S.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi Sayı 18 (2001) 33-38, KONYA

Zamana Bağlı Gözlem Serilerinin Tarihsel Başlangıcı ve Buys Ballot'un İncelemeleri

Hasan KÖSE[1] Mehmet GÜRCAN[2]

Özet *:Bu çalışmada zaman serisi analizinin tarih içerisinde ilk matematiksel başlangıcını ve gelişimini inceleyerek Buys Ballot'un bu konuyla ilgili yaptığı araştırmalara yer verildi. Buys Ballot, meteorolojik gözlemlere dayalı gözlem serilerin, farklı periyodik dizilerinin toplamları şeklinde yazılabileceği ve bu sayede ileriye dönük tahminlerin yapılabileceğini göstermiştir.*

Bu inceleme Buys Ballot'un anısına ithafen hazırlanmış olup, Onun zaman içerisinde unutulmaya yüz tutmuş araştırmalarını günümüz bilimine yeniden hatırlatma gayretinin bir ürünüdür.

Anahtar Kelimeler: **Zaman serisi, periyodik diziler, matris formu**

The Historical Beginnigs of the Observation Series Dependent on Time and Buys Ballot's researchs

Abstract*: In this study we analyzed the development of time series from the beginning up to now in view of mathematical aspects. Buys Ballot proved that the time series based on the meteorological observations can be expressed as a sum of two different periodic sequences. Then it can be available to make estimations for the future.*

By gathering all studies of Buys Ballot's on this subject we discussed his approach and we expect that this would greatly we dedicate this study to the memorial of Buys Ballot

Key Words: **Time series, periodic sequence, matrix form**

1. Giriş

Tarih boyunca insanlar doğadaki çeşitli olayları gözlemiş ve buradaki bir takım düzenli davranışların farkına varmışlardır. Düzenli davranışlara dayalı bazı sonuçları formüle ederek birtakım değişkenlerle çeşitli kanunlar elde etmişlerdir. Bir doğa olayının zamana bağlı olarak hangi sıklıkta tekrarlanacağı merakı araştırmacıları zamana göre sıralanmış gözlemler topluluğunu incelemeye sevk etmiştir. Bu aşamada ilk ve kaba olarak bir zaman serisi analizi ortaya çıkmıştır. Tarih içerisinde böyle bir olgunun doğal olarak takvim ve saatin keşfinden sonra olması

[1] Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü KONYA

[2] Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü SAMSUN

beklenirken, bu analiz olgusunu sezinleyen bir sonucu olarak takvim ve saati ortaya koymuştur. Bu açıdan bakıldığında, zaman serisi analizi fikrinin tarihin hangi safhasında ilk ortaya çıktığını belirlemek oldukça zordur.

Bununla birlikte ilk zaman serisi analizine 17. ve 18. yüzyıllarda gökbilimcilerin araştırmalarında rastlanmaktadır. Ay ve güneşin konumlarının belirlenmesinde, diğer gezegenlerin yörüngelerinin çizilmesinde önceki kayıtların daha sonraki çağdaş gözlemlerle karşılaştırılması ve arada istikrarlı bir değişim olduğunun farkına varılmasının önemli bir etkisi olmuştur. Gezegenlerin periyodik hareketlerinin incelenmesi ve bu periyodun ortaya çıkartılması Laplace , Euler ve Lagrange gibi en iyi matematikçilerin çalışmalarıyla olmuştur. Özellikle Laplace, Jüpiter ve Satürn gezegenlerinin hareketlerinin incelenmesinde gökbilimcilerin eski kayıtlarındaki gözlem serisini analiz ederek gezegen hareketinde var olmayan bir periyodikliğin gerçekte var olması gereken fakat gözlem serisinde bulunmayan, çeşitli hatalardan dolayı gözlenememiş noktaların eksikliğinden dolayı belirlenemediğini ortaya koymuş ve bu gezegenlerin 900 yılın üzerinde bir periyodik değişime sahip olduklarını ispatlamıştır. Böylelikle zamanla yenilenen bir doğa olayında periyodik hareketlerine ilaveten, seculer, sıradışı hareketlerin de olabileceği fark edilmiştir.

