

DÜZLEM-İÇİ YÜKLENMİŞ BASİT DESTEKLİ SİMETRİK KATMANLI DİK DÖRTGEN KOMPOZİT İNCE PLAKLARIN BURKULMA VE TİTREŞİMİ

Metin AYDOĞDU, Taner TIMARCI

Trakya Üniversitesi, Mühendislik- Mimarlık Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 22030 EDİRNE
Tel: 0284 2251395 Fax: 0284 2126067, e-mail: metina@trakya.edu.tr

Alınış : 21.10.2003
Kabul ediliş : 29.03.2004

Özet: Bu çalışmada, tek eksenli düzlem-içi üniform yükler etkisindeki tüm kenarları basit destekli simetrik açılı-katmanlı kompozit plakların titreşim frekansları verilmiştir. Düzlem-içi yükler incelenen plakların kritik burkulma yüklerinin belirli oranları olarak seçilmiştir. Basit destekli açılı-katmanlı kompozit plakların burkulma ve titreşim problemlerine analitik bir çözüm bulmak mümkün olmadığından, problemin çözümünde yer değiştirme bileşeninin trigonometrik olarak seçildiği Ritz yöntemi kullanılmıştır. Sonuçların doğruluğunu göstermek amacıyla yakınsama çalışmaları verilmiştir. Elyaf yönlenme açısı, katman sayısı, kenar oranları ve farklı malzemelerin düzlem-içi yüklü kompozit plakların titreşimi üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Açılı-katmanlı Kompozit Plak, Burkulma, Klasik Plak Teorisi, Ritz yöntemi, Titreşim.

Buckling and Vibration of In-Plane Loaded Simply Supported Symmetrically Laminated Rectangular Thin Composite Plates

Abstract: In this study, accurate numerical results are presented for the vibration frequencies of uniform uniaxially in-plane loaded simply supported, rectangular, angle-ply laminated plates. In-plane loads are chosen as certain ratios of the critical buckling loads of the plates investigated. The Ritz method, along with the displacement component assumed in the form of a double sine series, is applied in order to solve the vibration and buckling problems of angle-ply laminated plates, which can not be solved analytically. Convergence studies are presented to demonstrate the accuracies of the results and the effects of fiber orientation angle, side ratios and different materials on the frequencies of in-plane loaded composite plates are investigated.

Key words: Angle-ply Laminated Composite Plate, Buckling, Classical Plate Theory, Ritz Method, Vibration.

SEMBOLLER DİZİNİ

a, b	: x, y yönlerindeki plak boyutları
C_{mn}	: Yer değiştirme bileşeninin seri açılımındaki belirsiz sabitler
D_{ij}	: Eğilme rijitlikleri
D_0	: Referans rijitliği
E_1, E_2	: Kompozit katmanın elastik sabitleri
E/E, G/E	: E-glass/Epoxy ve Grafit/ Epoxy malzemesi
G_{12}	: Kompozit katmanın düzlem-içi kayma modülü
h	: Plakın kalınlığı

\bar{Q}_{ij}	: Dönüşmüş indirgenmiş katılık matrisi elemanları
T, V	: Kinetik ve toplam potansiyel enerji
u, v, w	: x,y, z yönlerinde orta düzlemin yerdeğiştirme bileşenleri
U, V, W	: x,y, z yönlerinde, plağın yerdeğiştirme alanı bileşenleri
V_e	: Eğilme birim şekil değiştirme enerjisi
V_L	: Dış yükleme potansiyel enerjisi
η	: Düzlem-içi yük faktörü
$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$: Birim şekil değiştirme bileşenleri
λ_b, λ_{kr}	: Boyutsuz burkulma yükü parametreleri
ν_{12}, ν_{21}	: Poisson oranları
ω, Ω_f	: Dairesel frekans ve (f : dış-yüklü iken) boyutsuz frekans parametresi
$\sigma_{xy}, \sigma_{xy}, \tau_{xy}$: Gerilme bileşenleri
θ	: Elyaf yönlenme açısı

