E SAYISI

Yrd. Doç. Dr. Melek DOSAY

e ve π irrasyonel sayıları tarih içinde genellikle ayrı ayrı yollar izlemişler, fakat esas tabiatlarının keşfi, aşkın sayılar olduklarının ispatı hemen hemen aynı zamanlarda gerçekleşmiştir.

e ve π sayıları elips ve hiperbolün alan hesaplarında işe karışmaktalar. Elipsin alanı Tcab'dir; yay ve yayın yatay eksenine dik olarak yay üzerinde bir (x, y) noktasına uzanan kiriş arasında kalan hiperbol alam ise xy-ab log (x / a + v / b)'dir. buradaki logaritma e tabanına göredir, koni denklemleri ise $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ dir. Bu nedenle e ve π sayılarına eliptik ve hiperbolik transandantlar (aşkın sayılar) denmiştir. Gerçekte, π sayısı daima daire ile birlikte çağrışım yapar, çünkü bu sayı ile ilk defa bu özel elipsin incelenmesinde karşılaşılmıştır. Eğer eski Yunanlılar parabol ve elipsin alanlarını bulduktan sonra, hiperbolün alanını da hesaplayabilselerdi, e sayısı da hiperbol ile bağlantılı biçimde ele alınabilirdi. Hiperbolün alanını hesaplama probleminde işe karışan irrasyonellik tabii logaritma icat edilinceye kadar yirmi yüzyıl matematikçiler için problem olmuştur.

Hiç şüphesiz π *ve e* sayılarının her ikisi de başka birçok önemli bağıntıda işe karışmaktadır. Bu sayılar pekâla başka çeşitli yaylarla da ilişkili olarak keşfedilebilirdi. Her iki sayı da normal dağdım eğrisinin alışılmış denkleminde[1] işe karışmaktalar, eğer bu sayılar ilkin bu bağlamda keşfedilseydi, bu yay ile ilişkili kabul edilir ve çok muhtemel olarak olasılık teorisinin iki temel sabiti olarak tanınabilirlerdi. Yine bu bağlamda, bu iki sayıyı adi kompleks sayılar sisteminde reel ve sanal birimlerle birbirine bağlayan $e^{\pi i} = -1$ bağıntısı da dikkati çeken bir noktadır.

π sayısı üç bin yıldan daha uzun bir tarihe sahip olup pek çok matematik tarihçisi tarafından ayrıntılı biçimde incelenmiştir. Sadece üçyüz yıllık bir geçmişi olan e sayısının tarihi seyrini tavsif etmeye yönebk incelemelerin geçmişi ise çok yenidir, e sayısının tarihsel gelişimini üç döneme ayırarak ele almak, bu tarihi yazmayı ve anlamayı kolaylaştırabilir:

I) Hemen hemen bütün XVII. yüzyılı kapsayan birinci dönem boyunca matematik bilimindeki ilerlemeler o kadar süratli olmuştur ki, öncelik meselelerini belirlemek ve bunlara lâyık oldukları önemi tam olarak vermek çok güçtür. Yüzyılın başlarında icat edilen logaritma, yüzyılın ortalarına doğru bulunan diferansiyel ve integral hesap, ve yüzyılın kapanışından hemen önce yapılan dizi çalışmaları e kavramının gelişmesini başlatan ve harekete geçiren kuvvetler olmuştur.

II) XVIII. yüzyılın birinci yarısı olarak alınabilecek ikinci periyod ise, e'nin tam bir sayı olarak varlığının tanınması ve çeşitli biçimlerde onu açıklama gayretleri ile belirlenir. Bu dönemin odak noktası, sadece e'nin gelişimine değil, aynı zamanda analizin bütün branşlarına da katkısı zamanının diğer bütün matematikçilerininkinden daha büyük olan bir kişi üzerinde, yoğunlaşır. Bu dönem boyunca e ve π arasındaki ilişki keşfedilmiştir.

III) XVIII. yüzyılın ortasından XIX. yüzyılın sonlarına kadar uzanan üçüncü periyodda, araştırmalar e'nin tabiatını anlama yönüne çevrilmiştir, ilk defa olarak irrasyonelbk ispatlanmış ve transandant sayıların keşfinden sonra bu sınıfa ait olan ilk sayı kesin olarak kabul edilmiştir. İspatta kullanılan metot π'nin de transandant olduğunun gösterilmesi yolunu açmıştır.

