k – Mertebeli Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Matrislerinin Çarpımlarının Spektral Normları İçin Sınırlar

Hacı CİVCİV*, Mehmet AKBULAK

Selçuk Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 42031 Kampüs/Konya

Özet: Bu çalışmada, k – mertebeli genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas matrislerinin çarpımlarının spektral normları için alt ve üst sınırlar bulundu.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, Genelleştirilmiş Lucas sayıları, Matris normu.

Bounds for the Spectral Norms of Products of the Order – k Generalized Fibonacci and Lucas Matrices

Abstract: In this study, we find out lower and upper bounds for the spectral norms of products of the order – k generalized Fibonacci and Lucas matrices.

Keywords: Generalized Fibonacci numbers, Generalized Lucas numbers, Matrix norm.

1. Giriş

$\{F_n\}$ Fibonacci dizisi, $F_1 = 1$ ve $F_2 = 1$ olmak üzere

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3$$

şeklindeki rekürans ilişkisi ile tanımlanmaktadır. Buradan,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olacağı açıktır. $1 \leq j \leq k$ için c_j'ler sabit katsayılar, g_n^i; i – inci dizinin n – inci terimi ve

* E-mail: hacicivciv@selcuk.edu.tr

$$g_n^i = \begin{cases} 1, & i = 1-n \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olmak üzere, Er [2], $k-$mertebeli genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi g_n^i'yi

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} c_j g_{n-j}^i , \quad n > 0, \quad 1 \le i \le k$$

olarak tanımlamıştır. Er [2],

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$G_n = \begin{pmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

olmak üzere

$$G_{n+1} = A G_n$$

ilişkisini elde etmiştir.
Benzer olarak; l_n^i, $i-$inci dizinin $n-$inci terimi ve

$$l_n^i = \begin{cases} 2, & i = 2-n \\ -1, & i = 1-n \\ 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olmak üzere Taşçı ve Kılıç [3], $n > 0$ ve $1 \le i \le k$ için

$$l_n^i = \sum_{j=1}^{k} l_{n-j}^i$$

rekürans ilişkisine sahip $k-$mertebeli genelleştirilmiş Lucas sayı dizisini tanımlamışlardır.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$H_n = \begin{pmatrix} l_n^1 & l_n^2 & \cdots & l_n^k \\ l_{n-1}^1 & l_{n-1}^2 & \cdots & l_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n-k+1}^1 & l_{n-k+1}^2 & \cdots & l_{n-k+1}^k \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

şeklindeki $k \times k$ matrisleri için Taşçı ve Kılıç [3], M ve H_n'in terslenebilir olduğunu ve ayrıca

$$K=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}_{k\times k} \tag{1.3}$$

olmak üzere

$$H_n = M^n K$$

ilişkisinin varlığını göstermişlerdir.
Bu çalışmada G_n ve H_n matrisleri sırasıyla (1.1) ve (1.2)'de verilen matrisler olmak üzere $H_n^{-1}G_n$ matrisinin Euclidean normu hesaplandı, spektral normu için bir alt ve üst sınır elde edilmiş ve $G_n^{-1}H_n$ matrisinin spektral normu için bir üst sınır bulunmuştur.

2. Genel Bilgiler

Tanım 2.1. $A=[a_{ij}]$ $m\times n$ tipinde bir matris ve $x=[x_s]$ $m\times 1$ tipinde bir vektör olmak üzere

$$\|A\|_E=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

ve

$$\|x\|_2=\left(|x_1|^2+|x_2|^2+\ldots+|x_m|^2\right)^{1/2}$$

ifadelerine sırasıyla A matrisinin ve x vektörünün Euclidean normları denir [1].

Tanım 2.2. A, $m\times n$ tipinde bir matris ve A^H, A matrisinin eşlenik transpozesi olmak üzere

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \{\lambda : \lambda, A^H A\text{'nın mutlak değerce en büyük öz değerinin karekökü}\}\\ &= \max_{\|x\|_2\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan norma A matrisinin spektral normu denir [4].