Giriş

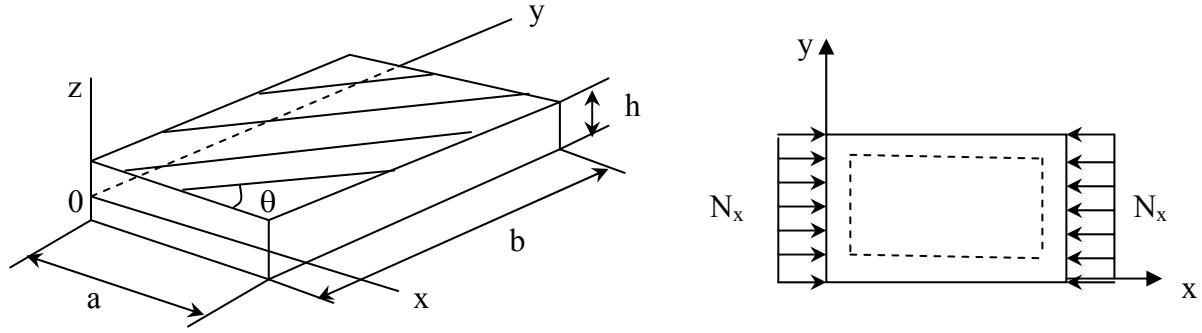
Pek çok mühendislik uygulamasında yapı elemanı olarak kullanılan kompozit plakların burkulma ve titreşim problemi birçok araştırmacı tarafından incelenmektedir. Kompozit plakların titreşim ve burkulma problemlerinin farklı teoriler temelinde ele alındığı önceki çalışmalar, Noor ve Burton (1989) ve sadece burkulma problemi ile ilgili yapılmış çalışmalar ise Leissa (1987) tarafından incelenmiştir. Narita ve Leissa (1990), beş farklı düzlem-içi yükleme etkisindeki basit destekli simetrik katmanlı kompozit plakların burkulma yüklerini, klasik plak teorisi çerçevesinde, yer değiştirme bileşeninin trigonometrik biçimde varsayıldığı Ritz yöntemini kullanarak elde etmiştir. Aydoğdu ve Timarci (2001), beş-serbestlik-dereceli, birleştirilmiş kayma deformasyonlu bir plak teorisini kullanarak tek-eksenli düzlem-içi yükler etkisindeki basit destekli açılı-katmanlı kompozit plağın burkulma problemini incelemiş ve uyguladıkları Ritz çözüm yönteminde, yine, yer değiştirme bileşenlerini trigonometrik olarak varsaymıştır.

Bazı uygulama alanlarında, düzlem-içi statik yükler etkisindeki plakların titreşim problemini incelemek gerekmektedir. Literatürde düzlem-içi kuvvetler etkisindeki izotrop plakların titreşimi üzerine çalışmalar bulunmasına rağmen (Brunelle ve Robertson, 1976; Dong, 1987; Gorman, 2000; Rao, 2001), düzlem-içi kuvvetler etkisindeki dik- ve açılı-katmanlı kompozit plakların titreşimi ile ilgili yeterli çalışmaya rastlanamamıştır. Düzlem-içi yükler etkisindeki basit destekli simetrik olmayan açılı-katmanlı kompozit plakların titreşimi Fisher ve Ark. (1987) ve dik-katmanlı plakların titreşimi, düşey kayma gerilmelerinin etkileri de göz önüne alınarak, Matsunaga, (2002) tarafından incelenmiştir.

Bu çalışmanın amacı; tüm kenarlarından basit destekli simetrik açılı-katmanlı kompozit plakların düzlem-içi yükler etkisindeki titreşim davranışını incelemektir. İnceleme ince plaklar ile sınırlı tutulacağından, formülasyonda klasik plak teorisinin kullanılmasının yeterli olacağı düşünülmüştür. Düzlem-içi yükler incelenen plakların kritik burkulma yüklerinin belli oranları olarak alınmıştır. Basit destekli açılı-katmanlı kompozit plakların burkulma ve titreşim problemine analitik çözüm bulunamadığından bir yaklaşık yöntem olan Ritz yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemde yer değiştirme bileşeni, yanal koordinatların trigonometrik fonksiyonları biçiminde çift-seri toplam olarak seçilmiştir. Elyaf yönlenme açısı, katman sayısı, kenar oranları ve iki farklı malzemenin düzlem-içi yüklenmiş kompozit plakların titreşimi üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

Problemin Formülasyonu ve Çözüm Yöntemi

Bu çalışmada kullanılan koordinat sistemi ve kompozit plak boyutları Şekil 1'de verilmiştir. Plak tüm kenarlarından basit desteklenmiştir. Kompozit plağın tüm katmanları bir matris malzemesi içine konmuş paralel elyaflardan oluşmaktadır. Elyafın bir katman içindeki doğrultusu θ yönlenme açısı ile belirtilmiştir. Katmanların elyaf doğrultusundaki elastisite modülü E_1 ve buna dik doğrultuda ise E_2 dir.



Şekil 1. Koordinat sistemi, kompozit plak boyutları ve yüklenme biçimi

Klasik plak teorisi kapsamında bir katmandaki gerilme-birim şekil değiştirme ilişkileri global koordinatlar kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir (Gibson, 1994):

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Burada \bar{Q}_{ij} ler dönüştürmüş indirgenmiş katılık matrisi elemanlarıdır. Yer-değiştirme alanı bileşenleri Kirchhoff varsayımları kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U(x, y, z, t) = u(x, y, t) - zw_{,x},$$

$$V(x, y, z, t) = v(x, y, t) - zw_{,y}, \quad (2)$$

$$W(x, y, z, t) = w(x, y, t).$$

burada u , v ve w , plak orta düzleminde sırasıyla x , y ve z yönlerindeki yer değiştirmeleri, U , V ve W ise plak-taki herhangi bir noktanın yer değiştirmesini gösterir.

