Yenileme Süreçleri ve İntegral Denklemler

Halil AYDOĞDU[1], Cemal ATAKAN[1]

Özet: Bu çalışmada, çözüm fonksiyonu bir yenileme sürecinin ortalama değer fonksiyonuna bağlı olan integral denklemleri üzerinde durulmaktadır. Bir yenileme sürecinin varyans fonksiyonu için bir integral denklem elde edilir. Bu integral denklem yardımıyla tanımlanan fonksiyonlar dizisinin varyans fonksiyonuna monoton yakınsamasına bağlı olarak varyans fonksiyonu için bazı sınır fonksiyonları verilir.

Anahtar Kelimeler: **Yenileme süreci, yenileme fonksiyonu, varyans fonksiyonu, yenileme denklemi**

Renewal Processes and Integral Equations

Abstract: *In this study, integral equations are considered such that their solution functions are dependent on the mean value function of a renewal process. Then, an integral equation is given for the variance function of the process. Depending on the monotone convergence of the obtained sequence of the functions with the help of this integral equation, some bounds are found for the variance function of the process.*

Key Words: **Renewal process, renewal function, variance function, renewal equation**

1. GİRİŞ

Bir yenileme süreci, olaylar (yenilemeler) arası geçen zaman süreleri pozitif değerli, bağımsız ve aynı *F* dağılım fonksiyonuna sahip $X_1, X_2, \ldots$ rasgele değişkenleri üzerine kurulu bir sayma sürecidir; yani, $S_0 = 0,\ S_n = X_1 + \ldots + X_n,\ n \geq 1$ ve t anına kadar yapılan yenilemelerin sayısı $N(t) = \text{maks}\{n: S_n \leq t\}$ rasgele değişkeni olmak üzere $\{N(t), t \geq 0\}$ stokastik sürecidir. X_n rasgele değişkeni (n-1).nci yenileme yapıldıktan sonra n.nci yenileme yapılıncaya kadar geçen zaman süresini temsil eder.

$\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme süreci ile ilgili iki önemli fonksiyon,

[1] Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Ýstatistik Bölümü

$$M(t) = E(N(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \le t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) \ , \ t \ge 0 \tag{1}$$

sürecin ortalama değer fonksiyonu (yenileme fonksiyonu) ve

$$V(t) = E(N^2(t)) - M^2(t) = M(t)(1 - M(t)) + 2M * M(t) \ , \ t \ge 0 \tag{2}$$

sürecin varyans fonksiyonudur. Burada $*$ Stieltjes konvolüsyon işlemini göstermek-tedir ve F^{n*}, *F* dağılım fonksiyonunun kendi kendisiyle olan *n* kez Stieltjes konvolüsyonudur [1].

M yenileme fonksiyonu sağdan sürekli ve azalmayandır. $M(\infty) = \infty$ olması dışında dağılım fonksiyonu özelliklerine sahiptir. Fakat, *V* varyans fonksiyonu iki azalmayan fonksiyonun farkı olarak ifade edildiğinden azalmayan bir fonksiyon olmak zorunda değildir. Ayrıca *V* hiçbir zaman azalan bir fonksiyon olamaz.

A bilinmeyen bir fonksiyon ve *F* dağılım fonksiyonu ile bir *a* fonksiyonu bilinmek üzere

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x) \ , \ t \ge 0 \tag{3}$$

integral denklemini gözönüne alalım. Bu integral denklemin çözümü *M* yenileme fonksiyonuna bağlıdır. Bu nedenle (3) tipindeki bir integral denklem yenileme denklemi olarak adlandırılır. Gerçekte, *a* sınırlı bir fonksiyon iken (3) yenileme denkleminin sonlu aralıklar üzerinde sınırlı bir ve yalnız bir *A* çözümü vardır ve bu çözüm olan fonksiyon

$$A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)dM(x) \ , \ t \ge 0 \tag{4}$$

ile verilir [2].

F dağılım fonksiyonu bir *f* olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip ise (3) yenileme denklemi

$$A(t) = a(t) + \int_0^t f(t-x)A(x)dx \ , \ t \ge 0$$

integral denklemine dönüşür. Bu denklem literatürde konvolüsyon çekirdekli lineer ikinci çeşit Volterra integral denklemi olarak bilinir [3].

