

Atf İçin: Ak M, 2022. 4 Boyutlu Fermiyonik Modelde Kaosun Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi Yöntemiyle İncelenmesi. İğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 12(2): 726-734.

To Cite: Ak M, 2022. Investigation of Chaos in 4D Fermionic Model by the Generalized Alignment Index Method. Journal of the Institute of Science and Technology, 12(2): 726-734.

4 Boyutlu Fermiyonik Modelde Kaosun Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi Yöntemiyle İncelenmesi

Mine AK^{1*}

ÖZET: İntantonlar, soliton tipi çözümler olup, konformal simetrinin kırılması sonucu elde edilmişlerdir. Uzay zaman açılımına sahip olup, kuantum karakteri taşımalarından dolayı kuarkların vakum durumu olarak tanımlanırlar. Heisenberg'in sunduğu sadece fermiyonlardan oluşan modele alternatif olarak sunulan modellerden biri de 4 boyutlu konformal invariant saf fermiyonik Gürsey Modeldir. Bu çalışmanın amacı, Gürsey instantonlarının çözümlerinin kaotikliğini ve sistemin dinamiğini Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi (GALI) yönteminden yararlanarak incelemektir. Yörüngelerdeki kaosu ve düzenli hareketi hızlı ve güvenli bir şekilde tespit edebilmesi, yarı periyodik hareketin meydana geldiği torusun boyutsallığını belirleyebilmesi Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi (GALI) yöntemini önemli kılmaktadır. Bu çalışmada, Gürsey instanton çözümlerinin kaotikliği Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi (GALI) yöntemiyle araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kaos, instanton, spinör, genelleştirilmiş hizalama indeksi, doğrusal olmayan sistemler

Investigation of Chaos in 4D Fermionic Model by the Generalized Alignment Index Method

ABSTRACT: Instantons are soliton-type solutions and are obtained as a result of breaking the conformal symmetry. They have space-time expansion and are defined as the vacuum state of quarks due to their quantum character. One of the models offered as an alternative to the model consisting of only fermions offered by Heisenberg is the 4-dimensional conformal invariant pure fermionic Gursev Model. The aim of this study is to examine the chaoticity of the solutions of Gursev instantons and the dynamics of the system by using the Generalized Alignment Index (GALI) method. The fact that it can detect the chaos and regular motion in the orbits quickly and safely and determine the dimensionality of the torus in which the quasi-periodic motion occurs makes the Generalized Alignment Index (GALI) method important. In this study, the chaoticity of Gursev instanton solutions was investigated by the Generalized Alignment Index (GALI) method.

Keywords: Chaos, instanton, spinor, generalized alignment index, nonlinear systems

¹Mine AK ([Orcid ID: 0000-0003-1131-5529](https://orcid.org/0000-0003-1131-5529))

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Mine AK, e-mail: mineak83@yahoo.com

GİRİŞ

Son yıllarda hem süpersimetrik alan teorilerinde hem de süpersicim teorilerinde pertürbatif olmayan etkilerin anlaşılmasında oldukça fazla ilerleme kaydedilmiştir. Bu etkiler, kütleleri ve eylemleri kuplaj sabitinin karesiyle ters orantılı olan solitonlar ve instantonlardan kaynaklanan etkilerdir (Belitsky ve ark., 2000). İntantonlar, bir Öklid uzay-zamanı üzerinde klasik alan teorilerindeki hareket denklemlerinin çözümleridir. Kuantum tünellemede birçok uygulamaları olduğu için kuantum teorilerinde her yerde bulunur (Paranjape, 2018).

Genel olarak, pertürbatif olmayan davranış hakkında bize güçlü bir fikir veren, parçacık benzeri davranış sergileyen klasik, doğrusal olmayan hareket denklemlerinin çözümleri vardır. Bu çözümler arasında solitonlar, monopoller ve instantonlar bulunur. İntantonlar, Öklid uzay-zamanında hareket denklemlerinin sonlu etkili çözümleridir. Klasik düzeyde, instantonlar Minkowski denklemlerinin statik çözümlerinden çok farklı değildir. Bunun nedeni, statik çözümlerin yalnızca uzamsal koordinatları, yani Minkowski uzay-zamanının Öklid alt uzayını içermesidir (Olive ve ark., 1979). İntantonlar, farklı topoloji ile klasik minimumlar arasında enterpolasyon yapan bir tünelleme yörüngesini tanımlarlar. İntanton alan konfigürasyonunun eylemi sonludur (Shifman, 1994).

