OTAM, 44 /Güz 2018, 133-187

Klasik Dönem Osmanlı Matematiğinde Kök Çıkarma Teknikleri : *Câmi'u'l- Hisâb* Örneği

Root Extraction Methods in Traditional Period of Ottoman Mathematics: *Câmi'u'l- Hisâb*

Tuba OĞUZ*

Özet

Matematik tarihinde, kök çıkarma işlemleriyle ilgili aritmetiksel metotlar, gerek sayıların tam veyahut yaklaşık köklerinin elde edilmesinde, gerekse de denklemlere (cebirsel tekniklerden ziyade) nümerik olarak yaklaşımda uygulama alanı bulmuştur. Bununla ilgili ilk teşebbüsler Mezopotamyalılardan gelmiş olup, ortaçağın doğu ve batı uygarlıklarında, bu metotlar gelişme göstermiştir. Özellikle Çinlilerin yüksek dereceli denklemleri çözme gayretleri, onları asırlar önce, Ruffini ve Horner'in modern matematiksel tekniklerine yaklaştırmıştır. 15. yüzyılda Cemşid Kaşi, yüksek dereceden kök alma işlemlerine "genel" çözüm metotları önermiş olup, bu birikimin Osmanlılara aktarılmış olduğu bilinmektedir.

Çalışmamızda, Kanunî dönemine ait *Câmi'u'l- Hisâb* isimli matematik eserinin sekizinci başlığı altında yer alan kök çıkarma metotları incelenerek, Osmanlı matematiğine yapılan katkıların tespit edilmesi amaçlanmıştır. Bu bağlamda, öncelikle konunun tarihsel arkaplanından bahsedilmiştir. Ardından, eser kısaca tanıtılarak, incelenen ve tesis edilen metinle ilgili birtakım açıklamalar yapılmıştır. Matematiksel çözümleme çalışmamızın üçüncü bölümünde işlenmiş olup, tenkitli metni ekte sunulmuştur. Sonuç olarak, ortaçağ İslam matematiğinden tevarüs edilen aritmetiksel metotların Osmanlı matematik eserlerinde oldukça iyi temsil edildiği görülmüş ve bunların söz konusu eserde dikkat çekici bir konuma getirildiği anlaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Osmanlılar, aritmetik, nümerik analiz, kök çıkarma, cami el- hisab.

Abstract

* *Dr. (Bilim Tarihi), zeyneptubaoguz@gmail.com*

In history of mathematics, arithmetical methods concerning root extraction were distinguished in both exact or approximate roots of numbers and numerical (rather than algebric) approach to equations. First attempts about this subject came from the Mesopotamian, and methods was developed by the civilizations in medieval period. Especially, Chinese efforts about solving high-order equations got themselves closer to modern mathematical techniques even centuries ago. In fifteenth century, Cemşid Kaşi proposed "general" solution methods for high-level root extraction operations and these advancements were transferred to the Ottomans.

This study aims to point out the contributions to Ottoman mathematics within the context of root extraction methods through *Cami el- Hisab* which belongs to the era of Kanunî. Firstly, historical back ground of the subject has been explained briefly. After that, the text that focused on and its edition has been presented. Finally, it has been clarified the mathematical structure of the text by means of the formulas. The text on these methods are in appendix of the study as critical edition. Findings indicate that these methods, which leans to mediaeval Islam mathematics, has gained a remarkable position in traditional period of Ottomans.

Keywords: Ottomans, arithmetic, numerical analysis, root extraction, Cami el- Hisab

Giriş

İslam dünyası matematikçileri sayıların köklerini bulma, kökler üzerinde işlem yapma, köklerin tam ve yaklaşık değerlerini elde etme gibi konularla ilgilenmiş ve bu yaklaşımlar onları sayılar kümesinin alt kümelerinden biri olan irrasyonel sayılar kümesinin özelliklerini tesbit etmeye kadar götürmüştür.[1] Farklı coğrafyalarda, farklı matematiksel ekollerin gayretleriyle olgunlaşan bu birikim, Osmanlılarca da tevarüs edilmiş ve Osmanlı matematiğine nümerik bir nitelik kazandırmıştır. Bu hususta gelinen seviye ise gerek konuya mahsus müstakil risalelerde gerekse de aritmetik, cebir ve uygulamalı geometri konularının işlendiği genel hesap kitaplarında kendini göstermektedir.

Osmanlılarda mütedavil olan bazı matematik eserlerindeki bilgileri değerlendirerek, karekök ve küp kök hesaplarıyla ilgili gerek tam- rasyonel gerekse de yaklaşık-irrasyonel kök elde etme kurallarını ise ilk olarak Salih Zeki Bey *Asâr-ı Bâkiye*'sinde açıklığa kavuşturmuştur.[2] Ancak bu bilgiler, tenkitli metin çalışmaları desteklenmelidir. Üstelik, Osmanlı matematiğinde konunun

---

[1] Muhammed Süveysi, "Hesap", *İslam Ansiklopedisi*, C.17, Türkiye Diyanet Vakfı, İstanbul 1998, s. 244.

[2] Matrakçı Nasuh*, Umdetü'l- Hisab,* Antalya Tekelioğlu nr. 678, varak no: 149b-154a.

ileri boyutları da henüz aydınlatılmamıştır. Hacı Atmaca'nın *Mecma'u'l- Kavâ'id'i*, Matrakçı Nasuh'un *Umdetü'l- Hisâb'ı*, ibn Hamza el-Mağribî' nin (16. yüzyıl) *Tuhfetü'l-A'dâd'ı*,[3] ve Bahauddin Amulî'nin *Hulâsatü'l-Hisab'ı*[4] gibi en meşhur Osmanlı matematik eserlerinde mevzubahis kurallar ve tekniklerin yer almaması veyahut yüzeysel geçilmesi nedeniyle Osmanlıların bu tekniklere yaklaşımı belirsizliğini korumaktadır. Amacımız, klasik döneme ait bir metin neşri öncülüğünde, kök alma metotlarıyla ilgili Osmanlıların gün yüzüne çıkmayan yönlerini ortaya çıkarmaktır.

Çalışmamızın ilk bölümünde, matematik tarihinde aritmetiksel gelişmeler kapsamında önemli merhalelerden olan kök alma işleminin tarihsel arka planından bahsedilmiştir. İkinci bölümde, eser ve eserin incelenen kısmı kısaca tanıtılarak, konunun işleniş tarzı ve eserin bütünündeki yerine dikkat çekilmeye çalışılmıştır. Eserin müellif nüshası günümüze ulaşmadığından, üzerinde çalışılan metnin sağlıklı bir şekilde değerlendirilmesi için çalışmamızda tenkitli metin yöntemi uygulanmış ve eserin sekizinci faslının üçüncü kısmı tarafımızca yeniden kurulmuştur. Çalışmamızın üçüncü bölümünde, tesis edilen metin, sadeleştirilmiş bir Türkçe ile güncelleştirilmiş ve metindeki işlemlerin matematiksel ifadesi ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu işlemler, dipnotlarda modern matematik sembolleriyle izah edilmiştir. Tenkitli metnin ise ekte sunulması uygun görülmüştür.

1. Kök Çıkarma İşleminin Tarihsel Arkaplanı

1.1. Eski Çağ Uygarlıklarında Kök Alma Metotları

1.1.1. Mezopotamya Uygarlığındaki Gelişmeler

Mezopotamyalılar, oldukça erken dönemlerden itibaren sayıları çizgilerle temsil etmekten uzak durup, bunları genellikle soyut nicelikler olarak kavradıklarından ötürü, aritmetiksel birçok işlemin öncüsü olarak düşünülmektedir. İşlem cetvellerini içeren tabletlerin arasında çarpma, kare, karekök, küp ve küp kök cetvelleri mevcuttur. [5] Mezopotamyalı matematikçiler, tam doğru ve yaklaşık sonuç meselesine oldukça önem vermişler, tam olarak ifade edilebilen sayıları, yalnızca yaklaşık olarak ifade edilebilenlerle ayırmak için özel terimler ihdas etmişlerdir. Bu zihniyetin irrasyonellerin keşfine zemin hazırladığını söylemek yanlış olmayacaktır.[6]

---

[3] Varak no: 70b, bkz. Melek Dosay Gökdoğan, "İstanbul'un Cazibesine Kapılan Bir Matematikçi: Mağribi", yayımlanmamış bildiri metni.

[4] Eserin altıncı faslındaki kök alma teknikleri için bkz. İhsan Fazlıoğlu, "Hulasatü'l-Hisab", *İslam Ansiklopedisi*, C. 18, Türkiye Diyanet Vakfı, İstanbul 1998, s. 322.

[5] Aydın Sayılı, *Mısırlılarda ve Mezopotamyalılarda Matematik, Astronomi ve Tıp,* TTK, Ankara 1991, s. 185.

[6] Sayılı, *Mısırlılarda ve Mezopotamyalılarda Matematik*, s. 178.

Köklerin hesaplanması için Mezopotamyalılar belirlenmiş bazı işlemlere dayanan metotlara sahiplerdir. Eski Babil çağına ait bir tablette $\sqrt{2}$ için verilen bir değer küsuratıyla (altmışlık kesirler kullanmışlardır) 1; 24,51,10 olup bu değerin ondalık karşılığı 1,41423 olur. Günümüzdeki değer göz önüne alındığında, yaklaşık değer bulma konusunda oldukça mahir oldukları aşikardır.[7]

$\sqrt{2}$' nin yaklaşık değeri için Mezopotamyalılar şu adımları takip etmiştir:

$\sqrt{2}$ icin ilk yaklaşık değer olan k değeri ile başlanır

$k < \sqrt{2}$ icin her iki taraf $\sqrt{2}$ ile çarpılarak $\frac{2}{k} > \sqrt{2}$ bulunur.

$k > \sqrt{2}$ icin her iki taraf $\sqrt{2}$ ile çarpılarak $\frac{2}{k} < \sqrt{2}$ bulunur.

Her iki durum için isabetli bir değer elde edilmesi için $k\ ve\ \frac{2}{k}$ değerlerinin ortalaması alınır.

