S Ü Fen Ed Fak Fen Derg Sayı 28 (2006) 13- 18, KONYA

Singal Anlamında Hemen Hemen Sürekli Fonksiyonlar*

Aynur YALÇINER[1]

Selçuk Üniv. Fen Edeb. Fak. Matematik Bölümü Kampus KONYA

Özet: Bu derlemede; öncelikle Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyonların önemli özellikleri verilmiştir. Daha sonra ise Singal anlamında hemen sürekli fonksiyonların zayıf sürekli, θ -sürekli ve Husain anlamında hemen hemen sürekli fonksiyonlarla ilişkisi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Singal anlamında hemen hemen süreklilik, zayıf süreklilik, θ-süreklilik, Husain anlamında hemen hemen süreklilik.

Almost Continuous Functions in the Sense of Singal

Abstract: In this review; firstly various properties of almost continuous functions in the sense of Singal were given. Then the relations of such funstions with weakly continuous functions, θ -continuous functions and almost continuous functions in the sense of Husain were given..

Key Words: Almost continuity in the sense of Singal, weakly continuity, θ -continuity, almost continuity in the sense of Husain.

Giriş

Bu bölümde öncelikle Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyonlarla ilgili temel tanım ve teoremler verildi.

Bu çalışmada (X,τ) ve (Y,υ) herhangi topolojik uzayları göstermektedir.

Tanım 1.1. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon ve $x\in X$ olsun. Eğer $f(x)$ noktasının her $V\subset Y$ komşuluğu için, $f(U)\subset V$ olacak şekilde x noktasının bir $U\subset X$ komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x noktasında süreklidir denir [4].

1968 yılında Singal M.K ve Singal A.R [1] tarafından verilen hemen hemen süreklilik tanımını verelim.

Tanım 1.2. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon ve $x\in X$ olsun. Eğer $f(x)$ noktasının her V açık komşuluğu için $f(U)\subset V^{-\circ}$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu varsa f fonksiyonuna x noktasında Singal anlamında hemen hemen süreklidir denir [1].

---

* Bu çalışma yüksek lisans tezinden yapılmıştır.

[1] E-mail: ayalciner@selcuk.edu.tr

Yukarıdaki iki tanımdan da görüleceği gibi, sürekli bir fonksiyon Singal anlamında hemen hemen süreklidir. Fakat Singal anlamında hemen hemen sürekli olan fonksiyon sürekli olmayabilir.

Örnek 1.1. R reel sayılar kümesi üzerinde $\tau=\{R, \varnothing, R-A \ / \ A$ sayılabilir$\}$ topolojisi ve $X=\{a,b\}$ kümesi üzerinde de $\upsilon=\{X, \varnothing, \{a\}\}$ topolojisi verilsin. $f:(R,\tau)\to(X,\upsilon)$ fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases} a \ , & x\in Q \\ b \ , & x\in R-Q \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda f, R uzayının her noktasında Singal anlamında hemen hemen süreklidir, fakat $x\in Q$ için sürekli değildir [1].

Singal M.K ve Singal A.R [1], Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyonun sürekli olması için değer uzayının semi-regüler uzay olması şartını eklemişlerdir.

Tanım 1.3. (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Her $x\in X$ ve x in her U açık komşuluğu için $x\in V\subset V^{-\circ}\subset U$ olacak şekilde bir V açık kümesi varsa X uzayına semi-regüler uzay denir [1].

Regüler uzay aynı zamanda semi-regüler uzaydır. Ancak semi-regüler uzayın regüler uzay olması gerekmez.

Teorem 1.1. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ Singal anlamında hemen hemen sürekli bir fonksiyon ve Y semi- regüler uzay ise f fonksiyonu süreklidir [1].

Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyonlarla ilgili teoremlere geçmeden önce açık fonksiyon ve kapalı fonksiyon tanımlarını verelim.