Deterministik dinamik sistemlerde kaotikliği düzenlilikten ayırt edebilmek ve kararsızlıkların oluşması beklenen faz uzayının alt uzayını belirleyebilmek, fiziğin birçok alanında oldukça önemlidir. N-boyutlu ve 2N-boyutlu sistemlerde kaotik ve düzenli yörüngeler, faz uzayında çok karmaşık şekillerde dağıldığından dolayı aralarında ayırım yapmayı oldukça güçleştirir. Bu sebeple dinamik sistemlerde kaosu ve düzenli yörüngeleri birbirinden ayırabilmek için birçok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden biri de Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi (GALI) yöntemidir (Skokos ve ark., 2007). Bu çalışmada, yörüngelerin düzenli veya kaotik davranışlarının tanımlanmasını ve bu durumların ayırımını incelemek için Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi (GALI) yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemi tercih etmemizdeki amaç, bir yörüngenin kaotikliği veya düzenliliği hakkında bize hızlı ve hassas bilgi verebilecek bir yöntem olmasından kaynaklanmaktadır.

Bu çalışmada, spinör tipi instantonların başlangıç koşulları incelenerek düzenli bir hareket bölgesinden kaotik bir hareket bölgesine geçişi GALI yöntemiyle araştırdık ve denge durumuna yakın yerlerden başlayarak, farklı yerlerde başlangıç koşulları belirleyerek sistemin kaotikliği hakkında bilgi edinmeyi amaçladık.

MATERYAL VE METOT

Gürsey Model

4 boyutlu Gürsey modelinde Lagrange, 3/2 ölçek boyutundaki fermiyon alanlarına dayanmaktadır ve (Gurse, 1956)

$$L = i\bar{\psi}\partial\psi + g(\bar{\psi}\psi)^{4/3} \quad (1)$$

denklemi ile verilir. Denklem (1)'den yola çıkarak hareket denklemi

$$i\partial\psi + g(\bar{\psi}\psi)^{1/3}\psi = 0 \quad (2)$$

ile tanımlanır. Burada g pozitif kuplaj sabitidir. Heisenberg anzatının (Heisenberg, 1954) Öklid konfigürasyonunun karmaşık biçimi

$$\psi = [ix_\mu\gamma_\mu\chi(s) + \varphi(s)]C \quad (3)$$

ile verilir. Burada C keyfi bir spinör sabitidir. $\chi(s)$ ve $\varphi(s)$ ise $s = x_\mu^2 = r^2 + t^2$ ($x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z, x_4 \equiv t$)'nin gerçek fonksiyonlarıdır. (3) denklemini (2) denkleminde yerine koyarsak,

$$4\chi(s) + 2s\frac{d\chi(s)}{ds} - \alpha[s\chi(s)^2 + \varphi(s)^2]^{1/3}\varphi(s) = 0 \quad (4a)$$

$$2 \frac{d\varphi(s)}{ds} + \alpha[s\chi(s)^2 + \varphi(s)^2]^{1/3} \chi(s) = 0 \quad (4b)$$

elde ederiz. Burada $\alpha = g(\bar{C}C)^{1/3}$ yazarsak,

$$i\gamma_\mu \partial_\mu \psi = \left[-4\chi(s) - 2s \frac{d\chi(s)}{ds} + 2ix_\mu \gamma_\mu \frac{d\varphi(s)}{ds} \right] \bar{C}C \quad (5)$$

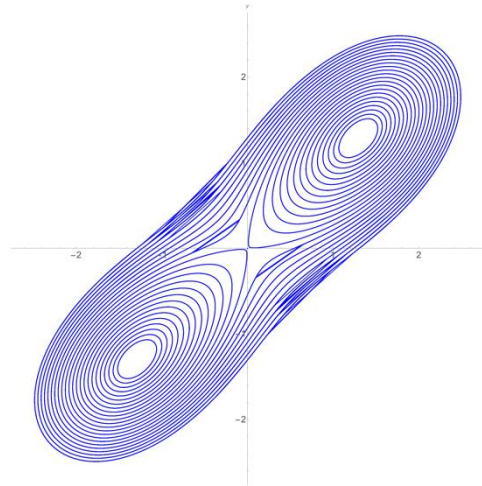
$$(\bar{\psi}\psi)^{1/3} = (s\chi^2(s) + \varphi^2(s))(\bar{C}C)^{1/3}$$

buluruz. $\chi = As^{-\sigma}p(t)$ ve $\varphi = Bs^{-\tau}q(t)$ ile $t \equiv \ln s$, $\sigma = \tau + 1/2$, $\tau = 3/4$ ve $A^2 = B^2$ (Kortel, 1956) yazarak, doğrusal olmayan basit diferansiyel denklem sistem çifti (4a) ve (4b)'nin boyutsuz formu,