I) Logaritma düşüncesinin temeli aritmetik ve geometrik diziler arasındaki münasebetten çıkmıştır. Aritmetik dizi, terimleri arasında sabit bir fark olan dizidir. Geometrik dizi ise terimleri arasında sabit bir oran bulunan dizidir. XV. yüzyılda Nicolas Chuquet *Triparty* adlı kitabında bu iki dizi arasında bir münasebet göstermiştir. Chuquet logaritma prensibinin farkına varmış fakat bunu daha ileriye götürememiştir. XVI. yüzyıl ortalarında Alman matematikçi Michael Stifel *Arith-\ metica Integra* adlı eserinde bu diziler arasındaki münasebeti toplama vè çarpma özellikleri arasındaki paralelliğe dikkat çekerek ayrıntılı biçimde işlemiştir.

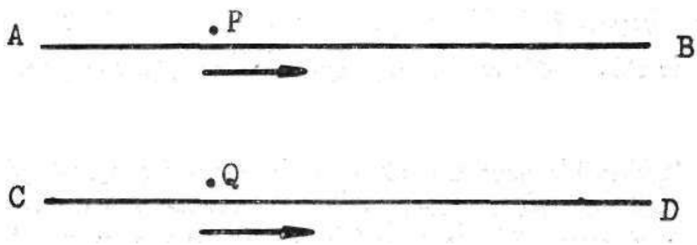
$$\ldots \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \qquad \text{aritmetiksel dizi}$$

$$\ldots \quad \frac{1}{r^4} \quad \frac{1}{r^3} \quad \frac{1}{r^2} \quad \frac{1}{r} \quad 1 \quad r \quad r^2 \quad r^3 \quad r^4 \quad \ldots \qquad \text{geometrik dizi}$$

Yukarıdaki iki diziden geometrik dizinin terimleri arasında yapılacak çarpma ve bölme işlemleri aritmetiksel dizinin terimleri arasındaki toplam ve çıkarma işlemlerine tekabül eder. Örneğin, $1 / r^2$ ile r^3'ü çarparsak, r elde ederiz. Bu terimlerin aritmetiksel dizide tekabülleri olan —2 ve 3'ü toplarsak, r'nin üstünde bulunan 1 sayısını elde ederiz.

Stifel daha da ileri giderek, geometrik dizideki terimlerin üslerinin ve köklerinin aritmetiksel dizideki terimlerin çarpım ve bölümüne tekabül ettiğine işaret etmiştir. Örneğin, r^2'nin kübü r^6 verir, bu da 2 ile 3'ün çarpımının verdiği sayının, yani 6'nın hizasındadır. r^8'in karekökü r^4 verir, bu da 8'in 2'ye bölümü olan 4 sayısının hizasındadır.

1614 yılında İskoçya'lı matematikçi John Napier Latince *Minifici Logarithmorum Canonis Descriptio* adlı eserini yayınladı. Napier'in logaritmaları artan bir aritmetiksel dizi ile azalan bir geometrik dizi münasebeti prensibine dayanarak elde edilmişlerdir. Ancak, Napier hareketli iki noktanın münasebetini düşünerek konuya geometrik açıdan yaklaşmıştır. AB ve CD gibi iki eşit çizgi üzerinde P ve Q noktaları aynı hızla harekete başlasınlar. P noktası bu sabit hızla hareketine devam



etsin, hızının sayısal değeri AB ve CD'nin uzunluğuna eşittir. Q noktası da azalan bir hızla hareketine devanı etsin, hızı sayısal olarak daima QD'ye eşittir. Eğer çok küçük zaman aralıkları düşünürsek, ve bu aralıklar boyunca Q'nun hızının sabit ve aralığın başlangıcındaki hızına eşit olduğunu fara dersek, bu aralıkların başlangıçlarına tekabül eden QD uzunlukları bir geometrik dizi oluşturacaktır. P sabit hızla devam ettiğinden, AP uzunlukları da aritmetiksel dizi oluşturur. Napier'in seçtiği diziler:

Aritmetiksel dizi	Geometrik dizi
0	10 000 000
1	9 999 999
2	9 999 998
3	9 999 997
4	9 999 996

Burada geometrik dizideki sabit oran $1 - \frac{1}{10^7}$ dir. Napier'in geometrik dizinin ilk terimi olarak bu kadar büyük bir sayı seçmesinin nedeni kesirlerden kaçınmak istemesidir. Esasında bu terimler açıların sinüslerini temsil etmektedir.