Tabletlerde rastlanan 1;25 değeri formülde yani $\frac{1}{2} \times \left(k\ ve\ \frac{2}{k}\right)$ de yerine konulduğunda 1;24,51,10 olur.[8]

Yaklaşık karekök hesaplarının geometrik bir model üzerinde temellendiğini gösteren bir tabletteki bilgiler ise aşağıdaki gibi olup, analitik çözümler daha sonra da açıklanacağı gibi ortaçağ uygarlıklarındaki matematikçiler tarafından geliştirilmiştir.[9]

Aşağıdaki şekilde S büyük karenin alanı, a da küçük karenin bir kenarı olmak üzere, S'nin karekökü için şu işlemler geliştirilmiştir:

$$a^2 < S \ \textit{olduğuna göre}$$

$$S - a^2 \ \textit{arasındaki farkı iyice azaltmak için alanı} \ \frac{S - a^2}{4} \ \textit{olan dikdörtgenler esas alınır}$$

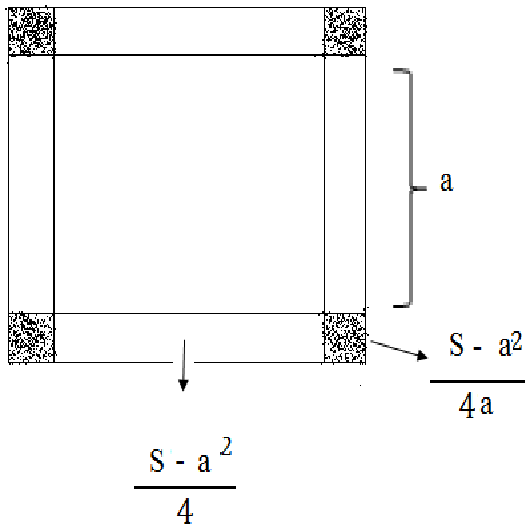
[7] Sayılı, *Mısırlılarda ve Mezopotamyalılarda Matematik,* s. 178,179.
[8] Sayılı, *Mısırlılarda ve Mezopotamyalılarda Matematik,* s. 179,180; Carl Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, USA 2011, p. 25.
[9] Sayılı, *Mısırlılarda ve Mezopotamyalılarda Matematik*, s. 180.

$$alanı\ \frac{S-a^2}{4}\ olan\ dikdörtgenin\ bir\ kenarı\ a$$

$$diğer\ kenarı\ ise\ \frac{S-a^2}{4a}\ olur\ ki\ aynı\ zamanda\ a\ kenarının\ uzantılarıdır$$

$$elde\ edilen\ yeni\ kenar\ yani\ büyük\ karenin\ bir\ kenarı\ a+\frac{S-a^2}{2a}\ olur$$

$$a+\frac{S-a^2}{2a}\ aynı\ zamanda\ S'in\ kare\ kökü\ için\ yaklaşık\ değeridir.$$



$$\left(a+\frac{S-a^2}{2a}\right)^2=S+\left(\frac{S-a^2}{2a}\right)^2\ halbuki\ büyük\ karenin\ alanı\ sadece\ S\ idi.$$

$$fark\ olan\ \left(\frac{S-a^2}{2a}\right)^2\ aslında\ kenarı\ \frac{S-a^2}{4a}\ olan\ dört\ adet\ karenin\ toplamıdır.$$ [10]

1.1.2. İskenderiye Uygarlığındaki Gelişmeler

Yunanca yazılan en önemli matematik kitabı hiç kuşkusuz Öklit'in (M.Ö. 3. asır) *Elementler*'idir. On üç kitaptan müteşekkil bu eserin onuncu kitabı, çeşitli irrasyonel uzunlukların ayrıntılı bir analizini içermektedir. Eserde işlenen bilgiler, antik Yunan uygarlığından beri anlamlandırılamayan bazı sayıların

---

[10] Sayılı, *Mısırlılarda ve Mezopotamyalılarda Matematik,* s. 181,182.

(irrasyonel nicelikler) matematiksel işlemlere nasıl kazandırıldığını göstermesi bakımdan mühimdir. Bu eserde nicelikler, geometrik çizimler olarak temsil edilmiştir. İrrasyonellik tiplerine ilişkin, basit kareköklerin yanı sıra

$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

gibi çoklu köklere ait birçok kanıtlamalar yapılmış ancak küp köklere değinilmemiştir. İrrasyonel sayılara geniş yer verilmesi eserin son kısımlarında anlam kazanmaktadır ki bu bölümlerde irrasyonel sayılar düzenli katı cisimlerle ilişkilendirilmiştir.[11]

1.2. Ortaçağ Uygarlıklarında Kök Alma Metotları

1. 2. 1. Çin Uygarlığındaki Gelişmeler

Çin uygarlığının erken dönemlerinde bu konuyla ilgili işlemler geometrik temelli değerlendirmelerden doğmuştur. Han Hanedanlığı zamanında, matematikçiler tarafından bazı denklemlerin çözümü, Horner metodunu anımsatan bir usül yardımıyla başarılmıştır. Bu işlemlerin ve işlemlerde kullanılan metotların izi sürüldüğünde *Chiu Chang Shu* metinleri ön plana çıkmakta ve kare ve küp kök hesaplarıyla ilgili önemli gelişmeler kaydedildiği görülmektedir (M. S. 2. yüzyıl). [12]

Chiu Chang Suan Shu'nun yorumcu olan ve M. S. 3. yüzyılda yaşayan Liu Hui, karekök hesaplarının geometrik temellerini izah etmiştir. Kullandığı diyagramlar göstermektedir ki bir doğru parçası rastgele ikiye bölündüğünde bu doğrunun üzerindeki kare, parçaların üzerlerindeki karelerle bu parçaların çevrelediği dikdörtgenin iki katının toplamına eşittir. Bu durum cebirsel olarak $(a+b)^2= a^2+ b^2 + 2ab$ olarak ifade edilir. Üstelik bu nicelikleri isimlendirmiş ve küçük kareyi (yü), büyük kareyi (fang) ve dikdörtgeni (lien) ayrı terimlerle ifade etmiştir. Bu teoremi geometrik olarak ispatlayan ise İskenderiyeli matematikçi Öklit'tir. [13]

Bu hesaplarla ilgili yaşayan en eski diyagram ise, Yang Hui'nin *Hsiang Chieh Chiu Chang Suana Fa Tsuan Lei*'sinden kalma olup, 1260 yıllarına aittir. İlk satırda kökü alınacak sayı, yani "shang"; ikinci satırda elde edilen kök, yani "shih" başta olmak üzere, diğer terimler olan "fang", "yü", "lien" ve "hsia"lar, işlemlerde ve tablolarda görülen unsurlardandır.

[11] Richard Mankiewiez*, Matematiğin Tarihi,* Çev: Gökçen Ezber, Güncel Yayıncılık, İstanbul 2002. 43-48.
[12] Joseph Needham, *Science and Civilisation in China*, C. 3, Cambridge University Press, Cambridge 2012, pp. 65-68.
[13] Needham, *Science and Civilisation in China,* pp. 65-68.

1247'de Ch'in Chiu- shao, hesap çubukları yardımıyla da olsa

$$-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0$$

denklemini Horner metoduna son derece benzer şekilde çözmüştür. Burada kökün ilk basamağı olan 8 bulunarak, birtakım işlemlerden sonra

$$x^4 - 3200x^3 - 3076800x^2 - 826880000x - 38205440000 = 0$$

denklemi elde edilir. Sonra da kökteki ikinci rakam 4 olarak alınıp, mutlak terim yok edilerek 840 bulunur. Dolayısıyla Çinliler, Horner'in sayısal denklemleri çözme metodunu, Ruffini ve Horner'den asırlar önce keşfetmiştir.[14]

1.2. 2. Hint Uygarlığındaki Gelişmeler

M.S. 5. yüzyılda yaşamış meşhur Hint matematikçisi Aryabhata'nın *Aryabhatiya* isimli eserinde kök alma teknikleri "Ganitapada" başlığı altında işlenmiştir. Kendisinden kök gelip gelmemesine göre sayıdaki basamakların gruplara ayrıldığı ve mümkün olan maksimum kök tahminleriyle sürecin işlediği teknik, küp kök hesapları çerçevesinde ana hatlarıyla şöyle anlatılabilir:

Verilen sayıya uygun bir A^3 sayısı ilk grupta araştırılır ve A nihai sonucun yani aranan kökün ilk basamağı olur. Bundan sonraki işlemler, $(A+B)^3$ açılımındaki katsayılar ve terimlere uygulanır. Ancak buradan elde edilenler, ayrıştırılan gruplarda değerlendirilmez. Bunun yerine gruptaki sayıların tek tek indirilmesi tercih edilmiştir. Bu yüzden, örnek olarak verilen işlemler dizisine temel oluşturmuş aşağıdaki algoritmanın benimsendiği anlaşılır.[15]

Örnek:

[14] Florian Cajori, *Matematik Tarihi*, Çev: Deniz İlalan, ODTÜ Yayınları, Ankara 2014, 93.

[15] Abhishek Parakh, "Aryabhata's root extraction methods", *Indian Journal of History of Science*, V. 42, 2007, pp. 151-154.