$$2 \frac{dp(t)}{dt} + \frac{3}{2}p(t) - \alpha(AB)^{1/3}[p(t)^2 + q(t)^2]^{1/3}q(t) = 0 \quad (6a)$$

$$2 \frac{dq(t)}{dt} - \frac{3}{2}q(t) + \alpha(AB)^{1/3}[p(t)^2 + q(t)^2]^{1/3}p(t) = 0 \quad (6b)$$

elde edilir. Burada p ve q , t 'nin boyutsuz fonksiyonlarıdır ve A, B sabitlerdir (Kortel, 1956). Bu denklem sistemine Gürsey doğrusal olmayan diferansiyel denklem sistemi diyoruz. $\alpha(AB)^{1/3} = 1$ için bu denklem sisteminin çözümü (Akdeniz, 1982)'de verilen Gürsey instantonlarıdır. Yakın tarihte yapılan bir çalışmada, faz uzayında Gürsey instantonlarının evriminde kuplaj sabitinin rolü araştırılmıştır (Aydogmus ve ark., 2013).



Şekil 1. Gürsey instantonlarının çözümlerine karşılık gelen faz diyagramı (Aydogmus ve ark., 2013)

Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi (GALI) Yöntemi

N serbestlik dereceli Hamilton sistemlerini ele alalım. Düzenli yörüngeler için, $k \leq N$ lineer bağımsız başlangıç sapma vektörleri ile başlarsak, o zaman sapma vektörleri sonunda torusun N boyutlu teğet vektör uzayına düşer (Skokos ve ark., 2007). Bu durumda asimptotik GALI değeri pratikte sabit olacaktır. Oysa $N < k \leq 2N$ lineer bağımsız başlangıç sapma vektörleri ile başlarsak, o zaman asimptotik GALI değeri sıfır olacaktır çünkü bazı sapma vektörleri sonunda lineer bağımlı hale gelecek ve yine hepsi torusun N boyutlu teğet vektör uzayına düşecektir. Bir N boyutlu torus üzerinde bulunan düzenli yörüngeler için $GALI_k$ 'in genel davranışı (Moges, 2020)

$$GALI_k(t) \propto \begin{cases} \text{sabit} & 2 \leq k \leq N \\ t^{-2(k-N)} & N < k \leq 2N \end{cases} \quad (7)$$

ile verilmektedir. Öte yandan, kaotik ve kararsız periyodik yörüngeler için, tüm sapma vektörleri maksimum Lyapunov üsteli tarafından tanımlanan yönde hizalanır ve $GALI_k$ değeri, birkaç Lyapunov üstelinin (Skokos ve ark., 2007; Manos ve ark., 2012) değerlerine bağlı olan bir oranı takiben üstel olarak

hızlı bir şekilde sıfıra düşer (Skokos ve ark., 2007; Manos ve ark., 2012) burada $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k$, yörünge'nin en büyük k Lyapunov üstelinin yaklaşık değerleridir.

$$GALI_k(t) \propto e^{-[(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_3) + \dots + (\sigma_1 - \sigma_k)]t} \quad (8)$$

$2 \leq k \leq 2N$ ile birlikte k sapma vektörü $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \dots, \hat{\omega}_k$ 'nin evrimini izliyoruz ve kenarlar olarak bu vektörlere sahip paralelyüzün 'hacminin' sıfıra gidip gitmediğini kontrol ederek, bunların nihayetinde lineer bağımlı hale gelip gelmediğini tespit ediyoruz. Bu hacim, bu vektörlerin vektörel çarpımının normu olarak hesaplanacaktır.

Christodoulidi ve Bountis (2006)'e göre doğrusal sistemin başlangıç koşulları olarak birim büyüklükteki k lineer bağımsız vektör $\bar{\omega}_i$, $i = 1, \dots, k$ 'yi, yani $\|\bar{\omega}_i(t)\|$, $i = 1, \dots, k$ 'yi seçiyoruz. Bu sistemin çözümleri, davranışı yörünge'nin kararlılığını belirleyen sapma vektörleri olarak adlandırılan (doğrusal olarak bağımsız kalması gerekmeyen) k vektörleri $\bar{\omega}_i(t)$, $i = 1, \dots, k$ 'dir.

