Asimptotik Kararlı Otonom Adi Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Kararlılığı Üzerine*

Onur KARAOĞLU

Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 42075, *Konya*

Özet: Bu derleme çalışmasında, bir otonom adi diferensiyel denklemin asimptotik kararlı çözümünün devamı için başlangıç değerindeki sınırlamayı veren kavramlar tartışılmıştır. Bunun için Lyapunov anlamında kararlılık dikkate alınarak kararlılık kalitesini belirten $\kappa(\mathrm{A})$ parametresi yardımıyla global anlamda asimptotik kararlılık için bir örnek üzerinde çözümün çekim bölgesi alt sınırı, kuadratik Lyapunov fonksiyonları kullanılarak hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Otonom adi diferensiyel denklem, Lyapunov kararlılık, çekim bölgesi

On the Asymptotic Stability of Solutions of the Autonomous Ordinary Differential Equations

Abstract: In this study review, the concepts which give the confinement at initial condition for the continuation of the asymptotic stable solution of autonomous ordinary differential equation were discussed. To do this, on a example, by considering stability in the Lyapunov sense and with the help of the $\kappa(\mathrm{A})$ parameter-which indicates the quality of stability- the lower boundary of the solution's attraction region for asymptotic stability in global sense was calculated by using quadratic Lyapunov functions.

Key Words: Autonomous ordinary differential equations, Lyapunov stability, The region of attraction

Giriş

Bir elementin zamana bağlı olarak kimyasal bozunması, yine bir popülasyondaki birey sayısının zamana göre av–avcı ilişkisine dayalı değişimi ya da aynı şekilde bir bakteri kolonisinin zamana göre değişim modelleri gibi diferensiyel denklemlerin genellikle fiziksel bir süreci modellediği bilinmektedir. Diğer yandan bir fenomeni karşılayan modelin tutarlılığı ise kurulan denklemin kendisi olduğu kadar başlangıç değerlerindeki ölçümlerin güvenirliliği ile de alakalıdır. Bu nedenle bir anlamda başlangıç değerindeki küçük değişimlere kurulan modelin vereceği tepki ile bu değişimler sonucu yapılan ölçümler arasındaki fark, modelin tutarlılığını ortaya koyan bir kriter olacaktır. Bu doğrultuda kararlılık teorisine, bir diferensiyel denklemin veya sistemin, başlangıç verilerindeki küçük değişimleri sonucu oluşan çözümlerin eğilimlerine dönük yapılan çalışmaların bütünü gözüyle bakılabilir.

Materyal ve Metot

Öncelikle çözümün karakteri ile ilgili olarak kararlılık tanımlarına değinelim.

$$G=\{(t,x):|t-t_0|\le a,|x-x_0|\le b\}$$

bölgesinde tanımlı ve sürekli, bu bölgede *x*' e göre Lipschitz koşulunu sağlayan bir *f* fonksiyonu için

---

* Bu Derleme Yüksek Lisans tezinden elde edilmiştir.
okaraoglu@yahoo.com

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Cauchy problemi verilsin.

Tanım 1: Her $\varepsilon > 0$' a karşılık (1)' in herhangi bir $\overline{x}(t) = x(t, t_0, \overline{x}_0)$ çözümü için $\|\overline{x}_0 - x_0\| \le \delta$ olduğunda her $t \ge t_0$ için $\|\overline{x}(t) - x(t)\| \le \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise, $x(t)$ çözümüne kararlıdır denir [1].

Tanım 2: Eğer (1)' in $x(t)$ çözümü kararlı ve $\|\overline{x}_0 - x_0\| \le \delta$ için

$$\lim_{t\to\infty} \|\overline{x}(t) - x(t)\| = 0$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, (1)' in $x(t)$ çözümüne asimptotik kararlıdır denir [1].

Tanım 3: (1)' in $x(t)$ çözümü kararlı değilse bu çözüme kararsızdır denir [1].