Bu noktada bir gözlem serisinin farklı gözlenmemiş noktalardan oluşması fikri ortaya çıkmıştır. Zamana bağlı gözlem serisine has bir özellik peşpeşe gelen gözlemlerin genellikle birbiri ile ilişkili olması ve gözlem sırasına göre incelenmesidir. Peşpeşe gelen gözlemler bağımlı olduğundan geçmiş değerlerden faydalanarak gelecek değerleri tahmin etmek mümkündür. Eğer gözlem serisinde tam bir periyodiklik göze çarpıyorsa ileriye yönelik tahminler tam olarak yapılabilecektir. Fakat çoğunlukla gözlem serisinde bu periyodiklik yakalanamadığından eksik gözlemlerin incelenmesi şartı altında ileriye yönelik tahminler yapılabilmektedir. 19. yüzyılın ünlü araştırmacılarından L.W. Gilbert yazmış olduğu Logic for the Million adlı eserinde "Elimizdeki veriler kronolojik doğrular ise belirli doğruların tekrarlanıp tekrarlanmadığını kontrol ederek yeni ve çok önemli doğrular keşfedebiliriz. Olaylarda belirli bir düzgünlük olduğunu fark ettiğimizde bu düzgünlüğe kanun deriz" diyerek bir gözlem serisinde periyodikliği yakalamanın araştırmaya getirdiği üstünlüğü vurgulamıştır.

Eksik noktalardan oluşmuş gözlem serisini ilk olarak çağdaş bir şekilde analiz eden kişi 19. yüzyıl gökbilimcisi Hollandalı Cristoph Hendrik Didericus Buys Ballot (1817-1890) dur. Buys Ballot çalışmaları 1854 den 1890 yılına kadar Royal Netherlands Gökbilim Enstitüsü'nde yönetici olarak sürdürmüş ve Les Changements Periodiques de Temperature adlı kitabında yayınlamıştır. 19. ve 20. yüzyıl araştırmacıları bu çalışmaları yeterince önemsememiş ve taban olarak almamış olduklarından Buys Ballot'un araştırmaları literatürde hak ettiği yeri görmemiş ve yeterince değer bulmamıştır. Burada Buys Ballot'un anısına ithafen onun araştırmalarından küçük bir kısmı devamda vermeye çalışacağız.

1. Buys BALLOT 'un Çalışmaları

Reel sayılardan oluşmuş $\{x_t\}$ t=1,2, ... dizisini alalım. Bu dizinin ilk p elemanı $x_1, x_2, \ldots, x_p$ olmak üzere $r_1, r_2, \ldots, r_p$ sayılarını, seçilen bu p elemanının sıra sayıları olarak tayin edelim. Öyle ki; $1 \le j \le p$ için $r_j = 1$ ise x_j sayısı $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ sayılarının en küçüğü olsun. Böylece alınan her bir $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ sonlu dizisine karşılık $r(x_t : t = 1, 2, \ldots, p) = (r_1, r_2, \ldots, r_p)$ sıra sayıları dizisi elde edilebilir. Şayet $\{x_t\}$ periyodu n olan bir dizi ise her bir $t=1,2,\ldots$ için $x_t = x_{t+n}$ ve $r_t = r_{t+n}$ olacağı açıktır. Bu şartlara bağlı kalarak aşağıdaki teoremleri ifade edelim.

Teorem 1. $\{x_t\}$ periyodu n olan reel sayılar dizisi olsun. Bu durumda dizinin ilk m.n elemanını m×n tipli bir matris formunda yazdığımızda matrisin kolonları toplamı $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ olmak üzere

$$r(x_t : t=1,2,\ldots,n) = r(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

eşitliği doğrudur.