$t = 0$ 'da lineer olarak bağımsız olan bu tür k normalize edilmiş sapma vektörleri verildiğinde,

$$\hat{\omega}_i(t) = \frac{\bar{\omega}_i(t)}{\|\bar{\omega}_i(t)\|}, \quad i = 1, \dots, k \quad (9)$$

k dereceli Genelleştirilmiş Hizalama İndeksini bu vektörler tarafından üretilen ve zaman içindeki evrimini takip etmek istediğimiz ifadeyle verilen k boyutlu paralelyüzün hacmi olarak tanımlarız (Christodoulidi ve Bountis, 2006).

$$GALI_k(t) = \|\hat{\omega}_1(t) \wedge \hat{\omega}_2(t) \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_k(t)\| \quad (10)$$

Burada, $\|\cdot\|$ olağan klasik normu gösterir. Tüm normalize edilmiş sapma vektörleri $\hat{\omega}_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, Hamilton akışının $2N$ boyutlu teğet vektör uzayına aittir. Bu uzayın temeli olarak alışımlı ortonormal vektörler kümesi kullanılarak, $\hat{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\hat{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\hat{e}_{2N} = (0, 0, 0, \dots, 1)$ herhangi bir sapma vektörü $\hat{\omega}_i$ şu şekilde yazılabilir:

$$\hat{\omega}_i = \sum_{j=1}^{2N} \omega_{ij} \hat{e}_j, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (11)$$

burada ω_{ij} denklemleri sağlayan gerçek sayılardır.

$$\sum_{j=1}^{2N} \omega_{ij}^2 = 1 \quad (12)$$

Böylece,

$$\begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 \\ \hat{\omega}_2 \\ \vdots \\ \hat{\omega}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{12N} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{22N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{k1} & \omega_{k2} & \dots & \omega_{k2N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \vdots \\ \hat{e}_{2N} \end{bmatrix} \quad (13)$$

k sapma vektörlerinin vektörel çarpımı şu şekli alır:

$$\hat{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_2 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 2N} \begin{vmatrix} \omega_{1i_1} & \omega_{1i_2} & \dots & \omega_{1i_k} \\ \omega_{2i_1} & \omega_{2i_2} & \dots & \omega_{2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{ki_1} & \omega_{ki_2} & \dots & \omega_{ki_k} \end{vmatrix} \hat{e}_{i_1} \wedge \hat{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{i_k} \quad (14)$$

burada toplam, $2N$ dışındaki tüm olası k indeks kombinasyonları üzerinden yapılır. $|\cdot|$ determinanı gösterir ve tüm niceliklerin t zamanına açıkça bağımlılığı, basitlik için ihmal edilmiştir.

$\hat{\omega}_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ normalize edilmiş sapma vektörlerinden en az ikisi doğrusal olarak bağımlıysa, tüm $k \times k$ belirleyicileri sıfır olacak ve 'hacim' ortadan kalkacaktır. Eşdeğer olarak vektörel çarpımın normu diyeceğimiz miktar da (Skokos ve ark., 2007),

$$\|\hat{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_2 \wedge \dots \wedge \hat{\omega}_k\| = \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 2N} \begin{vmatrix} \omega_{1i_1} & \omega_{1i_2} & \dots & \omega_{1i_k} \\ \omega_{2i_1} & \omega_{2i_2} & \dots & \omega_{2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{ki_1} & \omega_{ki_2} & \dots & \omega_{ki_k} \end{vmatrix}^2 \right\}^{1/2} \quad (15)$$

sıfır olacaktır. Bu nedenle, bu önemli miktarı, k mertebesine ait Genelleştirilmiş Hizalama İndeksi

(GALI) olarak tanımlıyoruz (Denklem 10).

Bu nedenle, $GALI_k$ 'ı hesaplamak için, başlangıç koşulları $\vec{x}(0)$ olan bir yörüngenin evriminin yanı sıra, değişken $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = M(\vec{x}(t))\vec{\omega}$ kullanılarak başlangıçta lineer olarak bağımsız birim sapma vektörleri olan $\hat{\omega}_i, i = 1, 2, \dots, k$ 'nin evrimini izlememiz gerekir. Her zaman adımında, bu sapma vektörlerini bire normalize ederiz ve denklem (15) kullanarak onların vektörel çarpımının normu olarak $GALI_k$ 'i hesaplarız.

Sonuç olarak, $GALI_k(t)$ sifıra eğilimliyse, bu, sapma vektörlerinden en az biri diğerlerine doğrusal olarak bağımlı hale geldiğinden, kenarlar olarak $\hat{\omega}_i$ vektörlerine sahip paralel yüzün hacminin de sifıra küçüldüğü anlamına gelir. Öte yandan, t keyfi olarak büyürken $GALI_k(t)$ sıfırdan uzak kalırsa, bu sapma vektörlerinin doğrusal bağımsızlığını ve hacmi her zaman sıfırdan farklı bir paralelyüzün varlığını gösterir.