Napier'in logaritmaları tabii logaritma değildi. Tabii logaritma e tabanına göre olan logaritmadır. Napier'in logaritmaları verilen bir tabanın kuvvetleri cinsinden değil, uzunluklar veya mesafeler arasındaki ilişki vasıtasıyla tanımlanmıştır. Napier'in eseri ingiliz matematikçi Edward Wright tarafından İngilizceye çevrilmiş, bu çeviri 1616 ve 1618 yularında basılmıştır. İkinci edisyonda muhtemelen William Oughtred' in eklemiş olduğu bir logaritma tablosu vardı. Ondalı noktalama noksanı dışında, bu cetvel yayımlanmış ilk tabii logaritma tablosudur. İşte bu yayın e sayısının tarihinin başlama noktasını simgeler. İlk defa bu logaritma düşüncesinde e'yi ifade etme vasıtaları ortaya çıkmıştı. İki yıl sonra (1620) John Speidell de e tabanını kullanarak logaritma cetvellerini yayınladı.

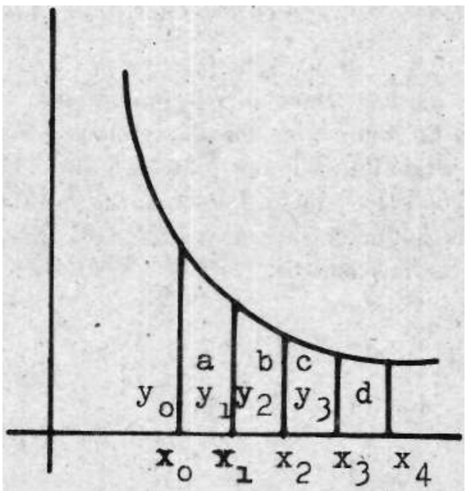
Napier'den bağımsız olarak İsviçreli saat yapımcısı ve Kepler'e asistanlık yapmış olan Joost Bürgi Napier'inkine çok benzer bir logaritma sistemi icat etti. Fakat eserini 1620 yılına kadar yayınlamadı. Bürgi de, Stifel'in bir geometrik dizideki terimlerin çarpım ve bölümünün üslerin toplama ve çıkarılmasıyla yapılabileceğine ilişkin düşüncelerinden yola çıkmıştır. Burada hem aritmetiksel hem geometrik dizi artan dizilerdi.

Aritmetiksel dizi	Geometrik dizi
0	100 000 000
10	100 010 000
20	100 020 001
30	100 030 003
40	100 040 006

Geometrik dizideki sabit oran 1 $\frac{1}{10^4}$ dür. Bürgi'nin yaklaşımı Napier'inkinin tersine cebirseldi. Aynı konuda çalışanlardan Henry Briggs Edinburg'a Napier'i ziyarete gitmiş ve onu, 1'in logaritması sıfır ve 10'un logaritması 1 olursa logaritma tablolarının çok daha faydalı olacağına ikna etmiştir. Briggs 1624'de genel logaritma tablosunu yayınladı, Bugün okullarda öğretilen genel logaritma tabloları bunlardır.

Napier'in çalışması yavaş yavaş yayılmış ve pek çok değişik logaritma cetvelli cebirsel yollardan hesaplanmıştır. Daha sonraları James Gregory, Lord Brouncker, Nicholas Mercator, John Wallis ve Edmund Halley gibi kimseler sonsuz dizileri kullanarak da logaritma hesabı yaptdar,