Birinci yenileme yapılıncaya kadar geçen zaman süresi olan X_1 rasgele değişkeni üzerinden koşullandırma ile

$$\begin{aligned} M(t) &= E(N(t)) \\ &= E[E(N(t) | X_1)] \\ &= \int_0^{\infty} E(N(t) | X_1 = x)dF(x) \end{aligned}$$

olur.

$$E(N(t) | X_1 = x) = \begin{cases} E(1 + N(t-x)) & , \ x \le t \\ 0 & , \ x > t \end{cases} \tag{5}$$

olduğundan *M* yenileme fonksiyonu için

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x)dF(x) \ , \ t \ge 0 \tag{6}$$

yenileme denklemi bulunur [2].

M yenileme fonksiyonu düzgün, üstel, iki parametreli üstel, hiper üstel ve şekil parametresi doğal sayı olan gamma gibi bazı özel dağılımlar için (1) ya da (6) denkleminden analitik olarak elde edilebilir. Örneğin, *F* dağılım fonksiyonu $\alpha = j, j \in N$ ve $\lambda > 0$ parametreli gamma dağılım fonksiyonu ise (6) integral denkleminin çözümü

$$M(t) = \frac{\lambda t}{j} + e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^{j} c_i e^{m_i t} \quad , \ t \geq 0$$

dır [4]. Burada $m_1,...,m_j$ ler $m^j - \lambda^j = 0$ denkleminin kökleri ve $1 \leq i \leq j$ olmak üzere c_i ler

$e^{\lambda t} M(t)\Big|_{t=0} = 0$, $\left.\frac{d(e^{\lambda t} M(t))}{dt}\right|_{t=0} = 0,...,$ $\left.\frac{d^{j-1}(e^{\lambda t} M(t))}{dt^{j-1}}\right|_{t=0} = 0$ şartlarını sağlayan sabitlerdir.

Bu çalışmada bir yenileme sürecinin varyans fonksiyonu için bir integral denklem elde edilir. Bu integral denklem yardımıyla tanımlanan fonksiyonlar dizisinin varyans fonksiyonuna monoton yakınsamasına bağlı olarak varyans fonksiyonu için bazı sınır fonksiyonları verilir.

2. VARYANS FONKSİYONU İÇİN BİR İNTEGRAL DENKLEM

Birinci yenileme yapılıncaya kadar geçen zaman süresi olan X_1 rasgele değişkeni üzerinden koşullandırma ile

$$\begin{aligned} V(t) &= E(N(t) - M(t))^2 \\ &= \int_0^\infty E[(N(t) - M(t))^2 \big| X_1 = x] dF(x) \\ &= M^2(t) - 2M(t) \int_0^\infty E(N(t) \big| X_1 = x) dF(x) + \int_0^\infty E(N^2(t) \big| X_1 = x) dF(x) \end{aligned}$$

olur.

$$E(N^2(t) \big| X_1 = x) = \begin{cases} E(1 + N(t-x))^2 & , \ x \leq t \\ 0 & , \ x > t \end{cases} \tag{7}$$

dır. Bu durumda (5), (6) ve (7) ifadelerinin kullanılmasıyla

$$V(t) = M(t) - M^2(t) + M * F(t) + \int_0^t E(N^2(t-x)) dF(x)$$

bulunur. Yukarıdaki integralin içine $M^2(t-x)$ in eklenip çıkarılmasıyla *V* varyans fonksiyonu için

$$V(t) = M(t) + M * F(t) - M^2(t) + M^2 * F(t) + \int_0^t V(t-x) dF(x) \quad , \ t \geq 0 \tag{8}$$

integral denklemi elde edilir.