Denklem (15), kaotik ve düzenli yörüngeler için GALI'lerin asimptotik davranışının teorik olarak belirlenmesi için idealdir. Bununla birlikte, pratik bir bakış açısından, çok sayıda determinantın hesaplanmasını gerektirebileceğinden, $GALI_k$ 'in sayısal değerlendirmesi için Denklem (15)'in uygulanması çok verimli değildir. Bu nedenle, W(t) matrisinin Tekil Değer Ayrışımına dayanan $GALI_k$ 'in hesaplanması için daha verimli bir sayısal teknik kullanılır ve $GALI_k$ 'in $W^T(t)$ 'nin $z_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$ tekil değerlerinin çarpımına eşit olduğu gösterilmiştir (Antonopoulos ve Bountis, 2006; Skokos ve ark., 2008). Burada (T) transpoze matrisi gösterir.

$$GALI_k(t) = \prod_{i=1}^k z_i(t) \quad (16)$$

Daha açık bir şekilde ifade etmek gerekirse, s boyutlu torus ($s \leq N$) üzerinde uzanan düzenli yörüngeler için $GALI_k$ 'in davranışı şu şekilde verilir (Skokos ve ark., 2008):

$$GALI_k(t) \propto \begin{cases} \text{sabit} & 2 \leq k \leq s \\ \frac{1}{t^{k-s}} & s < k \leq 2N - s \\ \frac{1}{t^{2(k-N)}} & 2N - s < k \leq 2N \end{cases} \quad (17)$$

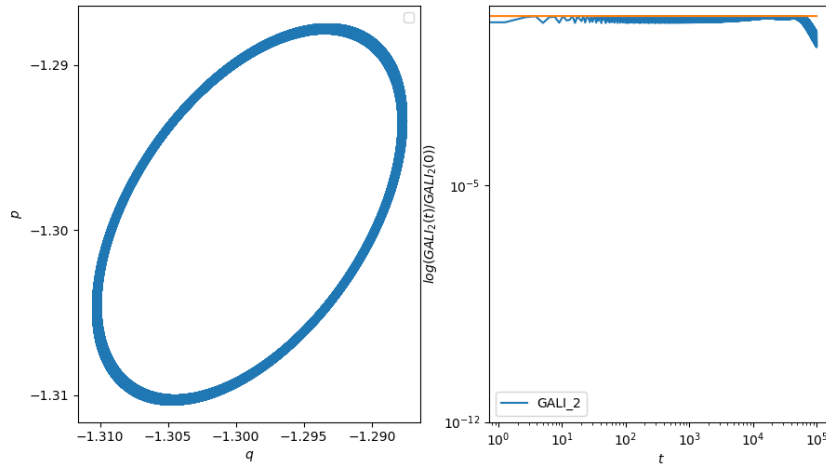
Kaotik yörüngeler için $GALI_k$, ilk k en büyük Lyapunov üsteline bağlı olan bir üsle üstel olarak hızlıca sifıra gider (Senyange ve Skokos, 2022).

$$GALI_k(t) \propto \exp(-t \sum_{i=2}^k (\sigma_1 - \sigma_i)) \approx \exp(-t \sum_{i=2}^k (\Lambda_1(t) - \Lambda_i(t))) \quad (18)$$

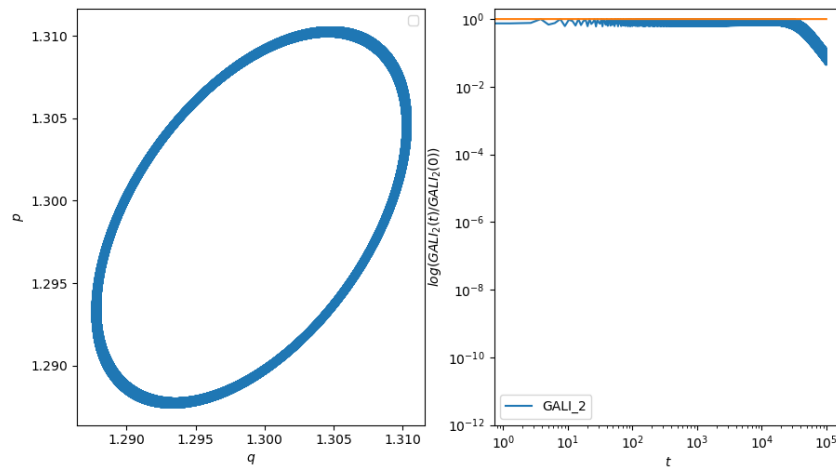
Burada maksimum Lyapunov üstellerin σ_i değerleri, ilgili sonlu zamanlı maksimum Lyapunov üsteller Λ_i tarafından yaklaşık olarak alınır.