3 ⇨	34965783	
	- 27	⇦ $3 \times 3 \times 3$
	79	
	- 54	⇦ $2 \times 3 \times 3^2$
	256	
	- 36	⇦ $3 \times 3 \times 2^2$
	2205	
	- 8	⇦ 2^3
32 ⇨	21977	
	- 21504	⇦ $7 \times 3 \times 32^2$
	4738	
	- 4704	⇦ $3 \times 32 \times 7^2$
327 ⇨	343	
	- 343	⇦ 7^3
	0	

Not: **3** , küp açılımdaki katsayı olmak üzere:

$$\frac{79}{3 \times 3^2} = 2 \ , \qquad 2 \times \mathbf{3} \times 3^2 = 54$$

$$\frac{21977}{3 \times 32^2} = 7 \ , \qquad 7 \times \mathbf{3} \times 32^2 = 21504$$

Genel çözümü ise şöyledir:

Bir A sayısı bulunur ve sayıdaki k grubunda A^3 değeri aranarak şu işlemler yapılır:

$$k = (100 \times d_{i+2}) + (10 \times d_{i+1}) + d_i$$

$$S = k - A^3$$

$$R = A$$

$$l = (10 \times S) + d_{i-1}$$

$$S = l \ mod \ (3 \times R^2)$$

$$m = (10 \times S) + d_{i-2}$$

$$k = (100 \times d_{i+2}) + (10 \times d_{i+1}) + d_i$$

$$B = \frac{l}{3 \times R^2}$$

$$S = m - (3 \times R \times B^2)$$

$$R = (10 \times R) + B$$

$$n = (10 \times S) + d_{i-3}$$

$$S = n - B^3$$

Bu algoritma, sayıdaki basamaklar sona erinceye kadar tekrarlanır.[16]

1.2. 3. İslam Dünyası'ndaki Gelişmeler

İslam Dünyası matematiğinin ilk dönemlerinden itibaren karekök ve küp kök başta olmak üzere, kök alma metotlarına ilişkin algoritmik yöntemlere rastlanır. Üstelik 10. yüzyılın başlarından 17. yüzyılın başlarına kadar, hesap üzerine yazılmış birçok eserde, gerek tam-rasyonel kök gerekse de yaklaşık-irrasyonel kök almaya ilişkin formüller yer almaktadır. 10. yüzyılın sonunda Kuşyar b. Lebbân gibi matematikçiler kök hesaplarında Ruffini-Horner yöntemine götüren bir algoritma kullanmışlardır. Bu algoritmayla varılan diğer sonuçlar daha sonra Ali b. Ahmed en- Nesevî (11. yüzyıl), Kemaleddin el-Fârisî (13. yüzyıl) ve ibn Havvâm'ın (14. yüzyıl) eserlerinde olağan yöntemler olarak yer almıştır. [17]

Yine 10. yüzyılın sonlarından itibaren aritmetik üçgen ve binom (iki terimli) formülünün bilinmesi, n. dereceden kökün bulunması için sözü edilen yöntemlerin genelleştirilerek, algoritmanın formülle ifade edilmesini kolaylaştırmıştır. Bu girişimleri, Ömer Hayyam'ın (11. yüzyıl) konuyu tekrar ele alması takip etmişse de en çarpıcı gelişme Semew'el Magribî'nin (12. yüzyıl) hesap tekniklerinde görülmektedir. Semew'el, altmış tabanlı bir tam sayının

---

[16] Parakh, "Aryabhata's root extraction methods", pp. 151-154.

[17] Rüşdü Rashed, "Matematik", *İslam Ansiklopedisi*, C.28, Türkiye Diyanet Vakfı, İstanbul 2003, s.132-133.

kökünü, ileride, Ruffini- Horner yöntemi adını alan yöntem ile bulmuş ve daha sonraları başta Cemşid Kaşî (14. yüzyıl) olmak üzere pek çok matematikçi bu yönteme başvurmuştur.[18]

Ortaçağ İslam Dünyası'nda tam kök alma süreci şöyledir: Bölme işlemindeki çıkarmalarda yapıldığı gibi, basamaklarda herhangi bir hata oluşmaması için kökü alınacak sayının basamakları kadar sütuna sahip bir cetvel hazırlanmıştır Cetvelin üstüne yatay bir çizgi çekilerek, burası bulunacak köke tahsis edilmiştir. Kökü alınacak sayı da bunun hemen altında yazılır. Sağdan itibaren kökü alınacak dereceye uygun olacak şekilde ilgili basamaklara işaret konulur. Son işarete sahip olan rakamlar grubu ile işleme başlanır. [19]

Tam kökün olmadığı durumda ise, kökün yaklaşık değerlerine ulaşılmaya çalışılmıştır. Mesela, kök derecesi iki olduğunda, İslam Dünyası matematikçileri aşağıdaki kuralı ortaya koymuşlardır: Sayıda dahil olan en büyük kare aranılarak bunun karekökü alınır. Geriye kalan fark, karekökün iki misline veya iki misli ile bir toplamına bölünerek, bölüm yine bilinen kareköke eklenir.[20]

Tam kökün olmadığı durumda, gerçek değerlerin bulunması mümkün olmadığından, yukarıdaki geometrik temsillerde açığa çıkan ihmal durumlarının sayısal (nümerik) işlemlerde de vaki olduğunu söylemek gerekir. Gerçek değerden büyük veya küçük olarak saptanan niceliklerin işlem aşamalarındaki temel prensibi ise şöyledir:

m *kökü alınan sayı,* b^2 *buna en yakın kare sayı,* h *da bu ikisi arasındaki fark olsun:*

c *miktarı birden küçük olmak üzere*

$$m = (b+c)^2 \quad yazılır.$$

$$m = b^2 + h$$

$$m = b^2 + h = (b+c)^2$$

[18] Rashed, "Matematik", s. 132-133. Kuşyar'ın kağıt ve kalem kullanmamasından ötürü metodundaki aşamaların takip edilmesindeki zorluklar hakkında bkz. John Lennart Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval İslam*, Springer, Newyork 2003, s. 49.

[19] Salih Zeki, *Asâr-ı Bâkiye*, C.2, haz: Melek Dosay Gökdoğan, Babil Yayınları, Ankara 2003, s. 167.

[20] Salih Zeki Bey, bu çıkarımlarda bulunurken, ibnü'l- Bennâ'nın *Telhîsu A'mâli Hisâbi*'ndan (14. asır) ve Bahauddin Âmili'nin *Hulasatü'l- Hisâb*'ından (17. asır) yararlandığını söylemektedir. Yani ortaçağ İslam Dünyası'nda iz bırakan yaklaşımlar Osmanlı matematiğinde de mevcuttur. Bkz. Salih Zeki, *Asâr-ı Bâkiye*, s. 170.

$$b^2 + h = b^2 + 2bc + c^2$$

$$h = 2bc + c^2 = c(2b + c)$$

$$c = \frac{h}{2b + c}$$

İfadenin bulunması c'ye bağlıdır, c de 2b'ye göre çok küçük olduğu durumda ihmal edilir veya 2b'ye göre çok küçük olmadığı durumda bir varsayılır. O halde

$$c = \frac{h}{2b + 1} \text{ kuralı geçerlidir}$$ [21]

Kerecî tarafından başlatılan, özellikle Samew'el bin Yahya gibi halefleri tarafından takip edilen yeni matematiksel metotlar, 11. asırda esasında cebir disiplininin yenilenmesinde belirleyici olmuştur. Çünkü bu durum, bilinen nicelikler yardımıyla aritmetiksel işlemler yapmak ile bilinmeyen niceliklerle işlem yapmada paralellik sağlamayı hedeflemektedir. Ancak, cebire aritmetiksel karakter kazandırma adına cebirde kullanılan bu aritmetiksel operasyonlar, cebir disiplinini olgunlaştırmasının yanı sıra sayılar teorisi ve nümerik tekniklerin gelişmesinde de etkili olmuştur.[22]

En az Cemşid Kaşi'de (15. yüzyıl) formüle edildiği haliyle Semew'el'in aritmetik risalesinde(12. yüzyıl) kendini gösteren ve Ruffini- Horner metodundan herhangi farkı olmayan kök alma yöntemi, 60 tabanlı 0; 0,0,2,33,43,3,43,36,48,8,16,52,30 sayısının beşinci dereceden kökünün alınmasında uygulanmıştır.[23]

Semew'el'in aritmetik risalesinde, özellikle bir sayının pozitif bir köküne yaklaşmayı işleyen bölümler de mevcuttur. Semew'el, bu "yaklaşma" tekniği yardımıyla, bilinen sayılar dizisi üzerinde çalışarak, irrasyonel kök ile rasyonel sayılar dizisi arasındaki farkı karşılaştırmaktır. Çünkü Semew'el, hesaplar sonucunda elde edilen irrasyonel köke yaklaşan bir "rasyonel" bulmaktadır. Ama bu irrasyonel köke daha da yakın ikinci bir rasyonel sayı ve hatta üçüncü bir rasyonel sayının da bilincindedir. [24]

---

[21] Salih Zeki, *Asâr-ı Bâkiye*, s. 170-180.

[22] Rushdi Rashed, *The Development of Arabic Mathematics Between Arithemetic and Algebra*, Trans: A. F. W. Armstrong, Kluwer Academic, Dordrecht 1994, pp. 88-89. İslam Dünyası matematiğinde, analitik karakterde bir cebir inşasının baş mimarı olan Kerecî için bkz. Melek Dosay, *Kerecî'nin İle'l- Hesab el- Cebr ve'l- Mukabele Adlı Eseri*, TTK, Ankara 1991, s. 79.

[23] Rushdi Rashed, *The Development of Arabic Mathematics,* p. 91.

[24] Rushdi Rashed, *The Development of Arabic Mathematics,* p. 90.