Tanım 1.4. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer X uzayındaki her açık altkümenin görüntüsü Y uzayında açık ise f fonksiyonuna açık fonksiyon ve X uzayındaki her kapalı altkümenin görüntüsü Y uzayında kapalı ise f fonksiyonuna kapalı fonksiyon denir [3].

Teorem 1.2. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ Singal anlamında hemen hemen sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde her $V\subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V))^{-}\subset f^{-1}(V^{-})$ dir [2].

Lemma 1.1. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ açık fonksiyon olsun. Her $B\subset Y$ alt kümesi için $f^{-1}(B^{-})\subset(f^{-1}(B))^{-}$ dir [2].

Sonuç 1.1. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ Singal anlamında hemen hemen sürekli ve açık fonksiyon olsun. Bu takdirde her $V\subset Y$ açık kümesi için $(f^{-1}(V))^{-}=f^{-1}(V^{-})$ dir [2].

Teorem 1.3. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ örten, açık ve sürekli bir fonksiyon ve $g:(Y,\upsilon)\to(Z,\varphi)$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda $g\circ f:(X,\tau)\to(Z,\varphi)$ fonksiyonunun Singal anlamında hemen hemen sürekli olması için gerek ve yeter şart g fonksiyonunun Singal anlamında hemen hemen sürekli olmasıdır [1].

Teorem 1.4. Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyonların her kısıtlanışı da Singal anlamında hemen hemen süreklidir [1].

Tanım 1.5. (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Her $x,y\in X$ $(x\neq y)$ için $x\in U$, $y\in V$ ve $U\cap V=\varnothing$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri varsa (X,τ) uzayına Hausdorff uzayı denir [4].

Tanım 1.6. (X,τ) ve (Y,υ) topolojik uzayları ve $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. $G(f)=\{(x,f(x)):x\in X\}\subset X\times Y$ alt kümesine f fonksiyonunun grafiği denir [4].

Teorem 1.5. (X,τ) herhangi bir topolojik uzay, (Y,υ) Hausdorff uzayı ve $f,g:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyonlar olsun. Bu takdirde $A=\{x: f(x)=g(x)\}\subset X$ kapalıdır [5].

Teorem 1.6. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyon ve (Y,υ) Hausdorff uzayı olsun. Bu durumda $G(f)$ kapalıdır [5].

Teorem 1.7. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ Singal anlamında hemen hemen sürekli ve örten fonksiyon olsun. X bağlantılı uzay ise $f(X)=Y$ de bağlantılı uzaydır [2].

Tanım 1.7. (X,τ) herhangi bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x\in X$ noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa, X uzayına birinci sayılabilir uzay denir.

Teorem 1.8. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyon, Y Hausdorff uzayı, sayılabilir kompakt uzay ve X uzayı birinci sayılabilir uzay olsun. Bu takdirde f fonksiyonu süreklidir [5].

Ana Sonuçlar

Bu bölümde zayıf süreklilk, θ -süreklilik ve Husain anlamında hemen hemen süreklilik tanımları verilerek Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyonların bu fonksiyonlarla ilişkisi incelenmiştir.

Önce 1961 yılında Levine N. [6] tarafından verilen zayıf süreklilik tanımını verelim.

Tanım 2.1. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ herhangi bir fonksiyon ve $x\in X$ olsun. Eğer $f(x)$ noktasının her V açık komşuluğu için $f(U)\subset V^-$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu varsa f fonksiyonuna x noktasında zayıf süreklidir denir [6].

Singal anlamında hemen hemen sürekli her fonksiyon zayıf süreklidir, fakat zayıf sürekli bir fonksiyonun Singal anlamında hemen hemen sürekli olması gerekmez.