BULGULAR VE TARTIŞMA

Heisenberg anzatının Gürsey modele uygulanmasıyla elde edilen spinör tipi instanton çözümleri kullanılarak GALI yöntemi ile yörüngelerin doğası araştırıldı. Şekil 1'deki faz diyagramında görüldüğü gibi denge noktaları $[-\frac{3\sqrt{3}}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}], [\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}]$ tür. Öncelikle kararlı noktalar civarındaki yörüngelerin davranışına bakıldı. Sonrasında kararlı noktalardan uzak başlangıç koşulları seçilerek oluşan yörüngelere bakıldı.

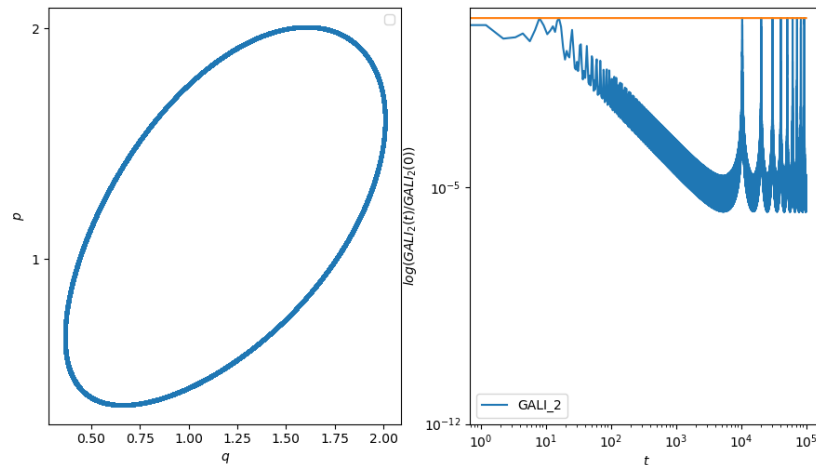


Şekil 2. $\alpha(AB)^{1/3} = 1$ ve $(-1.29, -1.30)$ başlangıç koşulu için faz diyagramı, 10^5 iterasyon sayısına göre $GALI_2$ 'nin eğrisi

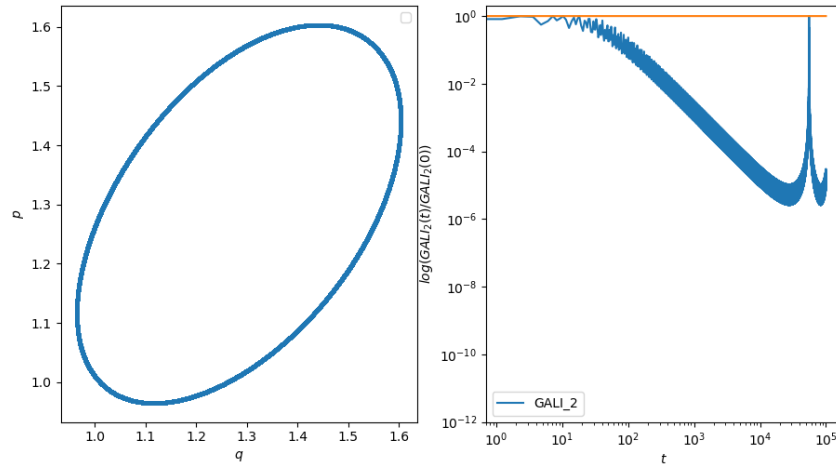


Şekil 3. $\alpha(AB)^{1/3} = 1$ ve $[1.29, 1.30]$ başlangıç koşulu için faz diyagramı, 10^5 iterasyon sayısına göre $GALI_2$ 'nin eğrisi

Şekil 2 ve Şekil 3'te görüldüğü üzere kararlı noktalara çok yakın durumlarda yörüngelerin düzenli olduğu görülmektedir. $GALI_2$ eğrisi paralel olarak sabit bir biçimde hareket etmektedir ve bu durum yörüngelerin düzenli olduğunu belirtmektedir. $GALI_2$ eğrisi ve faz diyagramı göz önüne alındığında kararlı noktalara yakın başlangıç koşullarında düzenli yörüngeler olduğu görülmektedir.