İlk teşebbüslerin Semew'el'den geldiği ve aşağıdaki şekilde biçimlenen formüller ise bir tamsayının irrasyonel kökünün tam olmayan kısmına, kesirli sayılarla yaklaşmayı sağlamıştır.

$$N \text{ kökü alınacak sayı}$$

$$\text{ve } x' \text{ kök olmak üzere kökün tam ve kesirli kısmı:}$$

$$x' = x_0 + \frac{N - x_0^n}{\left[\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x_0^{n-k}\right] + 1}$$

$$yani \quad x' = x_0 + \frac{N - x_0^n}{(x_0 + 1)^n - x_0^n} \quad olur$$ [25]

Cemşid Kaşi'nin *Miftâhu'l- Hisâb*'ında, sayının n. dereceden kökünü almayı sağlayan genel bir metodu vardır. Bu metot aslında yine 19. yüzyıl matematikçilerinden Ruffini ve Horner'in özel durumlara tatbik ettiği uygulamadan farklı değildir. Kaşi bu metotla ilgili olarak her ne kadar öncüllerinden bahsetmese de kendi icadı olmadığını da belirtmiştir. Bu yüzden tarihçiler de Kaşi'nin 12. yüzyıl Çin kaynaklarından beslendiğini ileri sürmüşledir. [26] Kaşi'nin teorileri, Kereci ve ardıllarının çalışmalarında zaten bulunduğundan, aslında kendisinin 12. yüzyıl matematikçilerinden fikir olarak herhangi bir farkı yoktur. Ancak, Kaşi'nin öncülleri, metotlarını tablolar serisi ile açıklamışlar iken Kaşi bu tabloları daha anlaşılır tek bir tabloda toplamıştır. [27]

Kaşi'nin işlem prosedürleri kısaca şöyle aktarılabilir:

Kaşi, 331781 sayısının ikinci dereceden kökünü alırken, bu sayıyı ikişerli gruplara ayırarak bir cetvel oluşturur. Önce, ikili gruplardan ilki olan 33'in içindeki maksimum karekökü, yani 5'i, bularak, cetvel üstüne yerleştirir. 5'in karesi olan 25'i de 33'ten çıkardığı için kalan 8 sayısının yanına diğer ikili grup olan 17'yi indirir. O halde yeni soru şu olur:

$$[(5 \times 2 \times 10) + x] \times x = 749 \leq 817$$

Buradaki x değeri 7 olarak bulunup, cetvel üstüne yerleştirdikten sonra, 817 ve 749 arasındaki fark olan 68'in yanına üçüncü ve son ikili grup olan 81'i indirerek yeni bir soru ileri sürer:

$$[(57 \times 2 \times 10) + x] \times x = 6876 \leq 6881$$

Buradaki x değeri 6 olarak bulunup, aranan kökün tam kısmı elde edilir.

---

[25] Rushdi Rashed, *The Development of Arabic Mathematics,* p. 109.
[26] Rushdi Rashed, *The Development of Arabic Mathematics,* p. 90.
[27] Rushdi Rashed, *The Development of Arabic Mathematics,* p. 101.

Bu işlemlerin ana prensibinin şu algoritma olduğu görülür:

ondalık temsili ABC olan köke ait A, B ve C rakamlarının kuvvet durumundaki N sayısında aranışı:

$$(100A + 10B + C)^2 \leq N$$

$100A + 10B = X$ *ve* $C = Y$, *C durumundaki her sayı, mümkün olan maksimum sayıdır*

Gruplar indirilirken doğan farklar, Δ_1 *ve* Δ_2 *olmak üzere*

$$\Delta_1 = N - (100A + 10B)^2$$

$$\Delta_2 = N - (100B)^2$$

$$\Delta_1 - \Delta_2 = (2A10 + B) \times 100B$$

sondaki 10'un kuvvetleri çıkarmalarda birbirini götüren konumda olduğundan

$$(X + Y)^2 - X^2 = (2X + Y) \times Y$$

veya başka bir ifadeyle $(X + Y)^2 - X^2 = ((C(2,2) \times Y) + (C(2,1) \times X)) \times Y$

esas alınacak özdeşlik olur. [28]

Kaşi kökün kesirli kısmı için ise aşağıdaki işlemleri takip eder:

$$576^2 = 331776 < 331781 < 332929 = 577^2$$

$$331781 - 331776 = 5$$

$$332929 - 331776 = 1153$$

$$\sqrt{331781} = 576 + \frac{5}{1153}$$ [29]

Kaşi bu prosedürleri beşinci dereceden kök alma işlemlerinde de uygulamayı başarmıştır. Burada, sayı, beşerli gruplara ayrıştırılarak, kök için mümkün maksimum rakamlar denenmeye başlanır. Kök olan 536 sayısının rakamlarına ait işlemleri temsil eden f(5) ve f(3)'in gidişatı esas olarak birbirinden farksızdır. 44240899506197 sayısının beşinci dereceden kökü alınırken, yukarıdaki özdeşliklerde görülen temel prensip göze çarpar:

$$(A + B)^5 - A^5 = \left(\left(\left((C(5,5)B + C(5,4)A)B + C(5,3)A^2\right)B + C(5,2)A^3\right)B + C(5,1)A^4\right)B$$

$$(A + B)^5 - A^5 = \left(\left(\left((B + 5A)B + 10A^2\right)B + 10A^3\right)B + 5A^4\right)B$$

---

[28] John Lennart Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval İslam*, Springer, Newyork 2003, pp. 49, 50, 53, 57.

[29] Berggren, *Episodes in the Mathematics,* p. 53.

Yukarıda binom açılımında görülen katsayılar, f(5) işlemlerinde yerine konulduğunda Kaşi'nin tablolarında aşağıdaki terimler ortaya çıkar.

$$5 \times C\binom{5}{4} = 25, \quad 5^2 \times C\binom{5}{3} = 250, \quad 5^3 \times C\binom{5}{2} = 1250\,, \quad 5^4 \times C\binom{5}{1} = 3125$$

Benzer tekniklerle, diğer basamaklar olan "3" ve "6" bulunur.

Kökün tam kısmı olan 536 elde edildikten sonra, kesirli kısmı şu işlemlerle elde edilir:

$$= 536 + \frac{44240899506197 - 44240899506176}{(536+1)^5 - 536^5}$$

$$= 536 + \frac{21}{536^5 + (5 \times 536^4 \times 1) + (10 \times 536^3 \times 1^2) + (10 \times 536^2 \times 1^3) + (5 \times 536 \times 1^4) + 1^5 - 536^5}$$

$$= 536 + \frac{21}{412694958080 + 1539906560 + 2872960 + 2680 + 1}$$ [30]

$$yani \quad x' = x_0 + \frac{N - x_0^n}{(x_0+1)^n - x_0^n} \quad olur.$$

Bu ifadeler analitik düzlemde $f(x) = \sqrt{x}$ grafiği olarak ifade edildiğinde $x > 1$ için iki nokta arasındaki uzaklığın ayırt edilemeyecek kadar az olduğu, çok daha iyi anlaşılır. Bu da, yaklaştırma metotlarının matematikçiler tarafından niçin tercih edildiğini izah etmektedir. Eski çağ ve ortaçağın "lineer interpolasyon"u[31] olarak bilinen bu teknik, aslında Batlamyus'un meşhur astronomi kitabı el- Mecistî'sine geri gidecek kadar kadîmdir. [32] Ayrıca, formül dikkatle incelendiğinde, iki noktası bilinen doğru denkleminin günümüzdeki formülasyonuna oldukça benzemektedir.

---

[30] Berggren, *Episodes in the Mathematics,* pp. 53-63.

[31] İnterpolasyon, ara değer bulmaktır. Doğrusal interpolasyon iki noktası bilinen doğru denkleminin yazılmasıdır.

[32] Berggren, *Episodes in the Mathematics,* pp. 50-52; Rushdi Rashed, *The Development of Arabic Mathematics,* pp. 110-111.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$y = y_1 + \frac{(y_2 - y_1) \times (x - x_1)}{(x_2 - x_1)}$$ [33]

Sonuç olarak, Nesevî gibi Kereci ekolü öncesi matematikçiler, bu metotları en fazla üçüncü dereceden kök alma durumuna kadar ilerletmiştir.[34] Kerecî ekolünün gayretleriyle bu hususta açık ara farkla gelişme kaydedilmiş olup, ekolün mensuplarından Semew'el, bu metotlar yardımıyla 60 tabanlı bir sayının beşinci dereceden kökünü almayı ve yüksek dereceden yaklaşık kök hesaplamayı başarmıştır. Cemşid Kaşi ise 10 tabanlı sayılarda da bunları uygulamayı hedeflemiş ve gerek tam kök gerekse de yaklaşık kök hesaplarını genelleştirerek sayısal analiz tekniklerini olgun bir düzeye getirmiştir.

1.3. Yeniçağ Avrupa'sında Gelişmeler

Doğudaki kadîm uygarlıkların metotlarıyla benzer algoritmalar öne süren Maximus Planudes (M. S. 14. yüzyıl) Avrupa'da, karekök ve küp kök hesaplarının doğuşunda etkili isimlerden biri olmuş ve 1494'te Pacioli gibi meşhur matematikçiler dahi bu akımın takipçisi olmuştur. Ancak, bilginin ortaçağ İslam Dünyası'ndan yeniçağ Avrupa'sına nakli, sözü edildiği gibi sadece Bizans bilginleri sayesinde değil, Mağrib coğrafyasının farklı kültürlere mensup matematikçileri arasındaki etkileşimler vasıtasıyla da gerçekleşmiştir. 13. yüzyılda, Pisalı Leonardo (Fibonacci), gerek *Liber Abaci*'sinde, gerekse de *Practica Geometriae*'sinde, küp kök çıkarma metotlarını işlemiştir. El- Hassar, ibn Yasemin ve ibn Munim gibi 12 ve 13. yüzyılın Mağribli matematikçileri tarafından da bu konuyla ilgili benzer tekniklerin bilindiği göz önüne alındığında, Leonardo'nun interpolasyon metotları da dahil sözü edilen algoritmalarla ilgili bilgileri, Mağribli matematikçilerle temasında edinmesi kuvvetle muhtemeldir.[35]

16. asırda bile bazı Avrupalı matematikçilerin küp kök hesapları beklenen düzeyde operatif değilken[36] konuyla ilgili, yeniçağ Avrupası'na mensup istisnaî matematikçiler de mevcuttur. Örneğin Vieta'nın *De Numerosa Potestatum* isimli eserinde (1600), Horner metodunu denklem teorilerinde kullandığı

---

[33] Rushdi Rashed, *The Development of Arabic Mathematics,* p. 110.
[34] Rushdi Rashed, *The Development of Arabic Mathematics,* pp. 109-111.
[35] Bo Göran Johansson, "Cube root extraction in medieval mathematics", *Historia Mathematica*, V. 38, 2011, pp. 357-359.
[36] Needham, *Science and Civilisation in China,* pp. 65-68.

