq \alpha_i$ olur.) deterministik forma dönüşmüş değildir. *b* 'nin normal dağıldığını varsayarak deterministik eşleniğini elde etmeye çalışarak bir tanımlama yapalım.

$$\hat{b} = b - \mu_b \ \ \ ve \ \ \ a_i' = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$$

burada a_i' *A* 'nın (*i*)'inci sırasıdır. $(a_i' Db - b_i)$ normal dağılmış olacağından

$$P(a_i' Db - b_i \leq 0) = P(b_i - a_i' Db \geq 0) = P(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b} \geq -\mu_{b_i} + a_i' D \mu_b)$$

$E(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b})^2 > 0$ olduğunu varsayarak,

$$P(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b} \geq -\mu_{b_i} + a_i' D\mu_b) = P\left(\frac{\hat{b}_i - a_i' D\hat{b}}{\sqrt{E(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b})^2}}\right) \geq \frac{-\mu_{b_i} + a_i' D\mu_b}{\sqrt{E(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b})^2}} \qquad (11)$$

Burada

$$z_i = \frac{\hat{b}_i - a_i' D\hat{b}}{\sqrt{E(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b})^2}}$$

alıp yani z_i ortaması 0 varyansı 1 olan standart normal dağılım olduğundan (11)' e uygulama ile

$$P(z_i \geq \frac{\hat{b}_i - a_i' D\hat{b}}{\sqrt{E(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b})^2}}) \geq \alpha_i \qquad (12)$$

olur.

$F(z_i) = \int_{-\infty}^{z_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$ standart normal dağılımın kümülatif fonksiyonu olduğundan

$$F_i(\frac{-\hat{b}_i + a_i' D\mu_b}{\sqrt{E(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b})^2}}) \leq 1 - \alpha_i \quad \text{veya} \quad \frac{-\hat{b}_i + a_i' D\mu_b}{\sqrt{E(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b})^2}} \leq F_i^{-1}(1-\alpha_i) \qquad (13)$$

$\alpha_i \geq 0.50$ için $F_i^{-1}(1-\alpha_i) \leq 0$ olduğundan

$$\frac{-\mu_{b_i} + a_i' D\mu_b}{\sqrt{E(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b})^2}} \leq F_i^{-1}(1-\alpha_i) = K_{\alpha_i} \quad \text{ve} \quad K_{\alpha_i} \geq 0 \qquad (14)$$

olur.

Eğer (14)'ü

$$-\mu_{b_i} + a_i' D\mu_b \leq K_{\alpha_i} \sqrt{E(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b})^2} \quad \leq 0 \qquad (15)$$

olarak yazar ve v_i 'yi yeni bir değişken olarak tanımlarsak

$$(-\mu_{b_i} + a_i' D\mu_b) \leq v_i \leq (-K_{\alpha_i} \sqrt{E(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b})^2}\ ) \leq 0$$

buradan

$$a_i' D\mu_b - v_i \geq \mu_{b_i}$$

$$-K_{\alpha_i}^2 E(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b})^2 + v_i^2 \geq 0$$

olur. Böylece (9)' da verilen probabilistik modelin deterministik eşleniğini yazabiliriz.

$$\begin{aligned} &Min \quad -\mu_c D\mu_b \\ &-a_i' D\mu_b - v_i \geq \mu_{b_i} \qquad (16) \\ &-K_{\alpha_i}^2 E(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b})^2 + v_i^2 \geq 0 \\ &\quad v_i \geq 0 \end{aligned}$$

Şimdi de bu ele aldıklarımızı makinalara iş yükleme probleminde görelim

$$\begin{aligned} &Max\, f(x) = \mu_{c_1} x_1 + \mu_{c_2} x_2 \\ &\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq \mu_{b_1} \\ &\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq \mu_{b_2} \\ &\quad -x_1 \qquad\quad \leq 0 \\ &\qquad\quad -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Burada:

c_j : Birim mamul kârı $\mu_{c_1} = 1$, $\mu_{c_2} = 1/2$

b_i: Makinaların kapasitesi $b_1 \sim N(\mu_{b_1} = 12,\ \sigma^2_{b_1} = 0)$ $\quad b_2 \sim N(\mu_{b_2} = 10,\ \sigma^2_{b_2} = 0)$

problemi basitleştirmek amacıyla $\sigma^2_{b_1} = 0, \quad \sigma^2_{b_2} = 0 \ ve \ Cov(b_1, b_2) = 0$ olarak alınmıştır.