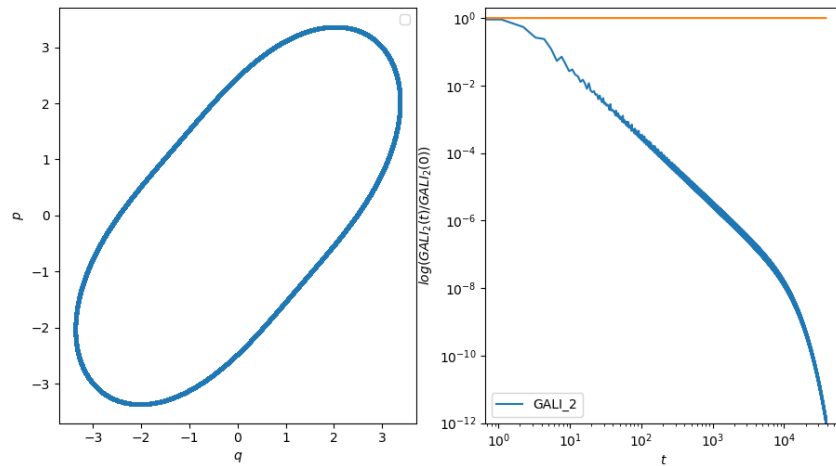


Şekil 4. $\alpha(AB)^{1/3} = 1$ ve $[0.3, 0.4]$ başlangıç koşulu için faz diyagramı, 10^5 iterasyon sayısına göre $GALI_2$ 'nin eğrisi

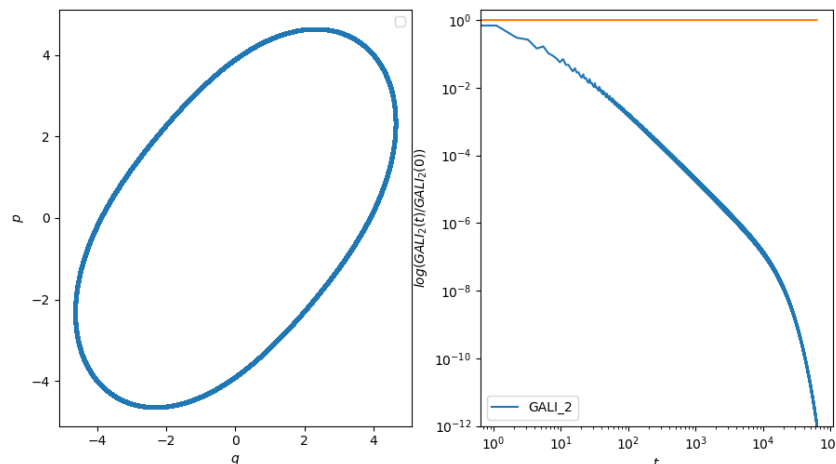


Şekil 5. $\alpha(AB)^{1/3} = 1$ ve $[1.4, 1.6]$ başlangıç koşulu için faz diyagramı, 10^5 iterasyon sayısına göre $GALI_2$ 'nin eğrisi

Şekil 4 ve Şekil 5'te görüldüğü üzere kararlı noktalardan biraz uzak durumlarda rastgele seçilmiş olan $(0.3, 0.4)$ ve $(1.4, 1.6)$ başlangıç durumlarına göre faz diyagramında düzenli yörüngeler görülmektedir. Ancak $GALI_2$ nin eğrisi incelendiğinde yörüngelerde kaotik durumlar gözlenmektedir. Şekil 4'te başlangıç koşulu orijine yakın seçildiği durumlarda yayılan kaos (Senyange ve Skokos, 2022) durumu mevcuttur. Şekil 5'te ise yerleşmiş ve yayılan kaos (Senyange ve Skokos, 2022) durumu ortaya çıkmaktadır. Başlangıç durumlarına göre kararlı noktalardan uzaklaştıkça yörüngelerde kaotik durumlar meydana gelmektedir. Faz diyagramında görünmeyen bu durum $GALI_2$ nin eğrisi sayesinde görülebilmektedir.



Şekil 6. $\alpha(AB)^{1/3} = 1$ ve $[3.0, 3.0]$ başlangıç koşulu için faz diyagramı, 10^5 iterasyon sayısına göre $GALI_2$ 'nin eğrisi



Şekil 7. $\alpha(AB)^{1/3} = 1$ ve $[4.0, 4.0]$ başlangıç koşulu için faz diyagramı, 10^5 iterasyon sayısına göre $GALI_2$ 'nin eğrisi

Şekil 6 ve Şekil 7’de görüldüğü gibi kararlı noktalardan uzak durumlarda rastgele seçilmiş olan (3, 3) ve (4, 4) başlangıç durumlarına göre faz diyagramında düzenli yörüngelere sahip olduğu görülmektedir. Fakat $GALI_2$ nin eğrisi incelendiğinde kaotik yörüngeler olduğu görülmektedir. Başlangıç durumlarına göre kararlı noktalardan daha fazla uzaklaşıldıkça yörüngeler kaotik olmaktadır. Faz diyagramında görünmeyen bu durum $GALI_2$ nin eğrisi sayesinde görülebilmektedir.