bilinmektedir.[37] Ayrıca, birtakım sınırlılıklarına rağmen, Stevin'ın *L'arithmetique*'si de ön plana çıkan bir diğer eserdir. Bu eserde, kökün tam kısmı hesap edilirken, Kaşî'deki teknikler yerine, daha basit bölme işlemleri tercih edildiğinden, kökün ikinci basamağından itibaren sorunlar gözlemlenmekte ve bu durum yüksek derecelerde daha sıkıntılı hale gelmektedir. Dahası, kökün kesirli kısmı ele alınırken, paydanın elde edilişinin de tam kavranmadığı fark edilmekte, işlemlerin gerekçelerinin

$$(r+1)^n - r^n$$

ifadesine dayanmadığı anlaşılmaktadır. Bununla beraber, Stevin bu eserinde, Pascal üçgenini belirgin bir biçimde ortaya koymuş ve farklı derecelerden olmak üzere, on altı tane kök alma işleminden bahsederek dönemin aritmetiğini canlandırmıştır. [38]

Newton ve Horner metotlarının da temelini oluşturan konuyla ilgili bu ilk teşebbüsler, J. Wallis (17. yüzyıl) tarafından uygulamaya konulduğunda, terimler pozitif olduğunda dahi çok fazla çaba gerektiği görülmüştür. Yine de bu metotlar, Pell (17. yüzyıl) gibi matematikçiler tarafından benimsenerek, daha sade ve güvenilir hale getirilmiştir. Newton'un yaklaşık değerler yardımıyla, yüksek dereceli denklemlere çözüm öneren (kalkülüs temelli ve yeni) metodu 18. yüzyıl matematikçileri tarafından da ele alınmakla beraber, bunlar ancak, Horner ile olgun bir düzeye getirilebilmiştir. Köklerin

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cdots}}}$$

olarak sürekli kesirlerle[39] ifade edildiği dönemde, Horner, köklerin basamak basamak ondalık temsillerle gösterildiği Lagrange'ın (18. yüzyıl) tekniklerini

[37] Carl Boyer, *A History of Mathematics*, p. 277.
[38] Nuh Aydın - Lackhdar Hammoudi, "Root Extraction by Al- Kashi and Stevin", *Archive for History of Exact Sciences*, 2015, p. 301,302,308,309.
[39] Kökler, tam ve kesirli haneleriyle beraber aşağıdaki şekilde de yazılabildiği için aynı zamanda sürekli kesirler olarak da ifade edilebilir.

sahiplenmiştir. Sonuç olarak, Horner, çarpıcı bir yenilik önermese de asırlardan beri süregelen teknikleri işlevsel ve yalın hale getirmiştir. Kadim uygarlıklarda geometrik olarak doğrulanan/ispatlanan ilkeleri/teorileri ise binom teorisi yardımıyla cebirsel bir formda genelleştirmiştir. [40]

2. Eser ve İlgili Kısmının Tanıtımı ile Metin Tesisi Hakkında Açıklamalar

2.1. *Câmi‘u'l- Hisâb* ve Kök Çıkarma Teknikleri (Mudallaat)

Dibacesindeki bilgilere göre *Câmi‘u'l- Hisâb* isimli Türkçe eser, Kanuni döneminde muhasebecilerin faydalanması gayesi ile yazılmıştır. Eserin içeriği ve kök çıkarma metotlarının eserdeki yeri, Lala İsmail 288 nüshası esas alınarak, maddeler halinde aşağıdaki gibi tanıtılabilir:

I. BÖLÜM: Çarpma metotları (varak no: 3a-13b)

II. BÖLÜM: Akçe, zirâ, müd, kantar ve miskal ile işlemler (varak no: 13b-25b)

III. BÖLÜM: Tam sayı ve kesirli sayılarla yapılan bölmeler (varak no: 25b-30a)

IV. BÖLÜM: Kesirlerin paydaları, paydalar arasında ortak bölenin olup olmaması durumu ve dokuz bayağı kesrin ortak paydasının bulunması (varak no: 30a-35a)

V. BÖLÜM: Borçlunun mal varlığı borçlarını karşılamadığı durumda, alacaklıların alacak miktarlarıyla orantılı olacak şekilde malın bölüştürülmesi hesabı (Gurema Taksimi) (varak no: 35a-39b)

VI. BÖLÜM: Oran - Orantı (varak no: 39b-45b)

VII. BÖLÜM: Tek yanlış ve çift yanlış hesabı (varak no: 45b-52b)

$$r = A - a^2$$

$$\sqrt{A} - a = \frac{r}{\sqrt{A} + a}$$

$$\sqrt{A} = a + \frac{r}{\sqrt{A} + a}$$

$$\sqrt{A} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{a + \sqrt{A}}}$$

[40] Wang Ling-Joseph Needham, "Horner's Method in Chinese Mathematics: Its Origins in the Root Extraction Procedures of the Han Dynasty", *T'oung Pau*, Vol. 43, 1955, pp. 378-380, 397-398.

VIII. BÖLÜM: Kök çıkarma metotları[41] (varak no: 53a- 71b)

1. İkinci dereceden kök çıkarma
1.1. Tam kök hesapları
1.2. Yaklaşık kök hesapları

2. Üçüncü dereceden kök çıkarma
2.1. Tam kök hesapları
2.2. Yaklaşık kök hesapları

3. Dördüncü dereceden kök çıkarma
4. Beşinci derceden kök çıkarma

IX. BÖLÜM: Uygulamalı Geometri (Mesaha) (varak no: 71b-81b)

Tanımlar

Kenarları doğru olan şekiller ve alan hesapları

Kenarları eğri olan şekiller ve alan hesapları

X. BÖLÜM: Cebir ve mukabele (varak no: 81b-120a)

A. Mukaddime: Temel kavram ve işlemler:

Cebirsel terimlerin elde edilmesi, yalın ve birleşik terimler ile bu terimlerle yapılan işlemler, denklem kurulması ve bu denklem üzerinde yapılan çeşitli işlemler.

B. Denklemler teorisi ve uygulamaları

1. FASIL: Cebir ve mukabelenin yalın ve katışık denklemleri

2. FASIL: Denklemlerin çözümü ilgili alıştırmalar

3. FASIL: Çeşitli problemler

Görüldüğü gibi eserde kök çıkarma işlemlerine çok geniş yer verilmiş ve bu işlemler farklı alt başlıklar altında detaylandırılmıştır.

2.2. Metin Tesisi ile İlgili Açıklamalar

Müellifin kaleminden çıkan nüsha mevcut olmadığından, orijinal metne mümkün olduğunca bizi yakınlaştıracak dört nüsha yardımıyla üzerinde çalışılan metin kurulmaya çalışılmıştır.

---

[41] Özgün metinde "mudallaat" olarak isimlendirilmiştir. Arapçada, kelimenin tekili "mudalla"dır. Kök anlamına gelen ve mücerred konumda olan "dıl" kelimesi "kuvvet halindeki bir sayıdan köke ulaşma süreci" anlamına gelecek şekilde mezîd vezinlerden birine (tef'il vezni) uygun hale getirilerek, bunun ism-i mefulü kullanılmıştır.

Yedi nüshasına işaret edilen eserin en eski tarihli tam nüshası olan Lala İsmail 288, işlem hatalarından nisbeten arınık olan ve isabetli bazı ek izahlar veren Zeytinoğlu 303/3 ve diğerlerinin eksiklerini tamamlayan Cerrahpaşa Tıp Tarihi 665 ile Cambridge R.13.11 nüshaları, metnin tesisinde tercih edilmiştir.[42] Varak numaraları Lala İsmail nüshasına göre yazılarak **[ ] ile** gösterilmiştir.

Lala İsmail nüshası L, Tıp Tarihi nüshası T, Zeytinoğlu nüshası Z ve Cambridge nüshası C olarak dipnotlara yazılmıştır. Kelime ve ibare fazlalıkları için + ve – işaretleri kullanılmış ve varyant bir cümle veya uzun bir ibare ise baş ve sondan birkaç kelime alınarak, arası … ile doldurulmuştur.

Metin içinde tarafımızca yapılan düzeltmeler [ ] ile belirtilmiştir. Anlamı değiştirmeyen farklılıklar için ( ) kullanılmış, şüpheli yerler ? ile gösterilmiştir.

3. Matematiksel Çözümleme

Ekte sunulan tenkitli metne mümkün olduğunca sadık kalınarak güncelleştirilen metin, aşağıda sunulmuş olup, işlemlerin günümüzdeki temsilleri dipnotlarda verilmiştir. Bununla birlikte, müellifin ifade biçimi bazen çözüm aşamalarının anlaşılmasını zorlaştırdığından, yine bu dipnotlar, zaman zaman tarafımızca eklenen açıklamalar, işlemler ve tablolarla desteklenmiştir.

3.1. Güncelleştirilmiş Metin

Üçüncü kısım

Dördüncü dereceden kök alma hakkındadır.

Bir sayının dördüncü dereceden kökü istendiğinde bulunan sayı, kendisiyle bir kere çarpılır. Elde edilen sayıyla bir kere daha ve bir kere daha çarpılır. Bundan elde edilen **[61a]** sayıya, dördüncü dereceden kuvvet[43] denir.

Kök elde edilme aşamaları, beş satırda incelenir. İlk satıra, sayı sırası denir. İkinci satıra, dördüncü dereceden kuvvet denir. Üçüncü satırda, üçüncü kez çarpımdan elde edilen sayılar ve dördüncü satırda ikinci kez çarpımdan elde edilen sayılar yer alır. Beşinci satır ise kökün bulunduğu sıradır.

Yöntem: Dördüncü dereceden kökü istenen bir sayı bulalım. Yazılan sayı, bir basamak rasyonel-tam ve üç basamak irrasyonel-yaklaşık olarak düşünülüp, hesap yapılır.[44]

---

[42] Ekmeleddin İhsanoğlu, *Osmanlı Matematik Literatürü Tarihi*, C.1, IRCICA, İstanbul 1999, s. 100.

Cambridge nr. R.13.11 nüshasını temin etmemde kolaylık sağlayan Türk Tarih Kurumu'na teşekkür ederim.

[43] Mal mal.