Belçikalı cizvit Gregory St. Vincent 1647 yılında yayınladığı *Opus Geometricum* adlı kitabında dik hiperbol ile logaritma fonksiyonu arasındaki münasebeti verdi. Tüketme metodunu kullanarak, eğer $y = 1 / x$ eğrisi için a, b, c, d ... alanları eşit olacak biçimde x_i'ler seçilirse, y_i'lerin bir geometrik dizi oluşturacağını gösterdi. Bu, bir aritmetik dizi oluşturan x_0'dan x_1'ye kadarki alanlar toplamının, y_i değerlerinin logaritması ile orantılı olması anlamına gelir. Bugünkü matematik notasyonuyla $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x}$ = klogy biçiminde yazılanilir. Gregory'nin öğrencisi Alfons de Sarasa 1649 yılında yayınladığı *Solutio Problematis a Mersenno Propositi* adlı kitabında bu alanların logaritma olarak yorumlanabileceğini ifade etti. 1665 yılı civarında Newton da hiperbolün altında kalan alan ile logaritma arasındaki ilişkiye işaret etmiştir. Böylece, hiperbolün alan hesabı logaritma hesabı ile özdeşleşti. Bu ilişki yüzünden bu şekilde elde edilen logaritmalara hiperbolik logaritma dendi.



Kalkülün en önemli parçası olarak düşünülen sonsuz dizilerden TC ve e gibi özel nicelikleri, logaritmik ve trigonometrik fonksiyonları hesaplamada da yararlanılmıştır. Newton, Leibniz, James Gregory, Cotes, Euler ve pek çok matematikçi dizilerle bu amaçla ilgilenmişlerdir. James Gregory 1673'de $\mathbf{tgx} = \mathbf{x} + \frac{\chi^3}{3} + \frac{2}{15}\chi^5 + \frac{17}{315}\chi^7 + \ldots,$ ve

$\mathbf{secx} = 1 + \frac{\chi^2}{2} + \frac{5}{24}\chi^4 + \frac{61}{720}\chi^6 + \ldots$ dizilerini elde etti. Leibniz de sinx, cosx, arctgx dizilerini 1674'de elde etmişti. Mercator ve $\mathbf{Newton\ log\ (1+x) = x} = \frac{1}{2}\chi^2 + \frac{1}{3}\chi^3 + \ldots$ dizisini buldu. Newton cebirsel ve transandant fonksiyonlar için pek çok dizi elde etti. James Gregory logaritma hesabında kullandığı $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right) =$

$Z + \frac{1}{3}Z^3 + \frac{1}{5}Z^5 + \ldots$ dizisini elde etti. Bu konularla meşgul olan Bernouilli kardeşlerin ikincisi January John, Leibniz'e yazdığı bir mektupta, bir şeklin alan hesabı ile x^x üssel serisinin ilişkisinden söz etmiş ve xlogx'in seriye açdımmı belirlemiştir. Bu konu dolaylı olarak üsler ve logaritma ile ilgilidir, fakat bu ilişki, Edmund Halley bu fikri geliştirinceye kadar yeterince anlaşılamamıştı.

e sayısının tanınmasından önceki son gelişmeler arasında iki kişinin çalışmalarından da bahsetmek gerekir: Roger Cotes ve William Jones.

Roger Cotes, üssel ve trigonometrik fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi ortaya attı. Cotes'un ölümünden sonra yayınlanan *Harmonia Mensurarum* (1722) adlı kitabı iki kısımdan müteşekkildir. *Logometria* başlığını taşıyan ve ilk defa 1714 yılında *Philosophical Trausactions* (No. 338)' da yayınlanan ilk bölüm, logaritma teorisi ve bunun hiperbole uygulanması üzerine bir incelemedir. Burada

$$e - 1 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ldots}}}}}}}}$$

açılımı vardı.

Ya Cotes'un erken ölümü yüzünden ya da trigonometrik ve üssel fonksiyonlar arasındaki ilişkinin önemini anlamaması yüzünden bugünkü notasyonla yazıldığında i Ø = log (cos Ø + isin Ø) keşfinin izahı Euler'e kalmıştı.

Briggs logaritmayı belirli bir tabana sahip sayıları temsil eden kuvvet üsleri olarak tanımlamasına rağmen, XVII. yüzyıl başlarında logaritma üs olarak tanımlanmıyordu, çünkü kesirli ve irrasyonel üsler kullanılmıyordu. XVII. yüzyıl sonlarına kadar pek çok kişi logaritmanın böyle tanımlanabileceğini anlamış, fakat bu yaklaşımın ilk sistemli izahını 1742'de William Jones, William Gardiner'in Logaritma Cetveline yazdığı önsözde vermiştir. Euler de logaritmayı üs olarak tanımlamıştı, 1728 yılında da tabii logaritma için taban olarak e sayısını ileri sürmüştü.