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \\ &x(t_0) = x_0 \end{aligned} \tag{2}$$

lineer sistemini göz önüne alalım. Böyle bir sistemin çözümünü bulmak her zaman kolay değildir. Ancak aşikar çözümün varlığı hemen göze çarpmaktadır. Bu nedenle *t*' nin artan değerlerinde bu çözümün ne gibi bir eğilime sahip olacağı dolayısıyla çözümün karakterinin ne olacağı gündeme gelmektedir. Bu konuyla ilgili gerekli bazı kavramlara [2]' de yer verilmiş olup burada [3] tarafından belirtilen asimptotik kararlılığın sıfıra yaklaşma hızı hakkında bize bilgi verecek olan *asimptotik kararlılığın kalitesi* ya da *asimptotik kararlılığın şart sayısı* tanımı verilerek bir örnek üzerinde çözüm için bir yaklaşım ortaya konulacaktır.

Tanım 4: Eğer verilen bir *A* matrisi için $A^*H + HA + I = 0$ Lyapunov matris denkleminin pozitif tanımlı bir $H = H^* > 0$ çözümü varsa bu takdirde $\kappa(A) = 2\,\|A\|\,\|H\|$ değerine (2) sisteminin ve dolayısıyla *A* matrisinin *asimptotik kararlılığının kalitesi* veya *asimptotik kararlılığının şart sayısı* denir. Böyle bir *H* matrisi yoksa $\kappa(A) = \infty$ kabul edilir [3].

Bu parametrenin büyük olduğu sistemlerde giriş verilerindeki küçük değişikliklerin parametrenin küçük olduğu sistemlere göre sistemin kararlılığını daha fazla olumsuz yönde etkileyeceğini söyleyebiliriz.

Şimdi çekilen vektör ve çekim bölgesi kavramlarına değinelim.

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = Ay + r(y) \\ &y(0) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

otonom sisteminin Cauchy problemini ele alalım.

Tanım 5: Eğer $y(t)$, $t \geq 0$ vektörü (3) sisteminin bir çözümü ve $t \to \infty$ için $\|y(t)\| \to 0$ ise bu takdirde y_0 vektörüne "0" aşikar çözümü tarafından *çekilen vektör* denir [4].

Tanım 6: "0" aşikar çözümü tarafından çekilen vektörlerin kümesine aşikar çözümün *çekim bölgesi* denir [4].

Bir otonom sistemin $r(0)=0$ ise her zaman "0" aşikar çözümü var olduğundan, (3) sisteminde eğer A asimptotik kararlı ise çözümün daima bir çekim bölgesi vardır.

Şimdi ispatı [4] tarafından verilen aşağıdaki teorem ile lineer olmayan bir otonom sistemin çekim bölgesi için bir yaklaşım sunacağız.

Teorem 3: A asimptotik kararlı bir katsayı matrisi olmak üzere (3) lineer olmayan otonom diferensiyel denklemler sistemi ve α, γ verilen pozitif sayılar olmak üzere $\|r(y)\| \leq \|A\| \gamma^{-\alpha} \|y\|^{(1+\alpha)}$

eşitsizliği verilsin. Bu durumda (3) sisteminin sıfır çözümünün çekim bölgesi $\|y(0)\| < \gamma_0 = \dfrac{\gamma}{(\kappa(A))^{0,5+\frac{1,5}{\alpha}}}$

açık küresini kapsar. Ayrıca, eğer $\|y(0)\| \leq \gamma_0 \delta$, $(0 < \delta < 1)$ ise bu taktirde tüm $t \geq 0$ için $\|y(t)\| \leq \dfrac{\sqrt{\kappa(A)}}{\sqrt[\alpha]{1-\delta^\alpha}} e^{-t\frac{\|A\|}{\kappa(A)}} \|y(0)\|$

yaklaşımını elde ederiz [4].

Şimdi bu teoremi bir örnek problem üzerinde uygulayalım.

Örnek:

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \sin z_1 \\ z_2 \sin z_2 \end{pmatrix}, \ t \geq 0$$

$$z(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

otonom diferensiyel denklem sistemini ele alalım. Bu sistemin bir otonom sistem olduğu açıktır. Dolayısıyla burada yukarıdaki teorem yardımıyla $z(0)=0$ asimptotik kararlı çözümü için çözümün çekim bölgesini ve bazı ek şartlar altında $z(t)$ çözümü için bir yaklaşım vermeye çalışacağız.