Örnek: Üç yüz on dört bin yüz kırk üç kere yüz bin ve yetmiş iki bin seksen birin dördüncü dereceden kökü bulunmak istenmektedir. Bu durumda söz konusu sayı yazılır. Bunun üzerine örnek:

3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1

Sonra, birler bsamağında yer alan sayının üstüne bir sıfır konulup, "dördüncü dereceden kök" denir. Onlar, yüzler ve binler basamaklarının üstü boş bırakılıp, on binler basamağı üzerine bir sıfır konulur. Buna göre, son basamağa kadar, üç basamak boş bırakılıp, dördüncü basamağın üzerine sıfır koyulur. Bunun üzerine örnek:

0 0 0

3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1

Sonra, dördün üstüne yazılacak bir sayı bulunup yazılır. **[61b]** Bu, rasyonel-tamsayı köklerden biridir. Bu yüzden ilk satırda yazılır. Aynısı beşinci satırda yazılıp, birbiriyle çarpılır. Bu çarpım da dördüncü satıra yazılır. Sonra, ilk satırda yazılan sayı, dördüncü satırda yazılan sayı ile çarpılıp, üçüncü satırda yazılır. Üçüncü satırda yazılan sayı, yine ilk satırda yazılan sayıyla çarpılıp, esas miktarın yer aldığı ikinci satırda yazılır. Birbirinden çıkarılıp, kalan yazılır. Bu durumda istenen sayı, hesaplar gereği dört olur. Dört, ilk satırda üçüncü sıfırın üstüne yazılır. Beşinci satıra da aynısı, aynı hizaya yazılır. Bunun üzerine örnek:

4	ilk satır
0 0 0	
3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1	ikinci satır

Sonra, ilk satırda yazılan dört, beşinci satırda yazılan dörtle çarpıldığında on altı olur. Bu da dördüncü satırda yazılır.

4	ilk satır
0 0 0	
3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1	ikinci satır
16	dördüncü satır
4	beşinci satır

Sonra, dördüncü satırda yazılan on altı **[62a]** ilk satırda olan dörtle çarpıldığında, altmış dört olur. Bu da üçüncü satıra yazılır.

[44] Sayı, dörderli gruplar halinde düşünülür.

4	ilk satır
0 0 0	
3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1	ikinci satır
64	üçünücü satır
16	dördüncü satır
4	beşinci satır

Sonra ilk satırdaki dört, üçüncü satırda yazılan altmış dörtle çarpılır. İki yüz elli altı olur. Esas miktardan çıkarılıp, bu fark yazılır. Bunun üzerine örnek:

4	ilk satır
0 0 0	
3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1	
2 5 6	
5 8	ikinci satır

Sonra, beşinci satırda olan dört, kendisiyle çarpıldığında, on altı olur. Dördüncü satırda olan on altıyla altı çarpılır, doksan altı olur. Dördüncü satırda olan altmış dört, dörtle çarpıldığında iki yüz elli altı olur. Üçüncü satırda **[62b]** yazılan sayılar bir basamak ve dördüncü satırda yazılan sayılar iki basamak ve beşinci satırda olan sayılar üç basamak sağa ilerletilir. Bunun üzerine örnek:[45]

4	ilk satır
0 0 0	
5 8 1 4 3 7 2 0 8 1	ikinci satır
2 5 6	üçüncü satır
9 6	dördüncü satır
1 6	beşinci satır

45

$$\Delta = 4 \ \mathit{olmak\ \ddot{u}zere}$$

$$4 \times \Delta \times 10$$

$$6 \times \Delta^2 \times 100$$

$$4 \times \Delta^3 \times 1000$$

Ancak basamak ilerletmeler, bu formüllerde olduğu gibi sağdan sola olmadığından, soldan sağa doğru basamak ilerletme önerilir.

Sonra, ikinci sıfır üstüne yani yedi üstüne yazılacak sayı bulunup, o sayının aynısı beşinci satırda, on altının yanına yazılır. Sonra, ilk satırda yazılan sayı, beşinci satırda yer alan tüm sayılarla çarpılır.[46] Elde edilen çarpım, dördüncü satıra yazılıp, toplanır.[47] Dördüncü satırda olan tüm sayılar, ilk satırda yazılan sayı ile çarpılır. [48]Elde edilen çarpım ve üçüncü satırda yer alan tüm sayılar, ilk satırda yazılan sayıyla çarpılır.[49] Elde edilen çarpım, ikinci satırda yer alan sayıdan çıkarılıp, kalan yazılır.[50] O halde bulunmak istenen sayı, hesaplar gereği, iki **[63a]** olur. Söz konusu iki, ilk satıra yazılıp, aynısı beşinci satıra yazılır. Bunun üzerine örnek:

satr-ı evvel		4				2				
		0				0				0
satr-ı sânî	5	8	1	4	3	7	2	0	8	1
satr-ı sâlis		2	5	6						
satr-ı râbi‘				9		6				
satr-ı hâmis				1	6	2				

Daha sonra, ilk satırda ortada yer alan iki, beşinci satırda yer alan yüz altmış ikiyle çarpılır. Elde edilen çarpım, dördüncü satırda, aynı hizada kaydedilir.

46
$$2 \times 162 = 324$$

47
$$9600 + 324 = 9924$$

48
$$9924 \times 2 = 19848$$

49
$$19848 + 256000 = 275848 \qquad 275848 \times 2 = 551696$$

50
$$581437 - 551696 = 29741$$

4 2	ilk satır
0 0 0	
5 8 1 4 3 7 2 0 8 1	ikinci satır
2 5 6	üçüncü satır
3	
9 6 2 4	dördüncü satır
9 9 2 4	
1 6 2	beşinci satır

Toplandığında, dokuz bin dokuz yüz yirmi olur. Sonra, ilk satırda yazılan iki, dördüncü satırda yazılan dokuz bin dokuz yüz yirmi dörtle çarpılır, on dokuz bin sekiz yüz kırk sekiz olur. Aynı hizada, üçüncü satırda yazılır. Bunun üzerine örnek:

[63b]

4 2	ilk satır
0 0 0	
5 8 1 4 3 7 2 0 8 1	ikinci satır
2 5 6	
1 9 8 4 8	üçüncü satır
2 7 5 8 4 8	
9 9 2 4	dördüncü satır
1 6 2	beşinci satır

Toplamı, iki yüz yetmiş beş bin sekiz yüz kırk sekiz olur, üçüncü satırda kaydedilir. Sonra, üçüncü satırda yer alan tüm sayılar, ilk satırda olan ikiyle çarpılır, beş yüz elli bir bin altı yüz doksan altı olur. İkinci satırdaki esas miktardan çıkarıldığında, kalan yazılır. Bunun üzerine örnek:

4 2	ilk satır
0 0 0	ikinci satır
5 8 1 4 3 7 2 0 8 1	
5 5 1 6 9 6	
2 9 7 4 1	

Sonra, beşinci satırda olan iki ile yanındaki on altı çarpıldığında, otuz iki olur. Dördüncü satırda yazılır. Sonra, söz konusu iki, kendisiyle çarpıldığında, dört olur. Dört, yine ikiyle çarpıldığında, sekiz olur. Dördüncü satırda yazılan otuz ikinin yanına yazıldığında, üç yüz yirmi sekiz **[64a]** olur. Daha önce dördüncü satırda yer alan dokuz bin dokuz yüz yirmi dört ile toplanır. Dördüncü satırdaki on bin iki yüz elli iki elde edilir.[51] Bunun üzerine örnek:

4 2	ilk satır
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	ikinci satır
2 7 5 8 4 8	üçüncü satır
1 0 2 5 2	dördüncü satır
1 6 2	beşinci satır

[51] Müellif burada

$$4 \times \Delta^3 \times 1000$$

Formülünü kullanmaz.

$$4 \times \Delta^3 \times 1000 \rightarrow \; 4 \times \Delta^3 = 4 \times 42^3 = 296352$$

296352'ye ulaşmak için şunu tercih eder:
20504'ün elde edilmesi 10252'ye bağlıdır. 10252'nin elde edilmesi ise 328'e bağlı olduğundan önce 328 sayısına ulaşmak gerekir.

Sonra, ilk satırdaki iki, dördüncü satırda olan on bin iki yüz elli iki ile çarpıldığında, yirmi bin beş yüz dört olur. Üçüncü satırda olan iki yüz yetmiş beş bin sekiz yüz kırk sekizle toplanır, iki yüz doksan altı bin üç yüz elli iki olur. Bunun üzerine örnek:

4 2	ilk satır
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	ikinci satır
2 9 6 3 5 2	üçüncü satır
1 0 2 5 2	dördüncü satır
1 6 2	beşinci satır

Daha sonra, beşinci satırda olan iki, yanındaki **[64b]** on altı ile çarpılır, otuz iki olur. Söz konusu iki, kendisiyle çarpıldığında, dört olur. Bu dört, üçle çarpıldığında on iki olur, dördüncü satıra yazılır ve tümü üç yüz otuz iki olur. Daha önce dördüncü satırda yer alan sayıyla toplandığında, dördüncü satırın tümü on bin beş yüz seksen dört olur. Bunun üzerine örnek:

4 2	ilk satır
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	ikinci satır
2 9 6 3 5 2	üçüncü satır
1 0 5 8 4	dördüncü satır
1 6 2	beşinci satır

Sonra, beşinci satırda olan iki, kendisiyle çarpıldığında dört, yine ikiyle çarpıldığında sekiz olur. Beşinci satırın tümü yüz altmış sekiz olur.[52] Sonra, üçüncü satırda olan sayı bir basamak, dördüncü satırda olan sayı iki basamak ve

[52] 42 ile 4'ün çarpılarak elde edilmesi beklenen 168'e, burada 16 sayısının yanına 8'in getirilerek ulaşılmıştır.

beşinci satırda olan sayı üç basamak sağa ilerletilerek yazılır. [53]Bunun üzerine örnek:

[65a]

4 2	ilk satır
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	ikinci satır
2 9 6 3 5 2	üçüncü satır
1 0 5 8 4	dördüncü satır
1 6 8	beşinci satır

Sonra, birler basamağı üstündeki sıfırın üstü için yazılacak sayı bulunup, beşinci satırda da bunun aynısı yazılır. İlk satırda yazılan sayı, dördüncü satırda yazılan sayıyla çarpılıp, üçüncü satıra yazılır. Bulunmak istenen sayı bir olur. Söz konusu bir, birler basamağının üstündeki sıfırın üstüne yazılır. Beşinci satıra da aynısı yazılır. Bin altı yüz seksen bir olur. Bunun üzerine örnek:

4 1	ilk satır
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	ikinci satır
2 9 6 3 5 2	üçüncü satır
1 0 5 8 4	dördüncü satır
1 6 8 1	beşinci satır

[65b] Sonra, bin altı yüz seksen bir, ilk satırdaki birle çarpıldığında, bin altı yüz seksen bir olur, dördüncü satırda yazılır. Toplandığında, dördüncü satır, on kere yüz bin ve altmış bin seksen bir olur. Bunun üzerine örnek:

---

[53] Ancak basamak ilerletmeler, formüllerde olduğu gibi sağdan sola olmadığından, soldan sağa doğru basamak ilerletme önerilir.