(8) integral denklemi bir yenileme denklemidir. Bundan dolayı bu integral denklemin sonlu aralıklar üzerinde bir tek çözümü vardır ve bu çözüm olan fonksiyon aşağıda verilir. (4)'de $A(t) = V(t)$ ve $a(t) = M(t) + M * F(t) - M^2(t) + M^2 * F(t)$ alınarak, $*$ Stieltjes konvolüsyon işleminin bazı matematiksel özelliklerinin ve (6) dan $M(t) = F(t) + M * F(t)$ olduğunun gözönüne alınmasıyla

$$V(t) = M(t) + M * F(t) - M^2(t) + M^2 * F(t) + M * M(t) + M * M * F(t)$$
$$- M * M^2(t) + M * M^2 * F(t)$$
$$= M(t) - M^2(t) + 2M * F(t) + 2M * M * F(t)$$
$$= M(t)(1 - M(t)) + 2M * M(t)$$

dır. Böylelikle, *V* varyans fonksiyonunun (2) ifadesine (8) integral denkleminin çözümüyle de ulaşılmış olur.

V varyans fonksiyonu için (8) integral denklemini ele alalım. *F* mutlak sürekli bir dağılım fonksiyonu olsun. V_1 herhangi bir fonksiyon olmak üzere V_{k+1} fonksiyonu

$$V_{k+1}(t) = M(t) + M * F(t) - M^2(t) + M^2 * F(t) + \int_0^t V_k(t-x)dF(x) \ , \ k = 1,2,... \qquad (9)$$

ile tanımlansın. Bu durumda Xie'nin [5] (3) tipindeki bir yenileme denklemiyle ilgili olarak verdiği sonuçlardan $(V_k)_{k=1,2,...}$ fonksiyonlar dizisi için aşağıdakiler yazılabilir.

Her $t \le T$ için $V_1(t) \le (\ge) V(t) \Rightarrow$ Her $k \ge 1$ ve $t \le T$ için $V_k(t) \le (\ge) V(t)$ (10)

dır. Burada *T* sonsuz olabilir. Ayrıca, V_1 sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $F(t) < 1$ olacak şekildeki her *t* için V_k noktasal olarak *V* varyans fonksiyonuna yakınsar. Her $t \le T$ için $V_1(t) \le (\ge) V_2(t)$ ise V_k nin *V* ye yakınsaklığı monotondur, yani her $k \ge 1$ ve her $t \le T$ için

$$V_1(t) \le V_2(t) \Rightarrow V_1(t) \le V_2(t) \le ... \le V_k(t) \le V_{k+1}(t) \le ... \le V(t) \qquad (11)$$

ve

$$V_1(t) \ge V_2(t) \Rightarrow V_1(t) \ge V_2(t) \ge ... \ge V_k(t) \ge V_{k+1}(t) \ge ... \ge V(t). \qquad (12)$$

3. VARYANS FONKSİYONU İÇİN BAZI SINIRLAR

V varyans fonksiyonu için (2)'de verilen

$$V(t) = M(t)(1 - M(t)) + 2M * M(t) \ , \ t \ge 0$$

ifadesini gözönüne alalım. *M* pozitif değerli ve azalmayan bir fonksiyon olup $0 \le M * M(t) \le M^2(t)$ olacağından varyans fonksiyonu için

$$M(t) - M^2(t) \le V(t) \le M(t) + M^2(t) \ , \ t \ge 0 \qquad (13)$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikten görüldüğü gibi $V(t)$ $M(t)$ nin $M^2(t)$ komşulu-ğunda bulunmaktadır. Yenilemeler arası geçen zaman sürelerinin μ ortalamasına göre küçük *t* değerleri için M^2 fonksiyonu küçük bir değer alacağından *M* ile *V* fonksiyonları birbirlerine yakın değerler alabileceklerdir.

(9)'da $V_1(t) = M(t) - M^2(t)$ alalım.

$$V_2(t) = M(t) + M * F(t) - M^2(t) + M^2 * F(t) + \int_0^t \left[M(t-x) - M^2(t-x) \right] dF(x)$$
$$= M(t) - M^2(t) + 2M * F(t)$$
$$= M(t) - M^2(t) + 2\big(M(t) - F(t)\big)$$

dir. (13) den $V_1(t) \le V(t)$ olup (10) dan $V_2(t) \le V(t)$ olacaktır. $F(t) \le M(t)$ olduğundan $M(t) - M^2(t) + 2(M(t) - F(t)) \ge M(t) - M^2(t)$ dir. Böylece $V(t)$ için $M(t)(1 - M(t)) + 2(M(t) - F(t))$ alt sınırı (13)'de verilen alt sınırdan daha iyidir. Ayrıca bu şekilde devam edecek olursak, (*k*+1).nci adımda