Kompozit plağın toplam potansiyel enerjisi aşağıdaki gibi verilir.

$$V = V_e + V_L \quad (3)$$

Burada V_e eğilmeden dolayı birim şekil değiştirme potansiyel enerjisi,

$$V_e = \frac{1}{2} \iint_A \left[D_{11} w_{,xx}^2 + 2D_{12} w_{,xx} w_{,yy} + D_{22} w_{,yy}^2 + 4D_{16} w_{,xx} w_{,xy} + 4D_{26} w_{,yy} w_{,xy} + 4D_{66} w_{,xy}^2 \right] dx dy \quad (4)$$

Burada eğilme rijitlikleri (D_{ij}) aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} z^2 dz, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (5)$$

Düzlem-içi dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi ise,

$$V_L = \frac{1}{2} \iint_A \left[N_x w_{,x}^2 \right] dx dy. \quad (6)$$

şekindedir. N_x , plağın kenarlarında x -eksenine paralel olarak etkiyen düzgün yayılı düzlem-içi basma yüklemesidir (Şekil 1).

Titreşim probleminde plağın kinetik enerjisi T ,

$$T = \frac{1}{2} \rho \iint_A w_{,t}^2 dx dy \quad (7)$$

şeklinde. Burada ρ plağın birim alandaki yoğunluğudur. İncelenen problemde basit destekli sınır koşulları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} w = M_x = 0 & \quad , \quad x = 0 \text{ ve } a \text{ 'da} \\ w = M_y = 0 & \quad , \quad y = 0 \text{ ve } b \text{ 'de} \end{aligned} \quad (8)$$

Bununla birlikte, bu çalışmada uygulanacak Ritz yönteminde, yer-değiştirme alanı bileşenleri en azından geometrik sınır şartlarını (burada çökmelere karşılık gelmektedir, $w=0$) sağlayacak şekilde seçilmelidir. Bu nedenle, yer değiştirme bileşeni daha önce Narita ve Leissa (1990) tarafından kullanıldığı gibi, aşağıdaki gibi kabul edilmiştir:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \omega t \quad (9)$$

burada C_{mn} bilinmeyen sabitlerdir. Ritz yöntemi gereği, (9) bileşeninin, (3)-(7) eşitliklerinde kullanılması ile elde edilen, $(T_{\max} - V_{\max})$ enerji fonksiyoneli C_{mn} katsayılarına göre aşağıdaki gibi minimize edilirse [Baharlou ve Leissa (1987), Qatu (1991) ve Narita ve Leissa (1992)];

$$\frac{\partial (T_{\max} - V_{\max})}{C_{mn}} = 0 \quad m = 1, \dots, M; \quad n = 1, \dots, N \quad (10)$$

toplam $M \times N$ adet C_{mn} belirsiz sabitleri cinsinden, lineer homojen bir denklem takımı elde edilir. Bu denklem sistemi aşağıdaki gibi bir özdeğer problemi şeklinde ifade edilir [Baharlou ve Leissa (1987), Qatu (1991) ve Narita ve Leissa (1992)];

$$(\mathbf{K} - \lambda_b \mathbf{G} - \Omega^2 \mathbf{M}) \{\mathbf{C}\} = 0 \quad (11)$$

Burada, \mathbf{K} , katılık; \mathbf{M} , kütle ve \mathbf{G} geometri matrisleridir. \mathbf{K} ve \mathbf{G} matrisleri potansiyel enerji, \mathbf{M} matrisi ise kinetik enerji fonksiyonellerinin bir sonucudur. Bu matris elemanları, ifadelerin büyüklüğünden dolayı, açık olarak burada verilmemiştir. λ_b ve Ω ise, sırasıyla, boyutsuz burkulma yükü ve titreşim frekans parametreleridir. Bu eşitlik kritik burkulma yüklerinin, keyfi olarak 0'dan 1'e kadar arttırılan bir η katsayısı ile çarpılarak elde edilen düzlem-içi basma yükleri etkisindeki kompozit plakların frekans parametrelerini verir. Bu eşitlikte, özel durum olarak, geometri ve kütle matrisleri sıfır olarak alınır, sırasıyla, serbest titreşim frekansı (Ω_f) ve kritik burkulma parametresi (λ_{kr}) elde edilir.

Dış düzlem-içi yükler ile kritik burkulma yükleri arasındaki ilişki aşağıda verildiği gibi sağlanır:

$$N_x = \eta N_{kr}, \quad \eta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1 \quad (12)$$

Burada, $\eta=0$ alınır, yani düzlem-içi kuvvet yok ise, bulunan frekans parametresi serbest titreşim frekansına karşılık gelir. $\eta=1$ alındığında ise, yani düzlem-içi kuvvet kritik burkulma yüküne eşit ise, ilk frekans sıfır olacaktır. Sunulan sonuçlarda bu duruma karşılık gelen sıfır frekanslar belirtilmeyecektir.