4	2	1	ilk satır
0	0	0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1			ikinci satır
2 9 6 3 5 2			üçüncü satır
1 0 6 0 0 8 1			dördüncü satır
1 6 8 1			beşinci satır

Daha sonra, dördüncü satırdaki sayı, ilk satırdaki birle çarpıldığında, on kere yüz bin ve altmış bin seksen bir olur. Üçüncü satırdaki sayılarla toplanıp, yazılır. Bunun üzerine örnek:

4	2	1	ilk satır
0	0	0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1			ikinci satır
2 9 7 4 1 2 0 8 1			üçüncü satır
1 0 6 0 0 8 1			dördüncü satır
1 6 8 1			beşinci satır

Sonra, ilk satırda olan bir, üçüncü satırdaki tüm sayılarla çarpılıp, elde edilen çarpım **[66a]**, esas miktardaki sayıdan çıkarılır. Bu durumda, herhangi bir kalan olmamaktadır. O halde, söz konusu miktarın kökü[54] dört yüz yiğirmi bir olur. [55]

[54] dıl' olarak ifade edilmiş olup, dördüncü dereceden kök kastedilmektedir.

55

$$\Delta \ \textit{dördüncü dereceden kök için uygun olan tahminler}$$

$$N, \textit{kuvvet durumundaki sayının sırasıyla kullanılan grupları (dörtlü rakamlar)}$$

$$K \ \textit{da fark olmak üzere}$$

$$(\textit{fark olan } K, \textit{yanına sayının diğer grubu eklenmek suretiyle } N \textit{ konumuna gelir})$$

$$[(\Delta \times 10) + x]^4 \leq N$$

$$(\Delta^4 \times 10000) + (4 \times \Delta^3 \times 1000 \times x) + (6 \times \Delta^2 \times 100 \times x^2) + (4 \times \Delta \times 10 \times x^3) + x^4 \leq N$$

$$(4 \times \Delta^3 \times 1000 \times x) + (6 \times \Delta^2 \times 100 \times x^2) + (4 \times \Delta \times 10 \times x^3) + x^4 \leq N - (\Delta^4 \times 10000) = K$$

Formülün izah edilen kısmı şudur:

$$\left[(4 \times \Delta^3 \times 1000) + \left((6 \times \Delta^2 \times 100) + (4 \times \Delta \times 10 + x) \times x\right) \times x\right] \times x \leq K$$

$$4^4 \leq 314 \quad \textit{olduğundan} \quad \Delta = 4 \ \textit{olmalı}$$

$$314 - 256 = 58$$

$$\left[(4 \times \Delta^3 \times 1000) + \left((6 \times \Delta^2 \times 100) + (4 \times \Delta \times 10 + x) \times x\right) \times x\right] \times x \leq 581437$$

$$x = 2 \ \textit{olur}.$$

$$\left[(4 \times 4^3 \times 1000) + \left((6 \times 4^2 \times 100) + (4 \times 4 \times 10 + 2) \times 2\right) \times 2\right] \times 2 \leq 581437$$

$$x = 2 \ \textit{olur}.$$

$$(162 \times 2) + 9600 = 9924$$

$$324 + 9600 = 9924$$

$$(9924 \times 2) + 256000 = 275848$$

$$19848 + 256000 = 275848$$

$$275848 \times 2 = 551696$$

$$581437 - 551696 = 29741$$

$$42^4 \leq 297412081 \quad olduğundan \quad \Delta = 42\ olmalı$$

$$\left[(4 \times 42^3 \times 1000) + \left((6 \times 42^2 \times 100) + (4 \times 42 \times 10 + 1) \times 1\right) \times 1\right] \times 1 \leq 297412081$$

$$x = 1\ olur.$$

$$1681 \times 1 = 1681$$

$$1681 + 1058400 = 1060081$$

$$1060081 \times 1 = 1060081$$

$$1060081 + 296352000 = 297412081$$

$$298412081 \times 1 = 297412081$$

$$297412081 - 297412081 = 0$$

Ancak müellif

6×42^2 ve 4×42^3

islemlerinin yukarıdaki sonuçlarına farklı şekilde ulaşmıştır:

6×42^2 için takip ettiği yol:

$$[(16 \times 2) \times 10] + (2 \times 2 \times 3) = 332 \quad olmak\ üzere$$

$$ve\ \ 4 \times 4 = 16 \qquad 16 \times 2 \times 10 = 320 \qquad 320 + (2 \times 2 \times 2) = 328 \quad olmak\ üzere$$

$$\mathbf{9924} + 328 = 10252$$

$$332 + 10252 = 10584$$

Dördüncü dereceden kök alma işleminin sağlaması: [56]

$$\begin{array}{r} 421 \\ 421 \\ \hline 421 \\ 842 \\ 1684 \\ \hline 177241 \end{array}$$

4×42^3 için takip ettiği yol:

$$10252 \times 2 = 20504 \;\; olmak \text{ ü}zere$$

$$20504 + \mathbf{275848} = 296352$$

O halde

$$\sqrt[4]{31414372081} = 421$$

56 Sağlama

$$421 \times 421 = 177241$$

$$177241 \times 421 = 74618461$$

$$74618461 \times 421 = 31414372081$$

```
      421
   177241
   ------
   177241
  354482
 708964
 --------
 74618461
```

```
        421
   74618461
   --------
   74618461
  149236922
 298473844
 -----------
 31414372081
```

[66b][57]

[67a] Örnek: Cetvel yoluyla dördüncü dereceden kök alma: [58]

57 Sayfanın içeriğinde herhangi bir şey yoktur.

58

İlk satır	**4**	**2**	**1**
	0	0	0

İkinci Satır	3 2	1 5	4 6	1	4	3	7	2	0	8	1
		5	8								
		5	5 2	1 9	6 7	9 4	6[59] 1				
		2	2	9	7	4	1	2	0	8	1[60]

I	162	I^1	1681	$4 \times \Delta \times 10$
	x 2		x 1	
II	324	II^1	1681	
III	+ 9600	III^1	+ 1058400	$6 \times \Delta^2 \times 100$
IV	9924	IV^1	1060081	
	x 2		x 1	
V	19848	V^1	1060081	
VI	+ 256000	VI^1	+ 296352000	$4 \times \Delta^3 \times 1000$
VII	275848	VII^1	297412081	
	x 2		x 1	
VIII	551696	VIII^1	297412081	

59 VIII olsun.

60 VII^1 ve VIII^1 olsun.

Üçüncü Satır			2	9	1 6	0 3	6 5	0 2 [61]	0	8	1[62]
			9	6	3	5	2				
		2	2 7 1	0 5 9	5 8 8	0 4 4	4 8 [63] 8 [64]				
		2	5	6 [65]							
	2	5	6								
		6	4								
					1	0	6	0	0	8	1[66]
					1	0	5	1 8	6 4	8	1[67]
			1	0	5	8	4[68]				
			1	0	3 2	3 5	2 2				

[61] VI^{1} olsun
[62] V^{1} olsun.
[63] VII olsun.
[64] V olsun.
[65] VI olsun.
[66] IV^{1} olsun.
[67] II^{1} olsun.
[68] III^{1} olsun.

Dördüncü Satır					3	2	8				
				9	9	2	4[69]				
					3	2	4				
				9	6						
		9	6[70]								
		1	6								
Beşinci Satır								1	6	8	**1**[71]
							6				
							4				
					1	6	**2**[72]				
		1	6								
			4								

[69] IV olsun.
[70] III olsun.
[71] I[1] olsun.
[72] I olsun.

Sonuç

Aritmetiksel konular arasında o dönemde oldukça rağbet edilen kök alma işlemleri klasik dönem Osmanlı matematiği eserlerinde zaman zaman da olsa görülmekte ancak konunun detaylandırılarak değişik düzeylerde ele alınmasına daha seyrek rastlanmaktadır. *Câmi'u'l - Hisâb*'da ise beşinci dereceye kadar kök çıkarma metotlarının işlenmesi, eseri klasik dönem Osmanlı matematiğinin kalburüstü eserlerinden biri haline getirmiştir. *Câmi'u'l - Hisâb*'ın günümüze intikal eden pek çok nüshasının varlığı Osmanlı matematikçilerinin bu konuya ilgisiz kalmadıklarını göstermektedir. Üstelik eserin Türkçe oluşu, bu metotları anlaşılır kılarak, daha geniş bir kesime hitap etmesi bakımından önemlidir.

Kök alma işlemlerinde öncelikle, sayı, kök derecesine uygun olacak şekilde gruplandırılır. Sayının dördüncü dereceden kökü istendiğinde, bu sayının sırasıyla dörder rakamı ayrılmıştır. Kökü alınacak miktardan tam kökün geldiği basamakların üstüne "kök var", tam kökün gelmediği basamakların üstüne "kök yok" yazılmıştır. Bu durum, basamakları rasyonel-tam veya irrasyonel-yaklaşık kabul etmek olarak da anlaşılabilir. Yani bu ifade, kök için bulunan ilk tam sayıdan sonra, bulunacak ikinci tam sayıya kadar elde edilmeye çalışılan kökün kesirli olarak düşünüldüğünü gösterir. Ancak ikinci ve üçüncü dereceden kök alma işlemlerinde görülen yaklaşık kök hesapları, dördüncü dereceden kök alma metotlarında mevcut değildir.