$$V_{k+1}(t) = M(t)(1 - M(t)) + 2(M * \sum_{i=1}^{k} F^{k*})(t)$$

fonksiyonu bulunur. V için bu fonksiyon, (11) ifadesinin gözönüne alınmasıyla daha önceki adımlarda bir öncekine göre daha iyi bir sınır olarak elde edilen alt sınırlardan daha iyi bir alt sınırdır. Bu durum aynı zamanda M fonksiyonunun (1)'de verilen konvolüsyon serisi ifadesinin V fonksiyonunun (2) ifadesinde kullanılmasıyla da görülür.

Her $t \geq 0$ için $0 \leq M * F(t) \leq M(t)F(t)$ olduğundan M yenileme fonksiyonu için (6) yenileme denkleminin kullanılmasıyla

$$F(t) \leq M(t) \leq \frac{F(t)}{1 - F(t)} \quad , \quad t \geq 0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda F dağılım fonksiyonuna bağlı olarak V varyans fonksiyonu için, (13) ve yukarıdaki eşitsizliğin gözönüne alınmasıyla

$$F(t)\left(1 - \frac{F(t)}{(1 - F(t))^2}\right) \leq V(t) \leq \frac{F(t)}{(1 - F(t))^2} \quad , \quad t \geq 0$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizliğin alt sınırı genelde kullanışlı değildir. Özellikle, F dağılımının $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.nci kantilinden büyük veya eşit tüm t değerleri için anlamsızdır.

Teorem 1. Her $t \geq 0$ için:

(i) $F * (M^2 + 2M)(t) \leq M^2(t) \Rightarrow V(t) \leq M(t)$.

(ii) $F * (M^2 + 2M)(t) \geq M^2(t) \Rightarrow V(t) \geq M(t)$.

İspat (i). Kısım 2 den, V varyans fonksiyonu için (8) integral denkleminin çözümü olan fonksiyon, $a(t) = M(t) + M * F(t) - M^2(t) + M^2 * F(t)$ olmak üzere

$$V(t) = a(t) + \int_0^t a(t - x)dM(x) \quad , \quad t \geq 0$$

dır. Her $t \geq 0$ için $F * (M^2 + 2M)(t) \leq M^2(t)$ olduğundan $a(t) \leq F(t)$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} V(t) &= a(t) + \int_0^t a(t - x)dM(x) \\ &\leq F(t) + \int_0^t F(t - x)dM(x) \\ &= M(t) \end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle (i)'nin ispatı tamamlanır. Ayrıca, yukarıdaki eşitsizliklerin yön değiştirmesiyle (ii)'de verilen ifade elde edilir.

$\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme süreci λ oranlı bir Poisson süreci olsun. Bu süreç için

$$M(t) = \lambda t \quad , \quad t \geq 0$$

ve

$$V(t) = \lambda t \quad , \quad t \geq 0$$

dır [2]. $F(t)=1-e^{-\lambda t}$, $t\geq 0$ olup her $t\geq 0$ için $F*(M^2+2M)(t)=M^2(t)$ olduğu kolaylıkla gösterilir. Bu durumda Teorem 1 den, bilinen $V(t)=\lambda t$, $t\geq 0$ ifadesine tekrar ulaşılır.

Teorem 2.

(i) $c\geq 1$ olmak üzere her $t\leq T$ için

$$M(t)\leq \frac{c+1}{2}F(t)\Rightarrow V(t)\leq M(t)\big(c-M(t)\big).$$

(ii) *c* pozitif bir sabit olmak üzere her $t\leq T$ için

$$M(t)\geq \frac{c+1}{2}F(t)\Rightarrow V(t)\geq M(t)\big(c-M(t)\big).$$

(iii) *c* pozitif bir sabit olmak üzere her $t\leq T$ için

$$M(t)\leq \frac{1}{2}F(t)+\frac{c}{2}\overline{F}(t)\Rightarrow V(t)\leq c-M^2(t).$$

İspat (i). $V_1(t)=M(t)\big(c-M(t)\big)$ alalım.