Sonuçlar

Sayısal sonuçların elde edilmesinde kullanılan malzemelerin elastik özellikleri Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Kompozit malzeme elastik özellikleri

Malzeme	E_1 [GPa]	E_2 [GPa]	G_{12} [GPa]	ν_{12}	E_1/E_2
E-Glass/Epoxy (E/E)	60.7	24.8	12.0	0.23	2.45
Graphite/Epoxy (G/E)	138	8.96	7.1	0.3	15.4

Yakınsama Çalışması

İlk olarak elde edilen sonuçların hassasiyetini göstermek amacıyla Tablo 1’de verilen malzemeler için yakınsaklık çalışması yapılmıştır. Tek katman ($\theta=30^\circ$) ve beş katmanlı kompozit kare plaklar için, iki farklı yükleme durumunda ($\eta=0, 0.4$) elde edilen yakınsama çalışmaları Tablo 2’de verilmiştir. Çalışmada kullanılan burkulma parametresi λ ve frekans parametresi Ω aşağıdaki gibi boyutsuz olarak seçilmiştir:

$$\lambda = -\frac{N_x a^2}{D_0}, \quad \Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho}{D_0}}$$

$$\text{burada } D_0 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \text{ dir} \quad (13)$$

(8) eşitliğinde verilen serinin üst sınırları $M=N$ olacak biçimde dört farklı şekilde, 6, 8, 10 ve 12 olarak, alındığında sırasıyla 36, 64, 100 ve 144 boyutlarında matrisler elde edilir. 10 terim ve 12 terim için elde edilen sonuçlar arasındaki farkların tüm durumlar için mühendislik uygulaması açısından kabul edilebilir sınırlar içinde kaldığı gözlenmiş, böylelikle, bundan sonra elde edilen tüm sonuçlar $M=10$ terim alınarak bulunmuştur.

Tablo 2. Ω Frekans parametresi için yakınsama çalışması ($\eta=0, \eta=0.4, \theta=30^\circ$)

$\eta=0,$		(E/E)
M×N	θ	($\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta$)
6×6	15.86	16.10
8×8	15.84	16.09
10×10	15.83	16.08
12×12	15.83	16.08
$\eta=0.4$		
6×6	12.32	12.48
8×8	12.29	12.47
10×10	12.28	12.47
12×12	12.27	12.47
$\eta=0$		(G/E)
M×N	θ	($\theta/-\theta/\theta/-\theta/\theta$)
6×6	11.78	13.14
8×8	11.67	13.11
10×10	11.59	13.09
12×12	11.55	13.08
$\eta=0.4$		
6×6	9.27	10.23
8×8	9.12	10.19
10×10	9.03	10.18
12×12	8.97	10.15

Kritik Burkulma Yükleri

Çalışmanın bu bölümünde farklı elyaf yönlenme açılarındaki tek, üç ve beş-katmanlı kare plakların, ayrıca üç-katmanlı ve üç farklı kenar uzunluk oranlarındaki dikdörtgen plakların frekans parametrelerinin bulunmasında kullanılacak olan kritik burkulma yük parametreleri elde edilmiş ve sırasıyla Tablo 3 ve 4’te sunulmuştur. Tablo 3’te verilen sonuçlar daha önce Narita ve Leissa (1990) tarafından bulunan sonuçların hemen hemen aynıdır.

Tablo 3. Kare kompozit plaklar için kritik burkulma yükü parametreleri ve kıyaslama

θ	Tek-katman		Üç-katman		Beş-katman	
	Bu çalışma	Ref.	Bu çalışma	Bu çalışma	Ref.	
E/E						
0°	23.30	23.39	23.30	23.30	23.39	
15°	23.90	23.96	23.97	24.24	24.31	
30°	25.15	25.20	25.37	26.15	26.10	
45°	25.81	25.85	26.10	27.11	27.15	
G/E						
0°	12.86	12.91	12.86	12.86	12.91	
15°	12.58	12.63	12.96	14.17	14.21	
30°	12.38	12.41	13.59	17.08	17.11	
45°	12.32	12.35	14.08	18.63	18.66	
60°	10.97	10.96	12.37	16.50	16.49	
75°	8.43	8.43	8.78	9.93	9.94	
90°	7.42	7.43	7.42	7.42	7.43	

Ref. Narita ve Leissa (1990)

Tablo 4. Üç-katmanlı dikdörtgen kompozit plaklar için kritik burkulma yükü parametreleri

θ	a/b=0.5	a/b=1.5	a/b=2
	E/E		
0°	12.46	51.47	93.57
15°	11.96	54.37	96.16
30°	10.96	60.79	100.9
45°	9.73	61.54	102.2
60°	8.44	56.65	99.16
75°	7.43	51.90	95.21
90°	6.99	49.95	91.79
G/E			
0°	10.43	51.57	93.57
15°	9.54	54.50	96.42
30°	7.29	61.20	101.7
45°	5.16	62.34	103.5
60°	3.55	57.25	100.2
75°	2.32	52.10	95.61
90°	1.82	49.95	91.79

Açılı-Katmanlı Kare Plaklar

Tablo 5 ve 6'da beş farklı yüklemeye için tek, üç ve beş-katmanlı, E/E ve G/E malzemesinin kullanıldığı, kare plakların ($a/b=1$) kritik burkulma yüklerinin farklı orandaki katları etkisinde iken elde edilen boyutsuz frekans parametreleri verilmiştir. Sonuçlar elyaf yönlenme açısı 0°'den 90°'ye kadar 15°'lik artımlarla değiştirilerek elde edilmiştir.