a_{ij}:Birim ürünün makinada işlenme süresi (saat olarak) burada $a_{11} = 3,\ a_{12} = 2,\ a_{21} = 5,\ a_{22} = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{b_1} \\ \mu_{b_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

(17)'yi (16)' ya uygulayarak

$$\begin{aligned} & Max(\mu_{c_1} d_{11} \mu_{b_1} + \mu_{c_1} d_{12} \mu_{b_2} + \mu_{c_2} d_{21} \mu_{b_1} + \mu_{c_2} d_{22} \mu_{b_1}) \\ & a_{11} d_{11} \mu_{b_1} + a_{11} d_{12} \mu_{b_2} + a_{12} d_{21} \mu_{b_1} + a_{12} d_{22} \mu_{b_2} + v_1 \le \mu_{b_1} \\ & a_{21} d_{11} \mu_{b_1} + a_{21} d_{12} \mu_{b_2} + a_{22} d_{21} \mu_{b_2} + a_{22} d_{22} \mu_{b_2} + v_2 \le \mu_{b_1} \\ & -d_{11} \mu_{b_1} - d_{12} \mu_{b_2} \qquad\qquad\qquad\qquad + v_3 \le 0 \\ & \qquad\qquad\qquad -d_{21} \mu_{b_1} - d_{22} \mu_{b_2} + v_4 \le 0 \end{aligned} \qquad (18)$$

verilen değerlerin (18) 'de yerine konması ile

$$\begin{aligned} & Max(12d_{11} + 10d_{12} + 6d_{21} + 5d_{22}) \\ & 36d_{11} + 30d_{12} + 24d_{21} + 20d_{22} + v_1 \le 12 \\ & 60d_{11} + 50d_{12} \qquad\qquad + v_2 \le 10 \\ & -12d_{11} - 10d_{12} \qquad\quad + v_3 \le 0 \\ & \qquad -12d_{21} - 10d_{22} + v_4 \le 0 \\ & \qquad v_1, v_2, v_3, v_4 \ge 0 \end{aligned}$$

Böylece genel bir L.P. problemine varılmış olup bunun simpleks yöntem ile çözülmesi sonucu $d_{11} = 1/4,\ d_{21} = 1/6$ olarak bulunur. Buradan da

$$x_1 = (1/6)(12) = 2$$

$$x_1 = (1/4)(12) = 3$$

elde edilirler.

Şimdi de problemi genişletelim ve

$$\sigma^2_{b_1} = 1, \quad \sigma^2_{b_2} = 1 \ ve \ Cov(b_1, b_2) = 10 \quad K_{\alpha_i} = 2 \qquad (19)$$

olarak kabul edelim. Bu şartlar altında (18)'e (16)'da verilen ikinci sınırlayıcı şartı eklemek gerekecektir. (16)'da

$$-K^2_{\alpha_i} E(\hat{b}_i - a'_i D \hat{b})^2 + v_i^2 \ \ge 0$$

idi. Buradan

$$\begin{aligned} E(\hat{b}_1 - a'_1 D \hat{b})^2 &= E[(a'_i D b - b_1) - (a'_1 D \mu_b - \mu_{b_1})]^2 \\ &= \sigma^2_{b_1} (3d_{11} 2d_{21} - 1)^2 + \sigma^2_{b_2} (3d_{12} 2d_{22})^2 + 2(3d_{11} 2d_{21} - 1)(3d_{12} 2d_{22})\, Cov(b_1, b_2) \end{aligned}$$

(19)' da verilen değerler yerine konursa

$$E(\hat{b}_1 - a'_1 D \hat{b})^2 = [\sigma_{b_1} (3d_{11} 2d_{21} - 1) + \sigma_{b_2} (3d_{12} 2d_{22})]^2$$

bulunur.

$$-K_{\alpha_i}^2 E(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b})^2 + v_i^2 \geq 0$$

Sınır şartı da aşağıdaki hale girer.