Teoremin ispatı olmaksızın doğruluğu açıktır. Şöyle ki; $\{x_t\}$ dizisini periyodu n olacak şekilde $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1, a_2, \ldots)$ olarak seçelim. Keyfi bir m tamsayısı için m×n tipindeki matris

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}_{m\times n}$$

olup kolonlar toplamı, $y_1 = ma_1$, $y_2 = ma_2$, ... , $y_n = ma_n$ elde edilir. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sonlu dizisinin en küçük elemanı a_j , $1 \le j \le n$ olmak üzere $(ma_1, ma_2, \ldots, am_n)$ dizisinin en küçük elemanı da ma_j olacaktır. Böylece iki dizinin sıra sayıları değişmeyecek yani,

$$r(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ma_1, ma_2, \ldots, am_n)$$

olacaktır.

Teorem 2. $\{x_t\}$ reel sayılar dizisinin periyodu n olsun. $m \equiv 0 \pmod{n}$ olmak üzere dizinin ilk m(n+1) elemanı m×(n+1) matris formunda yazıldığında matrisin kolon toplamları eşittir.

Teorem 1. İçin verilen örneği kullanırsak seçilen dizinin m(n+1) elemanından oluşan matris

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & a_1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}_{m\times(n+1)}$$

şeklinde olup, matrisin herhangi bir kolon toplamı $m = kn$ için daima $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)k$ değerine eşit olur.

Teorem 3. $\{x_t^{(r)}\}$ $r = 1,2,\ldots,k$ için her birinin periyodu n_r olan k-tane periyodik reel sayı dizisi olsun. $z_t = \sum_{r=1}^{k} x_t^{(r)}$ ile $\{z_t\}$ dizisini tanımlayalım. $\{z_t\}$ dizisinin periyodu $okek(n_1, n_2, \ldots, n_k) = n$ olup dizinin ilk $mn_i \equiv 0 \pmod{n}$ olacak şekildeki mn_i elemanını $m \times n_i$ matris formunda yazıldığında Y_j, j-inci kolon elemanlarının toplamı olmak üzere

$$r(Y_j : j = 1,2,\ldots n_j) = r\left(x_t^{(i)} : t = 1,2,\ldots,n_i\right)$$

eşitliği sağlanır.

Yine teoremin ispatını vermeksizin

$(x_t^1) = (1,3,5,7,5,3,1,3,\ldots)$, $(x_t^2) = (6,4,2,4,6,4,\ldots)$, $(x_t^3) = (1,2,2,1,2,2,\ldots)$

dizilerini periyotları sırasıyla 6, 4, 3 olacak şekilde verelim. Buna göre $(z_t) = (8,9,9,9,12,13,9,4,9,13,12,9,9,\ldots)$ periyodu $\text{okek}(6,4,3) = 12$ olarak elde edilir. Böylece $n_1 = 6$ için $m6 \equiv 0 \ (\text{mod}12)$ denkliğini sağlayan m değerini m=4 seçersek elde edilen 4×6 biçimindeki matris

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 12 & 13 & 9 \\ 4 & 9 & 13 & 12 & 9 & 9 \\ 8 & 9 & 9 & 12 & 13 & 9 \\ 4 & 9 & 13 & 12 & 9 & 9 \end{bmatrix}_{4\times 6}$$

şeklinde olup $(Y_j : j = 1,2,\ldots,6) = (24,36,44,48,44,36)$ olarak elde edilir. $n_2 = 4$ için $m4 \equiv 0 \ (\text{mod}12)$ denkliğini sağlayan m değerini m=6 seçersek elde edilen 6×4 biçimindeki matris

$$A_2 = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 & 12 \\ 13 & 9 & 4 & 9 \\ 13 & 12 & 9 & 9 \\ 8 & 9 & 9 & 12 \\ 13 & 9 & 4 & 9 \\ 13 & 12 & 9 & 9 \end{bmatrix}_{6\times 4}$$