Tablo 5. Simetrik açılı-katmanlı kare kompozit plakların E/E malzemesi ve farklı η değerleri için Ω frekans parametreleri

η	(0^0)	$(0^0/-0^0/0^0)$	$(0^0/-0^0/0^0/-0^0/0^0)$
0	15.16	15.16	15.16
0.2	13.56	13.56	13.56
0.4	11.74	11.74	11.74
0.6	9.59	9.59	9.59
0.8	4.79	6.78	6.78
	(15^0)	$(15^0/-15^0/15^0)$	$(15^0/-15^0/15^0/-15^0/15^0)$
0	15.38	15.40	15.47
0.2	13.77	13.79	13.83
0.4	11.93	11.96	12.02
0.6	9.76	9.73	9.81
0.8	6.93	6.91	6.95
	(30^0)	$(30^0/-30^0/30^0)$	$(30^0/-30^0/30^0/-30^0/30^0)$
0	15.83	15.88	16.09
0.2	14.15	14.21	14.37
0.4	12.28	12.32	12.47
0.6	10.01	10.06	10.16
0.8	7.05	7.13	7.22
	(45^0)	$(45^0/-45^0/45^0)$	$(45^0/-45^0/45^0/-45^0/45^0)$
0	16.06	16.14	16.39
0.2	14.36	14.41	14.64
0.4	12.24	12.49	12.69
0.6	10.16	10.17	10.35
0.8	7.18	7.22	7.35
	(60^0)	$(60^0/-60^0/60^0)$	$(60^0/-60^0/60^0/-60^0/60^0)$
0	15.83	15.88	16.09
0.2	14.15	14.22	14.37
0.4	12.29	12.32	12.47
0.6	10.01	10.07	10.18
0.8	7.05	7.14	7.23
	(75^0)	$(75^0/-75^0/75^0)$	$(75^0/-75^0/75^0/-75^0/75^0)$
0	15.38	15.40	15.47
0.2	13.77	13.79	13.83
0.4	11.93	11.93	12.02
0.6	9.77	9.74	9.81
0.8	6.93	6.91	6.93
	(90^0)	$(90^0/-90^0/90^0)$	$(90^0/-90^0/90^0/-90^0/90^0)$
0	15.16	15.16	15.16
0.2	13.56	13.56	13.56
0.4	11.74	11.74	11.74
0.6	9.59	9.59	9.59
0.8	6.78	6.78	6.78

Tablo 6. Simetrik açılı-katmanlı kare kompozit plakların G/E malzemesi ve farklı η değerleri için Ω frekans parametreleri

η	(0°)	(0°/-0°/0°)	(0°/-0°/0°/-0°/0°)
0	11.26	11.26	11.26
0.2	10.09	10.09	10.09
0.4	8.71	8.71	8.71
0.6	7.14	7.14	7.14
0.8	5.00	5.00	5.00
	(15°)	(15°/-15°/15°)	(15°/-15°/15°/-15°/15°)
0	11.32	11.45	11.87
0.2	10.12	10.22	10.61
0.4	8.77	8.89	9.20
0.6	7.14	7.24	7.50
0.8	5.11	5.17	5.30
	(30°)	(30°/-30°/30°)	(30°/-30°/30°/-30°/30°)
0	11.59	11.99	13.09
0.2	10.42	10.73	11.71
0.4	9.03	9.30	10.18
0.6	7.42	7.59	8.31
0.8	5.24	5.44	5.85
	(45°)	(45°/-45°/45°)	(45°/-45°/45°/-45°/45°)
0	11.83	12.35	13.70
0.2	10.66	11.07	12.25
0.4	9.26	9.62	10.60
0.6	7.64	7.93	8.69
0.8	5.49	5.63	6.16
	(60°)	(60°/-60°/60°)	(60°/-60°/60°/-60°/60°)
0	11.59	11.99	13.10
0.2	10.51	10.87	11.75
0.4	9.33	9.56	10.27
0.6	7.89	8.06	8.47
0.8	6.01	6.09	6.25
	(75°)	(75°/-75°/75°)	(75°/-75°/75°/-75°/75°)
0	11.32	11.45	11.87
0.2	10.52	10.67	10.99
0.4	9.69	9.76	10.08
0.6	8.73	8.81	9.03
0.8	7.63	7.74	7.89
	(90°)	(90°/-90°/90°)	(90°/-90°/90°/-90°/90°)
0	11.26	11.26	11.26
0.2	10.58	10.58	10.58
0.4	9.89	9.89	9.89
0.6	9.11	9.11	9.11
0.8	7.68	7.68	7.68

Açılı-Katmanlı Dikdörtgen Plaklar

Tablo 7’de, açılı-, tek ve üç-katmanlı, E/E malzemesinden yapılmış, üç farklı kenar/kenar oranına sahip ($a/b=0.5, 1.5$ ve 2) kompozit plakların beş farklı yükleme için frekans parametreleri, yalnızca 45° ve 75° elyaf yönelme açıları için verilmiştir. Tablo 8’de sunulan sonuçlar Tablo 7’den farklı olarak G/E malzemesi kullanılarak elde edilmiştir.