A, $m\times n$ matrisinin Euclidean ve spektral normları arasında

$$\|A\|_2\leq\|A\|_E\leq\sqrt{n}\,\|A\|_2$$

bağıntısı mevcuttur [1].

Tanım 2.3. Herhangi bir $n\times n$ A matrisi için P^TAP matrisi blok üst üçgen olacak şekilde $n\times n$ tipinde bir P matrisi bulunabiliyorsa A matrisine indirgenebilir matris denir. İndirgenebilir olmayan matrise de indirgenemez matris denir.

Tanım 2.4. $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ öz değerlerine sahip herhangi kompleks veya reel elemanlı $n\times n$ tipindeki bir A matrisi için $\rho(A)=\max_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|$ değerine A matrisinin spektral yarıçapı denir.

3. Temel Sonuçlar

Aksi belirtilmedikçe, bu çalışma boyunca G_n, H_n ve K matrisleri sırasıyla (1.1), (1.2) ve (1.3)'de tanımlanan matrislerdir.

Teorem 3.1. $\|\cdot\|_E$ sembolü Euclidean matris normunu göstermek üzere

$$\|H_n^{-1}G_n\|_E = \frac{2^{n+1}}{3}\sqrt{1-2^{-2n-2}(3n+4)}$$

dir.

İspat: Er [2]'de

$$G_n = M^n \tag{3.1}$$

ilişkisini ve Taşçı ile Kılıç [3]'de

$$H_n = M^n K \tag{3.2}$$

ilişkisini göstermişlerdir. (3.1) ve (3.2)' den,

$$H_n = G_n K \tag{3.3}$$

eşitliği yazılabilir. (3.3)' den

$$-H_n^{-1} G_n = (-K)^{-1} \tag{3.4}$$

bağıntısı elde edilir. Böylece (3.4)' den, $k \times k$ tipindeki $-H_n^{-1} G_n$ matrisinin tersi

$$-H_n^{-1} G_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-2} & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-3} & 2^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2^{n-4} & 2^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. $n \times n$ tipindeki bir matrisin Euclidean normu tanımından hareketle

$$\|H_n^{-1} G_n\|_E = 2^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)2^{-2i}\right)^{1/2} \tag{3.5}$$

elde edilir. Herhangi bir $x \neq 1$ reel sayısı için

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{1-x^n}{1-x} \tag{3.6}$$

olduğu bilinmektedir. (3.6)'dan

$$\sum_{i=1}^{n-1} x^i = \frac{x-x^n}{1-x} \tag{3.7}$$

elde edilir. Ayrıca, (3.7)' den

$$\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)x^{i} = \frac{d\left(\sum_{i=0}^{n-1}x^{i+1}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right)}{dx} = \frac{1-(n+1)x^{n}+nx^{n+1}}{(1-x)^{2}} \tag{3.8}$$

formülü yazılır. (3.5) ve (3.8)' den, $H_n^{-1}G_n$ matrisinin Euclidean normu

$$\|H_n^{-1}G_n\|_E = \frac{2^{n+1}}{3}\sqrt{1-(n+1)2^{-2n}+n2^{-2n-2}} = \frac{2^{n+1}}{3}\sqrt{1-2^{-2n-2}(3n+4)}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.2. $H_n^{-1}G_n$ matrisinin spektral normu için

$$\|H_n^{-1}G_n\|_2 \leq \frac{2^{n+1}}{3}\sqrt{1-2^{-2n-2}(3n+4)}$$

ve

$$\|H_n^{-1}G_n\|_2 \geq \frac{2^{n}}{\sqrt{3}}\sqrt{1-2^{-2n}}$$

sınırları mevcuttur.