William Jones, logaritmanın üssel tabiatını açık biçimde anlayan ve herhangi bir sayının bir logaritma sisteminin temeli olarak alınabileceğini gören ilk kimselerden biridir. Synopsis Palmariorum Matheseos (1706) adlı kitabında Halley'in logaritma üzerine olan çalışmasını tartışmış, ve bu eserinden hemen sonra yazdığı bir makalede şu açıklamayı yapmıştır: "Herhangi bir sayı, aynı kök sayının basit kuvveti ile ifade edilebilir." "Kök sayı" ile Jones bugün bizim "taban" ile kastettiğimiz aynı manayı kastetmiştir.

II) XVII. yüzyıl boyunca çeşitli matematikçiler e sayısı kavramının gelişmesine katkıda bulunmuşlardır. Newton ve Leibniz de bu dönemde çalışmalarına rağmen, ikisi de bu konuda önemli kişiler değildir. XVIII. yüzyılın ilk yarısındaki gelişmeler ise bir kişinin, Leonhard Euler'in etrafında toplanır.

1748 yılında Euler, e sayısı ile ilgili yazılmış bütün; eserlerin en dikkate değeri olan Introductio in Analysin Infinitoruni'unu yayınladı. Bu yazı, Euler'in üssel fonksiyon teoreminin iyi bir izahını verir. Euler üssel serileri binom serilerinden daha önce Halley'in kullandığı bir metotla türetti. y= z = $(z^2/2)$ + $(z^3/6)$ + $(z^4/24)$ + ... biçimindeki üssel seride z = 1 olduğunda elde edilecek 1 + (1/1) + (1/1-2) + (1/1.2.3) + (1/1.2.3.4) + ... açılımına ilkin c dedi, daha sonra e ile gösterdi.

25 Kasım 1731 tarihli bir mektubunda şu ifade görülmektedir: "e, hiperbolik logaritması 1 olan sayıyı gösterir." Fakat,.Euler 1727 ya da 1728 gibi erken bir tarihte, 1862'ye kadar basılmayan bir yazmasında e'yi bu aynı sayı için kullanmıştır. Bu sembolün kullanımı Euler ile ilk defa ortaya çıkmıştır, ve bir dizi toplamı olarak ve de hiperbolik

logaritma sisteminin tabanı olarak kesin bir sayının varlığının onun tarafından kabul edildiğini gösterir.

c'nin kullanımı 1740 yılı sonrasına kadar devam etti, fakat 1736 yılında *Mechanic^da* e sayısı sürekli olarak kullanılmaya başlamıştır. Euler'in büyük otoritesi ile kısa süre içinde, özellikle de *Introductio'mın* çıkması ve evrensel kabulünden sonra e genel olarak kullanılmaya başlandı.

Euler'in bu konuda en önemli keşfi 2cosx = e^{lx} + $e\sim^{lx}$ ya da 2 isinx = e^{ix} - $e\sim^{lx}$ olarak ifade edilen üssel ve trigonometrik fonksiyonlar arasındaki ilişkidir. Euler'in John Bernouilli'ye yazdığı bir mektuptan bu keşfin tarihi olarak 1740 yılı tespit edilmiştir. 2cosx ve e^{lx} + e^{-lx}' in her ikisinin de aynı diferensiyel denklemin integralleri (çözümleri) olması gerçeği, Euler'i bunların eşitliğini anlamaya götürmüştür. Euler dizileri kullanarak e'nin yirmiüç basamağa kadar sayısal değerini hesaplamıştır. e^{+klx} = coskx + isinkx bağıntısı da ilkdefa *Introductio'da* görülmüştür.