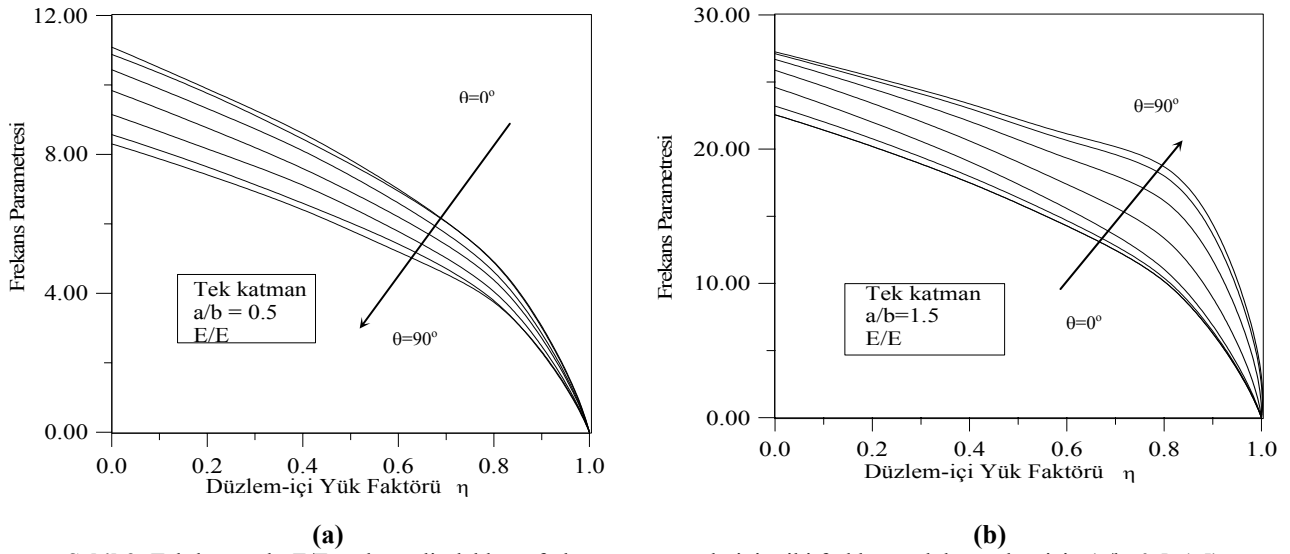
Şekil 2 ve 3'te, sırasıyla, E/E ve G/E malzemesi için, $a/b = 0.5$ ve 1.5 oranlarında tek-katmanlı plakların frekans parametrelerinin elyaf yönlenme açılarına ve düzlem-içi yük faktörlerine bağlı olarak değişimleri grafiksel olarak verilmiştir.

Tablo 7. Simetrik açılı-, tek ve üç-katmanlı dikdörtgen kompozit plakların E/E malzemesi Ω frekans parametreleri

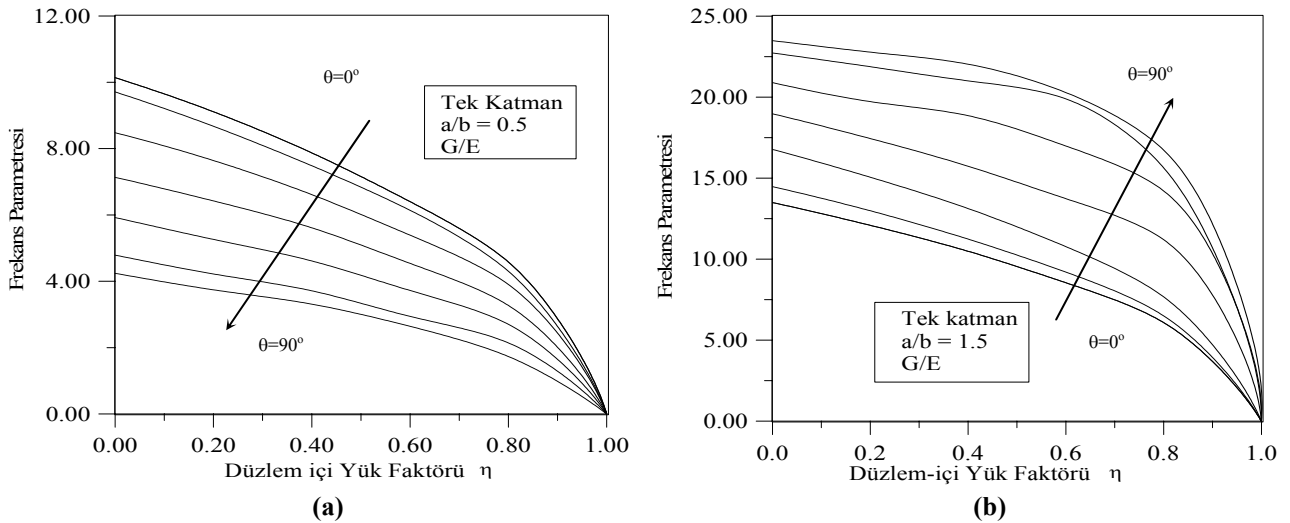
η	a/b=0.5		a/b=1.5		a/b=2	
	tek	üç	tek	üç	Tek	Üç
	(45°)					
0	9.84	9.87	25.88	25.99	39.37	39.49
0.2	8.76	8.78	23.40	23.48	36.70	36.79
0.4	7.59	7.62	20.60	20.66	33.80	33.89
0.6	6.20	6.24	17.38	17.41	30.65	30.69
0.8	4.38	4.35	13.35	13.36	27.10	27.11
	(75°)					
0	8.57	8.57	27.11	27.15	43.69	43.71
0.2	7.64	7.65	25.11	25.17	41.45	41.49
0.4	6.59	6.59	23.01	23.02	39.14	39.15
0.6	5.42	5.42	20.65	20.67	36.66	36.65
0.8	3.79	3.79	17.99	18.00	27.45	27.50

