Hölder Eşitsizliğiyle Tabakalı Tesadüfi Örneklemede En Uygun Paylaştırma

Mustafa SEMİZ[1] - Aşır GENÇ[2] - Aslıhan ALHAN[3]

Özet: Bilindiği gibi tabakalı tesadüfi örneklemede en uygun paylaştırma yöntemi üç farklı yaklaşımla ele alınır. Bu yöntemler Lagrange Çarpanlar tekniği, doğrusal yada doğrusal-olmayan optimizasyon teknikleri ve eşitsizlikler olarak bilinir. Bu çalışmamızda her zaman kullanılan toplam örnekleme maliyeti fonksiyonunu daha esnek bir fonksiyonla tanımlayarak ve Hölder eşitsizliği ile en uygun paylaştırma için örnek hacmini ve tabaka örnek hacimlerini belirleyen formülleri gösterdik. Görüldüğü gibi bu formüller hesaplama kolaylığı sağlar.

Anahtar kelimeler: Matematiksel Eşitsizlikler, Hölder Eşitsizliği, Tabakalı Tesadüfi Örnekleme, En Uygun Paylaştırma

Optimum Allocation In STRATIFIED Random Sampling Via Hölder's Inequality

Abstract: As known, for optimum allocation in stratified random sampling three approaches are considered. These methods are known as Lagrange multipliers, linear or non-linear optimization and inequalities. In this study, we defined the total sampling cost function by a much more flexible function and show formulas for sample size and the stratum sample sizes determinations. As seen, these formulas provide easy calculations.

Keywords*:* Mathematical Inequalities, Hölder’s Inequalty, Stratified Random Sampling, Optimum Allocation

1. GİRİŞ

Tabakalı tesadüfi örneklemede belirli kısıtlayıcılar altında en uygun örnek hacminin belirlenmesi ve belirlenen örnek hacminin tabakalara uygun olarak dağıtılması problemi bir optimizasyon problemidir. Bu optimizasyon probleminin çözümüne temelde üç yaklaşım vardır. Bu yaklaşımlar Lagrange çarpanları (1), doğrusal yada doğrusal olmayan optimizasyon teknikleri (2)

[1] Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, 06500, Teknikokullar, Ankara, TÜRKİYE
[2] Selçuk Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Konya, TÜRKİYE
[3] Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik A.B.D., 06570, Maltepe, Ankara, TÜRKİYE

ve eşitsizlikler (3) olarak bilinir ve kullanılır. Bu çalışmada daha esnek bir örnekleme maliyet fonksiyonu için Hölder eşitsizliği ile çözüm belirlenecektir.

N hacimli yığını, tabaka hacimleri N_t ve tabaka varyansları S_t^2 olan T tabakaya ayıralım. Klasik toplam örnekleme maliyeti M, sabit örnekleme maliyeti m_0 ve tabaka örnek hacimleri n_t'lerin doğrusal bir fonksiyonu olarak

$$M = m_0 + \sum_{t=1}^{T} m_t n_t \tag{1.1}$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu eşitlikte m_t, t nci tabakadan alınacak bir birimin örnekleme maliyetidir. Amacımız (1.1) eşitliğinde belirtilen maliyet kısıtı altında tabakalı örnek ortalamasının varyansını ($V(\bar{x}_{tb})$) en küçük yapacak örnek hacmini belirlemek ve tabakalara en uygun şekilde dağıtmaktır. Tabakalı örnek ortalamasını $\bar{x}_{tb}$ ile gösterelim ve varyansını daha basit bir formda yazalım.

$$V(\bar{x}_{tb}) = \frac{1}{N^2}\sum_{t=1}^{T}\frac{N_t^2 S_t^2}{n_t} - \frac{1}{N^2}\sum_{t=1}^{T}\frac{N_t^2 S_t^2}{N_t} = V - V_0 \tag{1.2}$$

Burada $V = \sum_{t=1}^{T}\frac{A_t^2 S_t^2}{n_t}$, $V_0 = \sum_{t=1}^{T}\frac{A_t^2 S_t^2}{N_t}$ ve $A_t^2 = \frac{N_t^2}{N^2}$ olarak tanımlanmaktadır. $V(\bar{x}_{tb})$'nın en küçüklenmesi (enk $V(\bar{x}_{tb})$) probleminin (1.1) maliyet kısıtı altındaki Lagrange çözümü klasik çözüm olarak kabul görmüştür ve halen kullanılmaktadır (4), (5), (6). V_0'ın çözümü etkileyecek n_t'lerden bağımsız olması nedeniyle $V(\bar{x}_{tb}) = V - V_0$'ın en küçüklenmesi sadece V'nin en küçüklenmesine denktir. (1.1) örnekleme maliyet kısıtına dayalı klasik örnek hacmi (n) ve paylaştırma çözümü (n_t) sırasıyla aşağıdaki eşitlikler yardımıyla hesaplanır.