$i = 1$ *için* $6d_{11} + 4d_{21} + 60d_{12} + 40d_{22} - v_1 \leq 0$

$i = 2$ *için* $10d_{11} + 100d_{12} - v_2 \leq 0$

olur. Böylece problemimiz

$$\begin{aligned}
&Max(12d_{11} + 10d_{12} + 6d_{21} + 5d_{22}) \\
&36d_{11} + 30d_{12} + 24d_{21} + 20d_{22} + v_1 \leq 12 \\
&60d_{11} + 50d_{12} \qquad\qquad\qquad\qquad + v_2 \leq 10 \\
&\ \ 6d_{11} + 60d_{12} + 4d_{21} + 40d_{22} - v_1 \leq 2 \\
&10d_{11} + 100d_{12} \qquad\qquad\qquad\quad - v_2 \leq 20 \\
&\qquad\qquad v_1, v_2 \geq 0
\end{aligned}$$

olur. Böylece genel bir L.P. problemine varılmış olup bunun simpleks yöntem ile çözülmesi sonucu $d_{11} = 1/4,\ d_{21} = 1/6$ olarak bulunur

2-3. *V Model* :

Bu modelde amaç fonksiyonunda kazancın varyansının minimize edilmesine çalışılır.

$$Min\ V(c'x)$$

sınırlayıcı şartlar $\begin{cases} P(Ax \leq b) \geq \alpha \\ x = Db \end{cases}$

Amaç fonksiyonunu değişik biçimde yazarsak

$$Min\ \ V(c'x) = Min\ \ E[c'x - E(c'x)]^2$$

ve $E(c'x) = c'^0 x^0 = Z^0$ olarak alalım. Böylece

$$Min\ \ E(c'x - Z^0)^2$$

sınırlayıcı şartlar $\begin{cases} P(Ax \leq b) \geq \alpha \\ x = Db \end{cases}$ (20)

olur. *E* modelde kullanılan teknikler kullanılarak (20)'nin deterministik eşleniğini

$$Min\ \ E(c'x - Z^0)^2$$

sınırlayıcı şartlar $\begin{cases} a_i' D\mu_b - v_i \geq \mu_{b_i} \\ K_{\alpha_i}^2 E(\hat{b}_i - a_i' D\hat{b})^2 + v_i \geq 0 \\ v_i \geq 0 \forall i \text{ ler için} \end{cases}$ (21)

olur. Görüleceği gibi modeldeki sınırlayıcı şartlar *E* modelin deterministik eşleniği olan (16)' da olduğu gibidir.

2-4. *P Model* :

Bu modelde *E* ve *V* modellerinde olduğundan farklı bir amaç fonksiyonu kullanılmış fakat sınırlayıcı şartlar aynı bırakılmıştır. Amaç fonksiyonu değerinin belirlenmiş bir değerden daha yüksek değerler alma olasılığı maksimum yapılmaya çalışılmıştır. Böylece model

$$\begin{aligned}
&Max\ \ P(c_j' x_j \geq Z^0) \\
&\qquad P(Ax \leq b) \geq \alpha \qquad (22) \\
&\qquad\quad x = Db
\end{aligned}$$

olur. Burada $Z^0 = E(c'x) = c'^0 x^0$ dır.

Amaç fonksiyonunu bir sınırlayıcı şart olarak yazmaya çalışırsak

$$P(c_j x_j \geq c_j'^0 x_j^0) \geq \alpha_{0j} \quad , \ j = 1,2,.....,n$$

olup *E* ve *V* modelde uygulanan kurallar uygulanarak (22)'de verilen modelin deterministik eşleniği

$$Max \quad \overline{v}_0$$

$$\mu_c' \overline{D} \mu_b - \overline{v}_0 \geq t\mu_{c^0}$$

$$-E(c'\overline{D}b - tc'^0 x^0)^2 + w_0^2 \geq 0$$

$$(t\mu_{b_i} - a_i' \overline{D} \mu_b)^2 - \overline{v}_i \geq 0$$

$$-K_{\alpha_i}^2 E(a_i' \overline{D} b - tb_i)^2 + K_{\alpha_i}^2 (t\mu_{b_i} - a_i' \overline{D} \mu_b)^2 + \overline{v}_i \geq 0$$

$$\overline{w}_0 = 1 \ ; \ t, v_i \geq 0; \ \overline{D} = tD; \ \overline{v} = tv; \ \overline{w}_0 = tw_0$$

olarak bulunacaktır.

Sonuç

Üretim planlaması ve optimizasyonu konusu onlarca yıldır araştırmacıların ve uygulayıcıların sürekli ilgisini çekmiştir ve araştırma camiasında üretim hatlarının modellemesi ve optimizasyonu ile ilgili pek çok metod bildirilmiştir. Bu önemli bir konu olmasına rağmen gelişmelere açıktır. Var olan metodların çoğu işlem zamanlarının deterministik olduğunu varsayar. Uygulama bakış açısından, ne var ki, işlem zamanları tesadüfî şekilde davranır. Bu makale stokastik programlama yaklaşımının işlem süresi yerleştirme probleminin çözümlerine yakınsamak için etkili bir şekilde kullanılabileceğini göstermektedir. Bu yaklaşım stokastik programlama ve deterministik optimizasyonu birleştirdiğinden, optimal işlem sürelerinin daha iyi anlaşılması için diğer olası bir metod olarak düşünülebilir.