Tablo 8. Simetrik açılı-, tek ve üç-katmanlı dikdörtgen kompozit plakların G/E malzemesi Ω frekans parametreleri

η	a/b=0.5		a/b=1.5		a/b=2	
	tek	üç	tek	üç	Tek	Üç
	(45°)					
0	7.13	7.36	18.97	19.70	28.67	29.58
0.2	6.42	6.61	17.44	18.03	27.00	27.70
0.4	5.61	5.75	15.73	16.14	25.13	25.64
0.6	4.54	4.74	13.73	13.96	23.02	23.34
0.8	3.27	3.42	11.20	11.21	20.16	20.45
	(75°)					
0	4.79	4.84	22.73	22.89	38.89	39.06
0.2	4.22	4.28	21.88	22.03	38.03	38.18
0.4	3.71	3.77	21.01	21.11	37.14	37.26
0.6	2.94	3.03	19.89	20.15	34.72	35.03
0.8	2.14	2.02	15.64	15.84	27.11	27.52



Şekil 2. Tek-katmanlı, E/E malzemeli plakların frekans parametrelerinin, iki farklı uzunluk oranları için ($a/b=0.5, 1.5$) için, düzlem-içi yük faktörüne ve elyaf yönlenme açısına göre değişimi.



Şekil 3. Tek-katmanlı, G/E malzemeli plakların frekans parametrelerinin, iki farklı uzunluk oranları için ($a/b=0.5, 1.5$) için, düzlem-içi yük faktörüne ve elyaf yönlenme açısına göre değişimi.

Tartışma

Kare plakların kritik burkulma yük parametrelerinin en yüksek değerleri, Tablo 3'te verildiği gibi, E/E malzemeli tek-, üç ve beş-katmanlı plaklar için elyaf yönlenme açısı 45° iken oluşmaktadır. G/E malzemesi için ise, üç ve beş-katmanlı plaklarda aynı durum geçerli olmasına rağmen, en yüksek burkulma parametre değerleri tek-katmanlı plaklarda 0° 'de ortaya çıkmaktadır. Ayrıca E/E malzemesi için elde edilen kritik burkulma yük parametrelerinin bu açıya göre simetrik değerler aldığı gözlenmektedir. Düzlem-içi yüklenmiş kare plaklar için elde edilen frekans parametrelerinin sunulduğu Tablo 5 incelendiğinde, bu durumun bir sonucu olarak, E/E malzemesi için, en büyük frekans parametresi değerlerinin, elyaf yönlenme açısı $\theta=45^\circ$ iken elde edildiği ve frekans parametrelerinin, aynı katman sayısı ve düzlem-içi yük faktörü için, $\theta=45^\circ$ 'ye göre simetrik olduğu görülmektedir. Ortotropi derecesinin daha yüksek olduğu G/E malzemesi için ise, Tablo 6'da verilen sonuçlardan görüldüğü gibi, bu durum oluşmamaktadır. Bununla birlikte en büyük frekans parametresi değerlerinin, düzlem-içi yüklenmiş plaklarda, her iki malzeme için de $\theta=45^\circ$ 'de olduğu gözlenir. Ayrıca her iki tablodan aynı

düzlem-içi yük faktörü ve 0° ve 90° dışında kalan tüm elyaf yönlenme açıları için plakların katman sayısı arttırıldıkça frekans parametrelerinin büyüdüğü görülmektedir. Bu gözlemlerden katman sayısının artmasının ve elyaf yönlenme açısının $\theta=45^\circ$ 'ye doğru değiştirilmesi plağın rijitliğini arttırdığı söylenebilir.