SONUÇ

Gürsey Model, 4 boyutlu konformal invaryant saf fermiyonik bir modeldir (Gursey, 1956). Bu çalışmada Gürsey instantonlarının Heisenberg yaklaşımına dayanarak spinör tipi instanton çözümlerinin dinamiğini ve yörüngelerinin doğasını anlamak amacıyla, yüksek boyutlu sistemlerde olduğu gibi düşük boyutlu sistemlerde de kaosu araştırmak için kullanılan GALI yöntemi tercih edilmiştir.

Daha önce yapılan çalışma (Aydogmus ve ark., 2013) faz uzayı çekicilerini göstermekte fakat yörüngelerin durumu hakkında detaylı bilgi vermediğinden, bu çalışmada GALI yöntemi kullanılarak yörüngelerde kaotiklik veya düzen araştırması yapıldı. GALI yöntemiyle Gürsey instantonlarının denge durumları $\left[-\frac{3\sqrt{3}}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$ ve $\left[\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$ civarında yörüngelerinin düzenli olduğunu, denge durumundan orijine yaklaşıldığı zaman yayılan kaotik durum, uzaklaşıldığında ise hem yayılan hem de yerleşmiş kaotik durum mevcuttur. Denge noktalarından daha fazla uzaklaşıldığında ise kaotik yörüngeler olduğu gözlemlendi.

Bu çalışmada, Gürsey instantonlarının yörüngeleri hakkında daha fazla bilgi sahibi olduk. Ayrıca, 4-boyutlu konformal invaryant saf fermiyonik spinör tipi instantonların başlangıç koşullarındaki en ufak bir değişikliğin sistemi değiştirdiğini, bu da instantonların başlangıç koşullarına hassas bir şekilde bağlı olduğunu göstermektedir.

TEŞEKKÜR

Bu makaleyi hazırlarken verdiği destek için değerli hocam Prof. Dr. K.Gediz AKDENİZ’e teşekkür ederim.

KAYNAKLAR

- Akdeniz KG, 1982. On classical solutions of Gursey’s conformal-invariant spinor model. *Lettere al Nuovo Cimento*, 33(2): 40–44.
- Antonopoulos C, Bountis T, 2006. Detecting order and chaos by the linear dependence index method. *Romai Journal*, 2(2): 1-13.
- Aydogmus F, Canbaz B, Onem C, Akdeniz KG, 2013. The behaviours of Gursey instantons in phase space. *Acta Physica Polonica B*, 44(9): 1837–1845.
- Belitsky AV, Vandoren S, Van Nieuwenhuizen P, 2000. Yang-Mills and D-instantons. *Classical and Quantum Gravity*, 17(17): 3521-3570.
- Christodoulidi H, Bountis T, 2006. Low-dimensional quasiperiodic motion in hamiltonian systems. *Romai Journal* 2(2): 37-44.
- Gursey F, 1956. On a conform-invariant spinor wave equation. *Il Nuovo Cimento*, 3(5): 988–1006.
- Heisenberg W, 1954. Zur quantentheorie nichtrenormierbarer wellengleichungen. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 9, 292–303.
- Kortel F, 1956. On some solutions of Gursey’s conformal-invariant spinor wave equation. *Il Nuovo Cimento*, 4, 210–215.

- Manos T, Skokos C, Antonopoulos C, 2012. Probing the local dynamics of periodic orbits by the Generalized Alignment Index (GALI) method. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22(9): 1250218.
- Moges HT, 2020. Investigating Chaos by the Generalized Alignment Index (GALI) Method. University of Cape Town.
- Olive D, Sciuto S, Crewther RJ, 1979. Instantons in field theory. *La Rivista del Nuovo Cimento*, 2(8): 1-117.
- Paranjape M, 2018. The theory and applications of instanton calculations. Cambridge University Press, England.
- Senyange B, Skokos C, 2022. Identifying localized and spreading chaos in nonlinear disordered lattices by the Generalized Alignment Index (GALI) method. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 432: 133154.
- Shifman M, 1994. Instantons in gauge theories. World Scientific, Singapore.
- Skokos C, Bountis T, Antonopoulos C, 2007. Geometrical properties of local dynamics in hamiltonian systems: the Generalized Alignment Index (GALI) method. *Physica D*, 231(1): 30-54.
- Skokos C, Bountis T, Antonopoulos C, 2008. Detecting chaos, determining the dimensions of tori and predicting slow diffusion in Fermi-Pasta-Ulam lattices by the Generalized Alignment Index method. *The European Physical Journal Special Topics*, 165(1): 5-14.