$$n = \frac{(M - m_0)\sum_{t=1}^{T} A_t S_t / \sqrt{m_t}}{\sum_{t=1}^{T} A_t S_t \sqrt{m_t}} \tag{1.3}$$

$$n_t = \frac{A_t S_t / \sqrt{m_t}}{\sum_{t=1}^{T} A_t S_t / \sqrt{m_t}}\, n \tag{1.4}$$

2. HÖLDER EŞİTSİZLİĞİ İLE ÇÖZÜM

Daha esnek bir örnekleme maliyet fonksiyonunu

$$M - m_0 = \sum_{t=1}^{T} k_t m_t^{\Delta_t} n_t^{\delta} = k_1 m_1^{\Delta_1} n_1^{\delta} + k_2 m_2^{\Delta_2} n_2^{\delta} + \ldots + k_T m_T^{\Delta_T} n_T^{\delta} \qquad (2.1)$$

formatında $k_t, \Delta_t \quad (t = 1,2,...,T)$ ve δ sabit değerler olmak üzere yazalım. Bu sabit maliyet kısıtlaması altında (1.2) eşitliğindeki tabakalı örnek ortalamasının varyansını en küçük yapacak örnek hacmi (n) ve tabaka örnek hacimlerini (n_t) belirleyecek çözümleri Hölder eşitsizliği (eşitliği) ile belirleyelim.

Hölder eşitsizliği için gerekli şartlar

$$a_1, a_2, ..., a_T, b_1, b_2, ..., b_T \geq 0 \ , \quad p, q \geq 1 \ \text{ ve } \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

$$\left(\sum_{t=1}^{T} a_t^p \right)^{1/p} \left(\sum_{t=1}^{T} b_t^q \right)^{1/q} \geq \sum_{t=1}^{T} a_t b_t \qquad (2.2)$$

formunda yazılır ve (2.3) koşulu ile (2.2) eşitsizliği eşitlik haline dönüşür (7).

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \ldots = \frac{a_T^p}{b_T^q} \qquad (2.3)$$

V varyansına ve sabit maliyet fonksiyonuna bağlı yeni bir

$$f(n_1, n_2, ..., n_T) = \left(\sum_{t=1}^{T} A_t^2 S_t^2 / n_t \right)^{1/p} \left(\sum_{t=1}^{T} k_t m_t^{\Delta_t} n_t^{\delta} \right)^{1/q} \qquad (2.4)$$

fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyonu (2.2) Hölder eşitsizliğine benzeterek

$$a_t^p = \frac{A_t^2 S_t^2}{n_t} \quad \text{(t nci tabakanın varyansa katkısı)}$$

$$b_t^q = k_t m_t^{\Delta_t} n_t^{\delta} \quad \text{(t nci tabakanın anket maliyetine katkısı)}$$

olmak üzere alabileceği alt sınır ile birlikte

$$\left(\sum_{t=1}^{T} A_t^2 S_t^2 / n_t \right)^{1/p} \left(\sum_{t=1}^{T} k_t m_t^{\Delta_t} n_t^{\delta} \right)^{1/q} \geq \sum_{t=1}^{T} A_t^{2/p} S_t^{2/p} k_t^{1/q} m_t^{\Delta_t/q} n_t^{\delta/q - 1/p} \qquad (2.5)$$

formunda tekrar yazalım. Bu eşitsizliğin sağ tarafını $n_t \ (t = 1,2,...,T)$ değerlerinden bağımsız hale getirecek dönüşüm

$$p = \frac{1+\delta}{\delta} \ \text{ ve } \ q = 1 + \delta \qquad (2.6)$$

olacaktır. Bu durumda (2.4)'te tanımlı amaç fonksiyonunun en küçük değeri (2.3) koşulunun

$$\frac{a_t^p}{b_t^q}=\frac{A_t^2 S_t^2}{k_t m_t^{\Delta_t} n_t^{1+\delta}}=\gamma>0 \quad (t=1,2,...,T) \tag{2.7}$$