Üç farklı kenar/kenar oranlarına sahip, tek ve üç-katmanlı dikdörtgen plakların frekans parametrelerinin düzlem-içi yük faktörüne göre değişimleri, sadece 45° ve 75° elyaf yönlenme açıları için Tablo 7 ve 8'de verilmiştir. Bu tablolardan görüldüğü gibi, katman sayısının üçe çıkarılması frekans parametrelerini çok az arttırmaktadır. Ayrıca her iki malzeme için de düzlem-içi yükün uygulandığı kenar (a) uzunluğu, diğer kenara (b) göre arttırılırsa frekans parametre değerleri de büyümektedir. $a/b=0.5$ iken, 45° açılı plaklar 75° açılı plaklara göre daha büyük frekans parametre değerlerine yol açarken, $a/b=1.5$ ve 2 olduğunda durum tersine dönmektedir. Dikdörtgen plakların frekans parametrelerinin elyaf yönlenme açılarına ve düzlem-içi yük faktörlerine bağlı olarak değişimleri grafikler şeklinde, E/E ve G/E malzemeleri için, sırasıyla, Şekil 2 ve 3'te verilmiştir. Bu grafiklerden görüldüğü gibi, $a/b=0.5$ için, elyaf yönlenme açısı 0° 'den 90° 'ye arttırılırken, aynı düzlem-içi yük faktörleri için, frekans parametreleri azalmakta ve frekans parametresinin en büyük değeri $\theta=0^\circ$ yönlenme açısında oluşmaktadır. Bununla birlikte, daha büyük, diğer iki kenar/kenar oranlarında ($a/b=1.5$ ve 2) en büyük frekans değeri $\theta=90^\circ$ de elde edilmekte ve $\theta=0^\circ$ 'den 90° 'ye geçtikçe frekans parametreleri artmaktadır.

Ayrıca bu grafiklerden, uygulanan düzlem-içi yük, kritik burkulma yükü değerine kadar arttırılırken, frekans parametrelerinin azaldığı ve kritik burkulma yük değerinde, beklendiği gibi sıfır olduğu görülür.

İncelenen tüm durumlar için, düzlem-içi yüklenmiş kompozit plakların frekans parametresi değerlerinin, plağın katman sayısı, elyaf yönlenme açısı, kullanılan malzeme ve kenar/kenar oranlarına bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Bu çalışma, kenarlarında farklı sınır koşullarının uygulandığı daha kalın plaklar için, düşey kayma gerilmelerini de hesaba katan kayma deformasyon teorilerini kullanarak genişletilebilir.

Kaynaklar

- 1 AYDOĞDU M, TIMARCI T. Buckling and vibration analysis of laminated composite plates on the basis of a higher order theory. Proceedings of 2nd European Conference on Computational Mechanics, 26-29 June 2001, Cracow, Poland.
- 2 BAHARLOU B, LEISSA AW. Vibration and buckling of generally laminated composite plates with arbitrary edge conditions. Int. J. Mechanical Sciences 29: 545-555, 1990.
- 3 BRUNELLE EJ, ROBERTSON SR. Vibrations of initially stressed thick plate. Journal of Sound and Vibration, 45: 405-416, 1976.
- 4 DONG JL. Vibration and stability of an initially stressed thick plate according to a higher-order theory. Journal of Sound and Vibration, 113: 425-440, 1987.
- 5 FISHER CA, EWING MS, LEISSA AW. Vibrations of unsymmetrically laminated plates subjected to in-plane initial stresses. Composite Structures Vol.1, Proceedings of the 4th International Conference on Composite structures, 27-29, 1987, Paisley, Scotland.
- 6 GIBSON RF. Principles of Composite Materials Mechanics, McGraw-Hill International Editions, 1994.
- 7 GORMAN DJ. Free vibration and buckling of in-plane loaded plates with rotational elastic edge support. Journal of Sound and Vibration, 229: 755-773, 2000.
- 8 LEISSA AW. A review of laminated composite plate buckling. Applied Mechanics Review. 40: 575-591, 1987.
- 9 MATSUNAGA H. Vibration of cross-ply laminated composite plates subjected to initial in-plane stresses. Thin-Walled Structures, 40: 557-571, 2002.
- 10 NARITA Y, LEISSA AW. Buckling studies for simply supported symmetrically laminated rectangular plates. Int. J. Mechanical Sciences 32: 909-924, 1990.
- 11 NARITA Y, LEISSA AW. Frequencies and mode shapes of cantilevered laminated composite plates. Journal of Sound and Vibration, 154: 161-172, 1992.
- 12 NOOR AK, BURTON WS. Assesment of Shear Deformation Theories for Multilayered Composite Plates. Applied Mechanics Review, 42: 1-13, 1989.
- 13 QATU MS. Free vibration of laminated composite rectangular plates. Int. J. Solids and Structures 28: 941-954, 1991.
- 14 RAO GV. A simple formula to Predict the Fundamental frequency of initially stressed square plates. Journal of Sound and Vibration, 246: 185-189, 2001.