Teoremi adım adım uygularsak öncelikle, (3) sistemine paralel olarak $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ve $r(z) = \begin{pmatrix} z_1 \sin z_1 \\ z_2 \sin z_2 \end{pmatrix}$' dir. *A* matrisinin asimptotik kararlı bir katsayı matrisi olduğu aşikardır.

Ayrıca analizden iyi bilinen,

$Sin\ z \leq |z|$ eşitsizliğinden hareketle $z_i \sin z_i \leq z_i^2$, $(i=1,\ 2)$ ve dolayısıyla $\|r(z)\| \leq \|z\|^2$ olur. Buradan gerekli α ve γ sayılarını tespit edelim.

$$\left\|r(z)\right\| \leq \left\|z\right\|^2 = \left\|A\right\| \frac{1}{\left\|A\right\|} \left\|z\right\|^{1+1}$$

şeklinde düşünürsek, $\alpha = 1$ ve $\gamma = \left\|A\right\|$ olarak buluruz.

MVC programının [5,6] QaStab fonksiyonu yardımıyla $\kappa(A)$ ve $\left\|A\right\|$ değerlerini de

$$\kappa(A) = 8,24264$$

$$\left\|A\right\| = 2,41421$$

şeklinde buluruz. Bu durumda sistemin sıfır çözümünün çekim bölgesi için

$$\gamma_0 = \frac{\gamma}{\kappa(A)^{0,5+\frac{1,5}{\alpha}}} = \frac{\left\|A\right\|}{\kappa^2(A)} \qquad \Rightarrow \qquad \left\|z(0)\right\| < \frac{\left\|A\right\|}{\kappa^2(A)} = 0,03553$$

sınırlaması şeklinde bir başlangıç değeri belirlemeliyiz. Ayrıca eğer $0 < \delta < 1$ olmak üzere $\delta = \frac{1}{2}$ alıp bir başlangıç değeri belirlersek bu durumda $z(t)$ çözümü için bir yaklaşımı

$$\left\|z(t)\right\| \leq \frac{\sqrt{\kappa(A)}}{\sqrt[\alpha]{1-\delta^\alpha}} e^{-t\frac{\left\|A\right\|}{\kappa(A)}} \left\|y(0)\right\| = \frac{\sqrt{8,24264}}{1-0,5} e^{-t\frac{2,41421}{8,24264}} \left\|z(0)\right\| < 0,20401e^{-0,29289t}$$

şeklinde elde ederiz.

Sonuçlar

Bu çalışmada özellikle dış kuvvesiz gelişen bir fiziksel süreçte karşılaştığımız otonom adi diferensiyel denklem sistemi için uygun tanım ve teoremler ışığında global anlamda asimtotik kararlılığı sürdürmek için başlangıç değerlerinin olması gerektiği aralığı çekim bölgesi kavramı adı altında tartıştık.

Kaynaklar

[1] Rao, M. R. M., **Ordinary Differential Equations Theory and Applications**, Indian Institue of Technology, Kanpur, (1979).

[2] Karaoğlu, O., **Asimtotik Kararlı Otonom Adi Diferensiyel Denklemler için Cauchy Problemi**, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, (2005).

[3] Bulgak, H., **Pseudoeigenvalues, Spectral Portrait of a Matrix and Their Connections with Different Criteria of Stability**, Bulgak, H., Zenger, C. (eds.), Error Control and Adaptivity in Scientific Computing. 95-124. © 1999 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, (1999).

[4] Bulgak, H., **Diferensiyel Denklemler** (Ders Notları-Henüz Basılmadı).

[5] Bulgak, A., Bulgak, H., **Lineer Cebir**, Uygulamalı Matematik Araştırma Merkezi Yayınları, Selçuk Üniversitesi Rektörlüğü Basımevi, Konya, (2001).

[6] Bulgak, H., Eminov, D., **Computer dialogue system MVC**, Selçuk Journal of Applied Mathematics, 2,2, 17–38, (2001).