γ sabit olmak üzere sağlanması halinde eşitsizlik eşitlik haline dönüştürülerek

$$\left(\sum_{t=1}^{T} A_t^2 S_t^2 / n_t\right)^{1/p}\left(\sum_{t=1}^{T} k_t m_t^{\Delta_t} n_t^{\delta}\right)^{1/q}=\sum_{t=1}^{T} A_t^{2/p} S_t^{2/p} k_t^{1/q} m_t^{\Delta_t/q}$$

belirlenir. (2.7) eşitlik koşulundan

$$n_t^{1+\delta}\gamma=\frac{A_t^2 S_t^2}{k_t m_t^{\Delta_t}} \Rightarrow \left(n_t^{1+\delta}\gamma\right)^{1/1+\delta}=\left(A_t^2 S_t^2 k_t^{-1} m_t^{-\Delta_t}\right)^{1/1+\delta} \tag{2.8}$$

ve

$$n_t=\frac{A_t^{2/(1+\delta)} S_t^{2/(1+\delta)} k_t^{-1/(1+\delta)} m_t^{-\Delta_t/(1+\delta)}}{\theta} \quad \text{burada} \quad \theta=\gamma^{1/(1+\delta)} \tag{2.9}$$

olacaktır. (2.9) eşitliği üzerinden toplam alındığında,

$$\theta n=\sum_{t=1}^{T} A_t^{2/(1+\delta)} S_t^{2/(1+\delta)} k_t^{-1/(1+\delta)} m_t^{-\Delta_t/(1+\delta)} \quad , \quad n=\sum_{t=1}^{T} n_t$$

$$\theta=\frac{\sum_{t=1}^{T} A_t^{2/(1+\delta)} S_t^{2/(1+\delta)} k_t^{-1/(1+\delta)} m_t^{-\Delta_t/(1+\delta)}}{n} \tag{2.10}$$

(2.10)'u (2.9) eşitliğinde yerine yazarsak n örnek hacminin paylaştırılması formülü

$$n_t=\frac{A_t^{2/(1+\delta)} S_t^{2/(1+\delta)} k_t^{-1/(1+\delta)} m_t^{-\Delta_t/(1+\delta)}}{\sum_{t=1}^{T} A_t^{2/(1+\delta)} S_t^{2/(1+\delta)} k_t^{-1/(1+\delta)} m_t^{-\Delta_t/(1+\delta)}} n \tag{2.11}$$

elde edilir. (2.11) ve (2.1) eşitliklerini kullanarak basit matematiksel işlemler sonunda örnek hacmi (n) için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$n=\frac{(M-m_0)^{1/\delta}\sum_{t=1}^{T} A_t^{2/(1+\delta)} S_t^{2/(1+\delta)} k_t^{-1/(1+\delta)} m_t^{-\Delta_t/(1+\delta)}}{\left(\sum_{t=1}^{T} A_t^{2\delta/(1+\delta)} S_t^{2\delta/(1+\delta)} k_t^{1/(1+\delta)} m_t^{\Delta_t/(1+\delta)}\right)^{1/\delta}} \tag{2.12}$$

5. SONUÇ

Tabaka maliyetlerinin sık sık değiştiği ve örnekleme maliyeti fonksiyonunun daha karmaşık olduğu durumlarda (1.1) yerine (2.1) maliyet fonksiyonunu kullanabiliriz. Bu maliyet kısıtlaması altında $V(\bar{x}_{tb})$'yi yada V'yi en küçük yapacak örnek hacmi (n) ve tabaka örnek hacimlerini (n_t) hesaplayabileceğimiz (2.12) ve (2.11) formülleri Hölder eşitsizliği ile elde edilmiştir.

$k_t = \Delta_t = 1 \quad (t = 1,2,...,T)$ ve $\delta = 1$ için (2.1) esnek maliyet fonksiyonu (1.1) klasik maliyet fonksiyonuna eşit olur. Bu durumda (2.11) ve (2.12) eşitlikleri (1.4) ve (1.3)'e denk olur.

6. KAYNAKLAR

1. Cochran, W. G., **Sampling Techniques** 3rd ed., John Wiley and Sons Inc., New York, (1977)
2. Khan, M.G.M., Ahsan, M.J. and Jahan, N., "**Compromise Allocation in Multivariate Stratified Sampling: An Integer Solution**" Naval Research Logistics, 44, 69-79 (1997)
3. Csenki, A., "**Optimum allocation in stratified random sampling via Hölder's inequality**" The Statistician, 46, No. 3, 439 – 441 (1997).
4. Yamane, T., **Elementary Sampling Theory**, PRENTICE-HALL, INC., Englwood Cliffs, N. J., (1967)
5. Scheaffer, R.L., Mendenhal, W. and Ott,L., **Elementary Survey Sampling 4th ed.**, PWS-KENT Publishing Company, (1990)
6. Çıngı, H., **Örnekleme Kuramı**, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi Basımevi, Beytepe, (1990)
7. Berger, M. A., **An Introduction to Probability and Stochastic Processes**. New York: Springer, pp. 32, (1993).