Euler'in eserinin etkisi öyle büyük olmuş ki, XVIII. yüzyılın ortalarına kadar e kavramı herhangi bir yaklaşık değeri ile bir tutulmaksızın, kesin bir sayı olarak yerleşmişti, fakat transandant (aşkın) tabiatı henüz bilinmiyordu. Trigonometrik fonksiyonlar ve logaritma ile bağıntılarının keşfinden sonra logaritmanın triginometri ve kalkülde sayısız uygulaması olmuştur. Sonuç olarak, e'yi çeşitli temsil etme yolları bulunmuştu. Bu yolların bazıları e, e^x ve $e\sim^x$ dizileridir. Newton binom teoremini kullanarak bu üç diziyi elde etmişti. Bu diziler şöyledir:

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots$$

$$e^x=1+\frac{\chi}{1}+\frac{\chi^2}{2!}+\frac{\chi^3}{3!}+\frac{\chi^4}{4!}+\frac{\chi^5}{5!}+\ldots$$

$$e^{-x}=1-\frac{\chi}{1}+\frac{\chi^2}{2!}+\frac{\chi^3}{3!}+\frac{\chi^4}{4!}+\frac{\chi^5}{5!}+\ldots$$

Euler e^x ve $e\sim^x$ in sonsuz çarpanlar cinsinden kolaylıkla ifade edilebildiği şu iki bağıntıyı da bulmuştur: ,

$$\frac{(e^x+e^{-x})}{2}=(1+Z)\left(1+\frac{Z}{9}\right)\left(1+\frac{Z}{25}\right)\left(1+\frac{Z}{49}\right)\cdots$$

$$\frac{(e^x-e^{-x})}{2} = (1+Z)\left(1+\frac{Z}{4}\right)\left(1+\frac{Z}{9}\right)\left(1+\frac{Z}{16}\right)\left(1+\frac{Z}{25}\right)\cdots$$

Burada $z = (X/\Pi)^2$ dir.

Sürekli kesirleri kullanarak Euler

$\frac{1}{e-1}$, e, $\frac{e-1}{2}$, $\frac{e+1}{e-1}$ $\frac{e^2-1}{2}$, $\sqrt{e}$ açılımlarını elde etmiştir.

Euler'in bu sürekli kesirlerle ilişkili olan aşağıdaki formülünü J.H. Lambert geliştirmiş ve e'nin irrasyonelliğinin ispatında kullanmıştır:

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \cfrac{1}{\cfrac{2}{\chi} + \cfrac{1}{6}} /\chi + 1/10\ /\chi + 1/\ 14/\chi + \ldots$$

Euler'in ilk kullandığı c sembolü D'Alambert ve astronom Upsala'lı Daniel Melandri tarafından da kullanılmıştır. Leibniz Huygens'e yazdığı iki mektupta b harfini kullanmış, ve *Acta Zruditorum*'da bir yazar 1703 yılında a harfini önermiştir. Laplace'm, e kullanımı hemen hemen evrensellik kazandıktan sonra, 1812 gibi geç bir tarihte c harfini kullanması şaşırtıcıdır.

e ve π sayıları çok önemli sayılardı ve pek çok insan ilişkilerine karışmışlardı, bunların başka kavram ya da manalara bağlanmamış, özel sembollerle gösterilmesi zorunluydu. Bu düşünceye, Harvard'da matematik profesörü olan ve sınıflarında kullanmak için icat ettiği *TC* için .. ve e için .. sembolleri genel olarak kabul edilen Benjamin Peirce'in önerisi destek olmuştur. Oğullan CD. Peirce ve J.M. Peirce makalelerinde bu sembolizmi kullandılar, fakat bu semboller sürekli bir kullanım kazanamadı. Bu başarısızlığın nedeni böyle özel sembollerle donatılmış bir matbaanın olmaması olabilir.

e sayısının yüzonüç basamağa kadar değeri 1849'da F.J. Srudnicke tarafından bir makalede verilmiştir. En yakın yaklaşık değeri J.W. Boorman'm *Mathematical Magazinern* 1. cilt, 12. sayısı, s. 204'de (1884) üçyüzkırkaltı basamağa kadar verdiği değerdir.

e ve *Π* sayıları arasındaki yakın ilişki, yani $e^{i\pi} = -1$ bağıntısı nedeniyle, bu sayıların tabiatı üzerindeki araştırmalar birlikte yürütülüyordu. 1744 yılında e'nin ifadeleri olarak sürekli kesirler düşüncesinden Euler z sıfırdan farklı olmak üzere e ve e^z'nin irrasyonel olduklarını anlayan ilk kişi olmuştur, çünkü her rasyonel sayıya tekabül eden yalnızca bir sonlu sürekli kesir bulunduğunu, ve bu yüzden sonsuz bir sürekli kesrin sadece tek bir irrasyonel değere sahip olabileceğini vurgulamıştır.