İspat: $H_n^{-1}G_n$ matrisinin Euclidean ve spektral normları arasındaki

$$\|H_n^{-1}G_n\|_2 \leq \|H_n^{-1}G_n\|_E$$

bağıntısı göz önüne alınırsa, Teorem 3.1'den

$$\|H_n^{-1}G_n\|_2 \leq 2^{n-1}\left(1-(3n+1)2^{n}\right)^{1/2}$$

üst sınırı elde edilir. u ve v, $k-$boyutlu sütun vektörleri sırasıyla,

$$u = \left(1, 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots, 2^{-(n-2)}, 2^{-(n-1)}\right)^{T}$$

ve

$$v = \left(0, 0, 0, \ldots, 0, 2^{-(n-1)}\right)^{T}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan,

$$-H_n^{-1}G_n v = u \tag{3.9}$$

elde edilir. Böylece Tanım 2.2 ve (3,9)' dan

$$\left\|H_n^{-1}G_n\right\|_2 \geq \frac{\left\|H_n^{-1}G_n v\right\|_2}{\left\|v\right\|_2} = 2^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-2i}\right)^{1/2}$$

$$= 2^{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-2i}\right)^{1/2}$$

$$= 2^{n-1}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}\right)^{1/2}$$

$$= 2^{n-1}\left(\frac{4}{3}\cdot\left(1-2^{-2n}\right)\right)^{1/2}$$

$$= 2^{n}\left(\frac{1-2^{-2n}}{3}\right)^{1/2}$$

alt sınırı elde edilir.

Teorem 3.3. $G_n^{-1}H_n$ matrisinin spektral normu,

$$\left\|\left(G_n^{-1}H_n\right)\right\|_2 < \sqrt{5+4\cos\frac{\pi}{n+1}}$$

şeklinde bir üst sınıra sahiptir.

İspat: $-G_n^{-1}H_n$ matrisi ile bu matrisin transpoze matrisinin çarpımı,

$$\left(-G_n^{-1}H_n\right)^T\left(-G_n^{-1}H_n\right) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Herhangi $n \times n$ tipindeki $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ matrisleri için $A \leq B$ ile $a_{ij} \leq b_{ij}$ olduğu ve $|A|$ ile de $|A| = \left(|a_{ij}|\right)$ matrisi ifade edilmek üzere,

$$\left|\left(-G_n^{-1}H_n\right)^T\left(-G_n^{-1}H_n\right)\right| < H = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

dir. Ayrıca bilinmektedir ki, $\left|\left(-G_n^{-1}H_n\right)^T\left(-G_n^{-1}H_n\right)\right|$ matrisi negatif olmayan ve indirgenemez bir matris olduğundan, $-G_n^{-1}H_n$ matrisinin spektral normu için Perron-Frobenius Teoremi gereği

$$\begin{aligned}\left\|G_n^{-1}H_n\right\|_2^2 = \left\|-G_n^{-1}H_n\right\|_2^2 &= \rho\left(\left(-G_n^{-1}H_n\right)^T\left(-G_n^{-1}H_n\right)\right)\\ &\le \rho\left(\left|\left(-G_n^{-1}H_n\right)^T\left(-G_n^{-1}H_n\right)\right|\right)\\ &< \rho(H)\\ &= 5+4\cos\frac{\pi}{n+1}\end{aligned}$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir.

Kaynaklar

1. Bozkurt D., Türen B. ve Solak S., **Lineer Cebir**, Dizgi Ofset Matbaacılık, Konya, (2005).
2. Er M. C., **Sums Of Fibonacci Numbers By Matrix Methods,** Fibonacci Quart. 22(3), 204 – 207, (1984).
3. Taşçı D. ve Kılıç E., **On The Order – k Generalized Lucas Numbers**, Applied. Mathematics. and Computations, 155, 637 – 641, (2004).
4. Horn, R. A. and Johnson, C. R. Matrix Analysis, Cambridge, England, Cambridge University Press, (1990).