Kaynaklar

1. Sworder, D. (1969) Feedback control of a class of linear system with jump parameters, *IEEE Transactions in Automatic Control*, 14(1), pp. 9-14.
2. Wonham, W. (1970) Random differential equations in control theory in *probabilistic Methods in Applied Mathematics*, Barucha-Reid, A (ed), Academic Press, NY, pp. 131-217.
3. Johnson, S.M (1954) Optimal two-and three-stage production schedules with setup times included, *Naval Research Logistics Quarterly*, 1, pp. 61-67.
4. Makino, T. (1956) On a scheduling problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 8, pp. 32-44.
5. Rishel, R. (1975) Dynamic Programming and minimum principles for systems with jump Markov disturbances, *Journal of the Royal Statistical Society*, 46, pp. 353-388.
6. Davis, M. (1984) Piecewise deterministic Markov processes: a general class of non-diffusion stochastic models, *Journal of the Royal Statistical Society,* 46, pp. 353-388.
7. Vermes, D. (1985) Optimal control of piecewise deterministic Markov process. *Stochastic*, 14, pp. 165-208.
8. Hillier, S.F. and Lieberman, G.J. (1990) *Introduction to Operations Research*. Times Roman by Waldman Graphics, Inc.
9. Douglas, S.C. and Roger, W.N. (1998) A methodology for formulating, formalizing, validating, and evaluating a real-time process control advisor, *IIE Transactions*, 30, pp. 235-245.
10. Lawremce, S.R and Morton T.E. (1998) Patriarch: Hierarchical production scheduling in *National Bureau of Standards Special Publication,* 724, NBS, Gaithersburg, MD, pp, 87-97.
11. Olafsson, S.R and Shi, L. (2000) A method for scheduling in parallel manufacturing systems with flexible resources. *IIE Transactions*, 32, 135-146.
12. Allahverdi, Ali (1999) Stochastically minimizing total flowtime in flowshops with no waiting space. *European Journal of Operational Research*, 113, 101-112.
13. Cheng, T.C. and Gouqing W. (1998) Batching and scheduling to minimize the makespan in the twomachine flowshop. *IIE Transactions*, 30,447-453.
14. Hodgson, T.J., Cormier, D., Weintraub, A.J., and Zozom, Jr. A. (1998) Satisfying due-dates in large job shops. *Management Science*, 44, 1442-1446.
15. Rishel, R. (1988) Controlled were process: Modeling optimal control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(9), 1100-1102.
16. Denardo, E.V. (1967) Contractions mappings in the theory underlying dynamic programming. *SIAM Review*, 9, 156-177.
17. Bbouksa, E., Haurie, A., and Van Delft, C. (1991) A turnpike improvement algorithm for piecewise deterministic control. *Optimal Control Applications and Methods*, 12, 1-18.
18. Danzig, G. (1995) Linear programming under uncertainty. Management Science, 1, 197-206.
19. George, V. and Mohsem E. (2000) The use of flowlines to simplify routing complexity in two-stage flowshops. *IIE Transactions*, 32, 678-699.
20. Prabhu, V. (2000) Performance of real-time distributed arrival time control in hierarchical manufacturing systems. IIE Transactions, 32, 323-331.
21. Kouvelis, P., Daniel, L. and George, V. (2000) Robust scheduling of a two-machine flow shop with uncertain processing times. *IIE Transactions*, 32, 421-432.
22. Hillier S.M (2000) characterizing the optimal allocation of storage space in production line systems with variable processing times. *IIE Transactions*, 32, 1-8.
23. Brige J.R. and Louveauxn, F. (1997) *Introduction to Stochastic Programming*. Spinger-verlag, New York, pp, 84-152.
24. Mital, K.V. (1984) *Optimization Theory and Applications,* Willey Eastern Limited, New Delhi, pp, 573- 631.
25. Caramanis, E. and Haurie, A. (1990) Manufacturing flow control and preventive maintenance: a stochastic control approach. *IEEE Transactions of Automatic Control*, 35(9), 1024-1031.
26. Corroll, D.C. (1956) *Heuristic sequencing of single and multiple component jobs*. Unpublished Ph.D. thesis, MIT, Cambridge Ma.