Eseri doğrudan doğruya Euler'in eserine dayanmasına rağmen, e ve π'nin irrasyonelliğiıııin mükemmel bir ispatının yayını şerefi J.H. Lambert'e aittir. Lambert, $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ için Euler'in (e—1) / 2 için sü-

sürekli kesrini kullanarak bir sürekli kesir geliştirmiştir.

olduğundan, ix/ 2 — z koyarak tgz için bir sürekli kesir değeri elde edip, bu sürekli kesirlerden iki temel teorem ispatlamıştır:

1) Eğer x sıfır olmayan bir rasyonel sayı ise, e^z rasyonel olamaz.

2) Eğer e^z sıfır olmayan bir rasyonel sayı ise, x rasyonel olamaz.

Bu teoremlerin ilkinden e'nin irrasyonelliği ve e'nin (sıfır hariç) bütün rasyonel kuvvetleri çıkar, tg π / 4 = 1 özel durumu için de π nin irrasyonelliği çıkar.

1815'de J.B. Fourier $e=1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$ dizi-

dizisi vasıtasıyla e'nin irrasyonelliğinin basit bir ispatını verdi, e'yi a / b rasyonel sayısı olarak farz etti, denklemin her iki tarafını da b! ile çarptı, ve bütün tam sayılı terimleri sol tarafa geçirdi. Bu durumda sol taraf tam sayı ve sağ taraf 1 / b'den küçük olduğunu ispatladığı bir dizidir. Buradan, $e = \frac{a}{b}$ kabulü saçma olur.

Benzer şekilde Lioville x sıfırdan farklı olmak üzere ne e'nin ne de e^x'in bir rasyonal tam sayılı ikinci derece denkleminin bir kökü olamayacağını ispat etti. Legendre, cebirsel denklemlerin kökü olamayan sayı ların var olabileceğim önermişti, 1844 yılında Liovillè bunun doğru olduğunu ispatlamayı başardı. Cebirsel ve transandant sayılar arasındaki ayırımın bir başka ispatı 1874'de Cantor tarafından yapddı. Cantor, cebirsel sayıların sayılabilir bir dizi oluşturduğunu, ve reel sayıların sürekli dizisinin sayılabilir olmadığını gösterdi.

Cenirsel ve transandant sayılar arasındaki fark kesin olarak gösterilir gösterilmez, e ve π'nin transandant olduğunu ispat etme çabalan başladı. Transandant olduğu ispatlanan ilk sayı e sayısı oldu. Bu ispati 1873 yılında Charles Hermite yaptı. 1882 yılında da F. Lindeman π' nin transandant olduğunu ispatladı.

Hermite ve Lindemann'ın ispatları ilk yayınlanmalarından sonra çok basitleştirilmişlerdir. Genel metot, e'yi bir f (e) = 0 cebirsel denkleminin kökü farz etmek, ve denklemin her tarafı M ile çarpıldığında Mf (e) sıfır olmayan ve bir ve sıfır arasında bir tam sayı toplamına dönünüşecek bir M çarpanının seçilebileceğini göstermektir. Böylece toplam sıfır olamaz, e'nin bir cebirsel denklemin bir kökü olabileceği kabulünün müdafaa edilemez olduğu gösterilmiş olur.

Bu ispatların basitleştirilmesint katkıda bulunanların bazıları Stieltjes, Hilbert, Gordan, Mertens, Klein, ve Vahlendir.

KAYNAKLAR

U.G. Mitchell ve Mary Strain, "The number e", *Osiris,* cilt I, Brüksel 1936, s. 476—496.

Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* New York 1972, s. 437—39, 354.

Graham Flegg, *Numbers.* Penguin Books, 1984, s. 139—145.

D.E. Smith, *History of Mathematics,* cilt II, New York 1958, s. 517.

Dipnotlar

$$1 - y\sqrt{2x} = e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$