şeklinde olup, $(Y_j : j = 1,2,3,4) = (68,60,44,60)$ olarak elde edilir. $n_3 = 3$ için $m3 \equiv 0 \ (\text{mod}12)$ denkliğini sağlayan m değerini m=4 seçersek elde edilen 4×3 biçimindeki matris

$$A_3 = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 9 \\ 12 & 13 & 9 \\ 4 & 9 & 13 \\ 12 & 9 & 9 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

şeklinde olup, $(Y_j : j = 1,2,3) = (36,40,40)$ elde edilir. Bulunan her üç (Y_j) sonlu dizileri için sıra sayıları

$$r\left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_6^1\right),\ r\left(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_4^2\right),\ r\left(x_1^3, x_2^3, x_3^3\right)$$

ile aynıdır.

Buys Ballot'un bu teoremi ancak toplanan periyodik dizilerin periyotları kendi aralarında asal oldukları zaman geçerlidir. Bu teoremden farklı periyodik dizilerin toplamlarının da daima periyodik bir dizi olduğu kolaylıkla görülebilir. Fakat periyodik bir dizi aralarında asal periyodlara sahip iki dizinin toplamı şeklinde yazılabilir mi? Bunu söylemek oldukça zordur. Şöyle ki; toplam dizisini periyodu 6 olacak şekilde $(a_n)=(8,6,5,8,10,\ldots)$ formunda keyfi olarak seçelim. (a_n) dizisinin periyodu 3 ve 2 olan (b_n) ve (c_n) gibi iki dizinin toplamı şeklinde yazmak istediğimizde (b_n) dizisinin sıra sayıları $r(b_n : n=1,2,3)=(2,1,2)$ ve (c_n) dizisinin sıra sayıları $r(c_n : n=1,2)=(1,2)$ olarak elde ederiz. Bu bize her $n=0,1,2,\ldots$ için (b_n) dizisinin $3n+1$ ve $3n+3$ elemanlarının aynı olduğunu, (c_n) dizisinin ise daima $2n+1$ elemanının $2n+2$ elemanından daha küçük olduğunu gösterir. Bu hipotezler altında $(b_n)=(b_1,b_2,b_1,b_2,b_1,\ldots)$, $(c_n)=(c_1,c_2,c_1,c_2,\ldots)$ formunda alınabilir. Burada $b_1>b_2$ ve $c_1<c_2$ sıralaması mevcuttur. Böylece (a_n) toplam dizisi $(b_1+c_1, b_2+c_2, b_1+c_1, b_1+c_1, b_1+c_2, b_2+c_1, b_1+c_2,\ldots)$ şeklinde olmalıdır. Dizinin ilk üç elemanı $b_1+c_1=8$, $b_2+c_2=6$, $b_1+c_1=5$ olacaktır. Buradan görüldüğü gibi 8=5 çelişkisini elde ederiz. Dolayısıyla seçtiğimiz (a_n) dizisi hiçbir zaman periyodları 3 ve 2 olan iki dizinin toplamı şeklinde yazılamaz. Burada gözden kaçırmamamız gerek tek şey (a_n) dizisinin doğal olarak kendisinin ve $(0,0,\cdots)$ dizisinin toplamı olacak şekilde yazılabilmesidir.

Buys Ballot her periyodik sayı dizisi için değil ancak meteorolojik gözlemlere dayalı gözlem serilerinin farklı periyodik dizilerin toplamları şeklinde yazılabileceğine inanmış ve her meteorolojik gözleme dayalı serinin periyodik olabileceğini bu sayede ileriye dönük tahminlerin yapılabileceğini göstermiştir.

Şimdi Teorem 2 'nin biraz daha geneli olan Buys Ballot'un diğer iki teoremini verelim.