Örnek 2.1. R reel sayılar kümesi üzerinde $\tau=\{R,\varnothing,\ R-A\,/\ A$ sayılabilir} topolojisi ve $X=$\{a,b,c\} kümesi üzerinde $\upsilon=\{X,\varnothing,$\{a\},\{c\},\{a,c\}\} topolojisi olsun. $f:(R,\tau)\to(X,\upsilon)$ fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases} a & , \quad x\in Q \\ b & , \quad x\in R-Q \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu zayıf süreklidir, ancak $x\in Q$ noktasında Singal anlamında hemen hemen sürekli değildir [1].

Singal M.K ve Singal A.R [1], zayıf sürekli açık fonksiyonun Singal anlamında hemen hemen sürekli olduğunu göstermişlerdir.

Teorem 2.1. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu zayıf sürekli ve açık fonksiyon ise f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen süreklidir [1].

Noiri T. [7], zayıf sürekli bir fonksiyonun Singal anlamında hemen hemen sürekli olması için aşağıdaki teoremleri vermiştir. Önce hemen hemen regüler uzay, Urysohn uzayı, hemen hemen açık fonksiyon ve hemen hemen kapalı fonksiyon tanımlarını verelim.

Tanım 2.2. (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Her $x\in X$ noktası ve x noktasını içeren her regüler kapalı A alt kümesi için, $x\in V\subset V^-\subset A^{-\circ}$ olacak şekilde bir V açık kümesi varsa X uzayına hemen hemen regüler uzay denir [7].

Tanım 2.3. (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Her $x,y\in X$ $(x\neq y)$ noktaları için $x\in U, y\in V$ ve $U^-\cap V^-=\varnothing$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri varsa X uzayına Urysohn uzayı denir [1].

Tanım 2.4. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. X uzayındaki her regüler açık alt kümenin görüntüsü Y uzayında açık ise f fonksiyonuna hemen hemen açık fonksiyon denir [1].

Tanım 2.5. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. X uzayındaki her regüler kapalı alt kümenin görüntüsü Y uzayında kapalı ise f fonksiyonuna hemen hemen kapalı fonksiyon denir [1].

Her açık fonksiyon hemen hemen açıktır. Benzer şekilde her kapalı fonksiyon da hemen hemen kapalıdır. Fakat bu gerektirmelerin karşıtları genellikle doğru değildir.

Örnek 2.2. R reel sayılar kümesi üzerinde $\tau=\{R, \varnothing, R-A \mid A$ sayılabilir$\}$ topolojisi verilsin ve U, R üzerinde alışılmış topolojiyi göstersin. $i:(R,\tau)\to(R,U)$ birim fonksiyonu hemen hemen açık ve hemen hemen kapalıdır, ancak ne açık ve ne de kapalıdır [1].

Teorem 2.2. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ zayıf sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer Y hemen hemen regüler uzay ise f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen süreklidir [7].

Teorem 2.3. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ zayıf sürekli ve hemen hemen açık bir fonksiyon olmak üzere X semi-regüler uzay ise f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen süreklidir [7].

Teorem 2.4. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ zayıf sürekli fonksiyon olmak üzere X kompakt uzay ve Y Urysohn uzayı ise f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen süreklidir [7].

Şimdi de θ -süreklilik tanımını vererek, θ -süreklilik ve Singal anlamında hemen hemen süreklilik arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Tanım 2.6. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ herhangi bir fonksiyon ve $x\in X$ olsun. Eğer $f(x)$ noktasının her V açık komşuluğu için $f(U^{-})\subset V^{-}$ olacak şekilde x noktasının bir U açık komşuluğu varsa f fonksiyonuna x noktasında θ -süreklidir denir [1].,

Teorem 2.5. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyon olsun. Bu takdirde f fonksiyonu θ -süreklidir [8].

θ -sürekli bir fonksiyonun Singal anlamında hemen hemen sürekli olması gerekmez.

Örnek 2.3. (R,τ) ve (X,υ) topolojik uzayları Örnek 2.1 deki gibi tanımlansın. Bu durumda $f:(R,\tau)\to(X,\upsilon)$ fonksiyonu θ -süreklidir, fakat Singal anlamında hemen hemen sürekli değildir [9].