$$V_2(t)=M(t)+M*F(t)-M^2(t)+M^2*F(t)+\int_0^t M(t-x)\big(c-M(t-x)\big)dF(x)$$
$$=cM(t)-M^2(t)+2M(t)-(c+1)F(t).$$

Her $t\leq T$ için $M(t)\leq \dfrac{c+1}{2}F(t)$ olduğundan $2M(t)\leq (c+1)F(t)$ olup

$$V_2(t)\leq cM(t)-M^2(t)$$
$$=V_1(t)$$

dir. Bu durumda (12) den her $t\leq T$ için $V(t)\leq M(t)\big(c-M(t)\big)$ elde edilir. Böylece (i)'nin ispatı tamamlanır. Ayrıca (ii) de yukarıdaki eşitsizliklerin yön değiştirmesiyle kolayca ispatlanır.

(iii). $V_1(t)=c-M^2(t)$ olsun. Her $t\leq T$ için

$$V_2(t)=M(t)+M*F(t)-M^2(t)+M^2*F(t)+\int_0^t V_1(t-x)dF(x)$$
$$=2M(t)-F(t)+cF(t)-M^2(t)$$
$$\leq F(t)+c\overline{F}(t)-F(t)+cF(t)-M^2(t)$$
$$=c-M^2(t)$$
$$=V_1(t)$$

bulunur. Böylece (12)'den ispat tamamlanır.

Her $t\leq T$ için $\dfrac{c+1}{2}F(t)\leq M(t)\leq \dfrac{d+1}{2}F(t)$ olacak biçimde *c* ve *d* sabitleri varsa Teorem 2 (i) ve (ii)'den her $t\leq T$ için

$$M(t)\big(c-M(t)\big)\leq V(t)\leq M(t)\big(d-M(t)\big)$$

dir. Dikkat edilirse Teorem 2'nin (ii) şıkkında $c\leq 1$ olmak üzere $M(t)\geq \dfrac{c+1}{2}F(t)$ şartı her $t\geq 0$ için sağlanmaktadır. Özel olarak *c*=1 alınırsa daha önce elde edilen her $t\geq 0$ için

$V(t) \geq M(t) - M^2(t)$ eşitsizliğine tekrar ulaşılır. Ayrıca Teorem 2'nin (i) şıkkının ispatını gözönüne aldığımızda $V_1(t) = M(t)(c - M(t))$ ve $V_2(t) = (c+2)M(t) - (c+1)F(t) - M^2(t)$ olmak üzere (i)'deki hipotez altında $V_2(t) \leq V_1(t)$ dir. (12)'den $V(t) \leq V_2(t) \leq V_1(t)$ olduğundan $(c+2)M(t) - (c+1)F(t) - M^2(t)$ üst sınırı $M(t)(c - M(t))$ üst sınırından daha iyidir. Benzer olarak (ii) şıkkında da aynı şeyler geçerlidir. (12)'den dolayı $2M(t) + (c-1)F(t) - M^2(t)$ fonksiyonu *V*(*t*) için (iii)'de verilen $c - M^2(t)$ sınırından daha iyidir. Özel olarak $c = 1$ alınırsa, her $t \leq T$ için *M*(*t*)$\leq$1/2 ise *V*(*t*)$\leq$2*M*(*t*)- $M^2(t)$ dir. Gerçekte, (11) ve (12) ifadelerinin yardımıyla her defasında daha iyi bir sınır elde edilebilir. Fakat, bu sınırlar iyileştikçe karmaşıklaşmaktadırlar.

KAYNAKLAR

1. Grimmett, G. R. and Stirzaker, D. R., Probability and Random Processes. Oxford University Press Inc., New York, (1992).
2. Karlin, S. and Taylor, H. M., A First Course in Stochastic Processes. Second edition. Academic Press. New York, (1975).
3. Moiseiwitsch, B. L., Integral Equations. Longman Group Limited, New York, (1977).
4. Aydoğdu, H., Yenileme Süreçlerinde İntegral Denklemler. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (1990).
5. Xie, M., “Some results on the renewal equations.” Commun. Statist. Theory Meth. 18(3), 1159-1171, (1989).