Teorem 4. $\{x_t\}$reel sayılar dizisinin periyodu n olsun. r ve c aralarında asal sayılar $r\equiv 0 \pmod{n}$ olmak üzere $\{x_t\}$ dizisinin ilk rc elemanını $r\times c$ biçiminde bir matris formunda yazıldığında matrisin kolon toplamları aynıdır.

Teorem 1 ve Teorem 2 için kullanılan diziyi göz önüne alarak oluşturacağımız $r\times c$ biçimindeki matris, k pozitif tamsayısı için $r=kn$ olmak üzere,

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_c \\ a_{c+1} & a_{c+2} & \cdots & a_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(kn-1)c+1} & a_{(kn-)c+2} & \cdots & a_{knc} \end{bmatrix}_{kn\times c}$$

formunda yazılabilir. Burada her bir $j=1,2,\ldots,c$ için

$$A_j=\sum_{i=0}^{r-1} a_{ic+j}=k(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

eşitliği geçerli olacaktır.

Teorem 5. $\{x_t\}$reel sayılar dizisinin periyodu n olsun. $\{x_t\}$ dizisinin ilk keyfi sayıdaki elemanını m kolonlu bir matris formunda yazdığımızda matrisin herhangi kolonunun j. satırdan $(j+a)$. satıra kadar olan toplamı ile $(j+kn)$. satırdan $(j+kn+a)$. satıra kadar olan toplamı aynı olur.

Teorem 4 için yazdığımız matrisi kullandığımızda herhangi bir kolonu $(a_s, a_{c+s}, \dots, a_{(kn-1)c+s})^t$ olacaktır. Bu kolonun j-inci satırdan $(j+a)$. satıra kadar olan parçalanışı $(a_{(j-1)c+s}, \dots, a_{(j+a-1)c+s})^t$ ve $(j+kn)$. satırdan $(j+kn+a)$. satıra kadar olan parçalanışı $(a_{(j+kn-1)c+s}, \dots, a_{(j+kn+a-1)c+s})^t$ aynı vektörleri verecektir.

Buys Ballot'un çalışmalarındaki meteorolojik gözlem serileri kullanılan metotlarla düzenli periyodik bir hale getirilerek ileriye yönelik tahminler yapılsa da seçilmiş gözlemlerin doğal gözlem yapıları bozulduğundan üzerinde stokastik bir incelemeye gidilemez. Halbuki gözlem serilerinin doğal hallerdeki düzensizlik stokastik açıdan incelemeye yardımcı olduğundan istatistiksel anlamda veriler üzerinde bir yapı kurmayı kolaylaştırır. Analize bu açıdan bakıldığında 20. Yüzyıl araştırmacıları tarafından Buys Ballot'un çalışmaları istatistiksel anlamda değer bulmamıştır. Buna karşılık Buys Ballot'un da çalışmalarında yaptığı tek şey gözlem verilerinin düzensizliklerini aslında stokastik bir özellik olarak görmek ve bunu kendi yöntemleriyle açıklamaya çalışmaktır.

Referanslar

[1] Ballot Buys C.H.D., **Les Changements Périodiques de Température**, Utrecht: Kemink et Fils (1947)

[2] Gilbart J.W., **Logic For the Million, a Familiar Exposition of the Art of Reasoning** London, Bell and Doldy (1865).

[3] Everest R., **On the Famines That Have Devastated India and on the Probability of Their Being Periodical**, Statistical Journal Vol. 6 (1943)

[4] Forbes F.D., **On the Horary Oscillations of the Barometer Near Edinburg, Deduced From 4410 Observatios, With an Inquiry in to the Law of the Geographical Distribution of the Phenomenon**, Edinburg Journal of Science Vol.12 (1832)

[5] Guilbaud, G., **L'étude Statistique des Oscillations Economiques**, Cahiers du Seminaire d'économetrie (1951).