Noiri T. [9], θ -sürekli hemen hemen açık bir fonksiyonun Singal anlamında hemen hemen sürekli olduğunu göstermiştir.

Teorem 2.6. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ hemen hemen açık ve θ sürekli bir fonksiyon ise f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen süreklidir [9].

Ayrıca Noiri T. [7], θ -sürekli bir fonksiyonun Singal anlamında hemen hemen sürekli olması için tanım ve değer uzayına bazı şartlar eklemiştir.

Tanım 2.7. Herhangi bir X uzayının her açık örtüsü, kapanışı X uzayını örten sonlu bir alt örtüye sahipse X uzayına hemen hemen kompakt denir [1].

Teorem 2.7. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ θ -sürekli ve örten fonksiyon, X hemen hemen kompakt uzay ve Y Urysohn uzayı ise f fonksiyonu Singal anlamında hemen hemen süreklidir [7].

Diğer taraftan Husain T.[1] tarafından verilen hemen hemen süreklilik tanımı aşağıdaki gibidir:

Tanım 2.8. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ herhangi bir fonksiyon ve $x\in X$ olsun. Eğer $f(x)$ noktasının her V açık komşuluğu için $[f^{-1}(V)]^{-}$, x noktasının bir komşuluğu oluyorsa f fonksiyonuna x noktasında Husain anlamında hemen hemen süreklidir denir [1].

Genel anlamda birbirinden bağımsız olan Husain anlamında hemen hemen süreklilik ile Singal anlamında hemen hemen süreklilik kavramları, Long P.E. ve Carnahan D.A. [2] tarafından fonksiyonun açık fonksiyon alınması ile ilişkilendirilmiştir.

Teorem 2.8. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ açık ve Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyon olsun. Bu takdirde f fonksiyonu Husain anlamında hemen hemen süreklidir [2].

Teorem 2.9. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ Husain anlamında hemen hemen sürekli ve açık fonksiyonun Singal anlamında hemen hemen sürekli fonksiyon olması için gerek ve yeter şart her $V\subset Y$ açık küme için $(f^{-1}(V))^{-}=f^{-1}(V^{-})$ olmasıdır [2].

Noiri T. [7], zayıf süreklilik, θ -süreklilik ve Singal anlamında hemen hemen süreklilik kavramları arasındaki denklikleri ifade eden aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

Sonuç 2.1. $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin ve Y hemen hemen regüler uzay olsun. Bu takdirde aşağıdakiler eşdeğerdir:

(i) f zayıf süreklidir,

(ii) f θ -süreklidir,

(iii) f Singal anlamında hemen hemen süreklidir [7].

Kaynaklar

1. Singal, M. K., Singal, A. R. "Almost continious mappings", Yokohama Math. J., 16, pp.63-73, (1968).
2. Long, P. E., Carnahan, D. A. "Comparing almost continuous functions", Proc. Amer. Math. Soc., 38, no. 2, pp.413-418, (1973).
3. Kelley, J. L. "General Topology", D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto, (1955).
4. Yüksel Ş. "Genel Topoloji", Selçuk Üniversitesi Yayınları, Konya, (1995).
5. Long, P. E., Herrington, L. L. "Properties of almost continuous functions", Boll. Un. Mat. Ital. (4) 10, pp.336-342, (1974).
6. Levine, N., "A decomposition of continuity in topological spaces", Amer. Math. Monthly, pp. 44-46, (1961).
7. Noiri, T., "Between continuity and weak continuity", Boll. Un. Mat. Ital. (4) 9, pp. 647-654, (1974).
8. Saleh, M., "Almost continuity implies closure continuity", Glasgow Math. J. 40, pp. 263-264, (1998).
9. Noiri, T., "Almost continuity and some separation axioms", Glas. Mat.Ser. III 9 (29), no 1, pp.131-135, (1974).