Müellifin kök alma işlemlerindeki temel prensibi, kök alma derecesine uygun olacak şekilde binom açılımındaki terimleri ve katsayıları kullanmaktır. Yani sayının dördüncü dereceden kökü alınırken,

$$(a+b)^4$$

açılımındaki katsayılardan yararlanılmış ve elde edilmek istenen kökün farklı basamaklarına geçiş, 10'un kuvvetleriyle bu açılımda temsil edilmiştir:

$$\Delta \ \textit{kök için uygun olan tahminler}$$

$$\textit{N ve K sayının kullanılan rakamları olmak üzere}$$

$$[(\Delta \times 10) + x]^4 \leq N$$

$$(\Delta^4 \times 10000) + (4 \times \Delta^3 \times 1000 \times x) + (6 \times \Delta^2 \times 100 \times x^2) + (4 \times \Delta \times 10 \times x^3) + x^4 \leq N$$

$$(4 \times \Delta^3 \times 1000 \times x) + (6 \times \Delta^2 \times 100 \times x^2) + (4 \times \Delta \times 10 \times x^3) + x^4 \leq N - (\Delta^4 \times 10000) = K$$

$$\left[(4 \times \Delta^3 \times 1000) + \left((6 \times \Delta^2 \times 100) + (4 \times \Delta \times 10 + x) \times x\right) \times x\right] \times x \leq K$$

Gruplara ayrılmış sayının her bir grubu için uygun tahminler yapılarak aranan köke ulaşılmaya çalışılmıştır.

Dördüncü dereceden kök hesaplarında belirginlik kazanan bazı kural dışı işlemler mevcuttur. Burada müellifin binom açılımındaki terim ve katsayıları takip etmekten bazen kaçındığı ve kuralları esnetmek suretiyle sayıları kullanarak sonuçlara ulaştığı görülmüştür. Benzer bir yaklaşımın Simon Stevin'in aritmetik eserinde de olduğu düşünüldüğünde, dönemin matematik eserlerinde zaman zaman böyle durumlarla karşılaşılması olağandır.

Yöntemin teorik izahları genellikle uygulamaların içine serpiştirilmiş olup, hedefteki kuvvet durumundaki sayı üzerinden (yani sadece örnek üzerinden) istenen derecedeki köke geçiş aşamaları ve metotları kavratılmaya çalışılmıştır. Bununla beraber, bu izahlara paralel olarak, müellifin "cetvel" dediği şemaların oluşturulması ihmal edilmemiş, her bir aşamada elde edilen sayının metin içinde tarif edilen kademeye (satıra) doğru şekilde yerleştirilmesine özen gösterilmiştir. İşlem akışında, cetvel yardımıyla açıklanan aritmetiksel yöntemler, günümüzde polinom bölmelerini ve köklerini elde etmeyi sağlayan Horner metodunu andırmaktadır.

Neticede, nümerik (sayısal) analize matuf yapılan bu katkılar sayesinde, Ortaçağ İslam dünyası matematiğine ait birikimin Osmanlılara kazandırıldığını ve yetkin bir biçimde işlenerek olgunlaştırıldığını söylemek yanlış olmayacaktır.

Kaynakça

A. Yazma Eserler

Yusuf b. Kemal el- Bursevî, *Câmi'u'l- Hisâb*, Lala İsmail nr. 288; Cerrahpaşa Tıp Tarihi nr. 665 (eski nr. 307); Zeytinoğlu nr. 303/3, Cambridge nr. R.13.11.

Matrakçı Nasuh*, Umdetü'l- Hisab,* Antalya Tekelioğlu nr. 678.

B. Araştırma ve İnceleme Eserleri

AYDIN, Nuh - Lackhdar Hammoudi, Root Extraction by al- Kashi and Stevin, *Archive for History of Exact Sciences*, V. 69, 2015, pp. 291-310.

BERGGREN, John Lennart, *Episodes in the Mathematics of Medieval İslam*, Springer, Newyork 2003.

BOYER, Carl, *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, USA 2011.

FAZLIOĞLU, İhsan, "Hulasatü'l- Hisab", *İslam Ansiklopedisi*, C. 18, Türkiye Diyanet Vakfı, İstanbul 1998, s. 322-324.

DOSAY, Melek, *Kerecî'nin İle'l- Hesab el- Cebr ve'l- Mukabele Adlı Eseri*, TTK, Ankara 1991.

______________, "İstanbul'un Cazibesine Kapılan Bir Matematikçi: Mağribi", yayımlanmamış bildiri metni.

İHSANOĞLU, Ekmeleddin, *Osmanlı Matematik Literatürü Tarihi,* C. 1, IRCICA, İstanbul 1999.

JOHANSSON, Bo Göran, "Cube root extraction in medieval mathematics", *Historia Mathematica*, V. 38, 2011, pp. 338-367.

LİNG Wang - Joseph Needham, "Horner's Method in Chinese Mathematics: Its Origins in the Root Extraction Procedures of the Han Dynasty", *T'oung Pau*, Vol. 43, 1955, pp. 3345-401.

MANKİEWİEZ, Richard, *Matematiğin Tarihi*, çev: Gökçen Ezber, Güncel Yayıncılık, İstanbul 2002.

NEEDHAM, Joseph, *Science and Civilisation in China*, C. 3, Cambridge University Press, Cambridge 2012.

PARAKH, Abhishek, "Aryabhata's root extraction methods", *Indian Journal of History of Science*, V. 42, 2007, pp. 149-161.

Salih Zeki, *Asâr-ı Bâkiye*, C.2, haz: Melek Dosay Gökdoğan, Babil Yayıncılık, Ankara 2003.

SÜVEYSÎ, Muhammed, “Hesap”, *İslam Ansiklopedisi*, C.17, Türkiye Diyanet Vakfı, İstanbul 1998, s. 242-244.

RASHED, Rushdi, *The Development of Arabic Mathematics Between Arithemetic and Algebra*, Trans: A. F. W. Armstrong, Kluwer Academic, Dordrecht 1994.

_______________, “Matematik”, *İslam Ansiklopedisi*, C.28, Türkiye Diyanet Vakfı, İstanbul 2003, s.129-137.

SAYILI, Aydın, *Mısırlılarda ve Mezopotamyalılarda Matematik, Astronomi ve Tıp,* TTK, Ankara 1991.

Ek: Tenkitli Metin

Kısm-ı sâlis: Mâlu'l-mâl istihrâcınun beyânındadur. Pes, mâlu'l-mâlun mertebesi oldur kim bir 'adedün kim mâlu'l-mâlın taleb eylesen ve andan istihrâc eyledüğün[73] 'adedi, kendü nefsine (v)urasın, ne hâsıl olursa [evvelkiye ve giru evvelkiye] (v)urasın.[74] Ve andan dahi **[61a]** ne hâsıl olursa, mâlu'l-mâl diyesin. Pes (imdi), (mesfûrun) ihrâcına beş satır itmek gerek ki satr-ı evvele saffü'l-'aded (dirler.) Ve satr-ı sânîye, mâlu'l-mâl (dirler) ve satr-ı sâlis, üçünci darbdan hâsıl olan hâneye dirler. Ve satr-ı râbi', ikinci darbdan hâsıl olan a'dâdun hânesine dirler.Ve satr-ı hâmis, saff-ı dıl'a dirler. Bunun istihrâcı(nın) tarîki oldur ki bir 'aded bulub, yazalum ki anun mâlu'l-mâl(ı) matlûbdur [75]. Pes yazduğun a'dâdı bir muntak ve üç asam üzerine hisâb idesin.

*Misâl:*Üç yüz on dört bin yüz kırk üç kerre yüz bin ve yetmiş iki bin seksen bir 'adedün mâlu'l-mâlın taleb eylesen, pes , mezbûr a'dâdı yazasın. Ber-în misâl:

Misâl:

3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1 [76]

Ba'dehû, âhâd hânesinde vâki' olan a'dâdun üzerine (bir) sıfır koyub, mâl mâl diyesin. Ve 'aşerât ve mi'ât ve ülûf hânelerin hâli koyub ve 'aşerât ülûf hânesinde bir sıfır koyasın. (Ve) bu üslûb üzerine nihâyet hâneye varınca üç hâne[y]i hâli koyub, dördünci hâne üzerine sıfır koyasın .Ber-în misâl:

```
 0   0   0
3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1
```

Ba'dehû, bir 'aded bulub, dördün üzerine yazasın kim **[61b]** muntak-ı âhardur, ya'nî satr-ı evvelde yazasın ve mislin dahi satr-ı hâmisde yazasın, birbirine darb idesin, ne hâsıl olursa,[77] satr-ı râbi'de yazasın. Ba'dehû, satr-ı evvelde olan 'adedi, satr-ı râbi'de[78] olan 'adede darb idesin,[79] ne hâsıl olursa,[80] satr-ı sâlisde yazasın.[81] Satr-ı sâlisde yazduğun 'adedi gine satr-ı evvelde olan 'adede darb idesin. (Her) ne hâsıl olursa, satr-ı sanide ki asl-ı mâl hânesidür, ol

---

[73] ve andan istihrâc eyledüğün L T C : murâd eylediğin Z
[74] (v)urasın L T C : darb idesin Z
[75] mâlu'l- mâlı matlûbdur L Z C : mâl-ı matlûbdur T
[76]
31414372081 L C : 0 0 0 0 0 / 31414372081 Z : $\overline{31414372081}$ T

[77] ne hâsıl olursa L T C : hâsılını Z
[78] Yazasın. Ba'dehû … satr- ı râbi'de L Z C : - T
[79] idesin L T C : idüb Z
[80] ne hâsıl olursa L T C : hâsılını Z
[81] yazasın L T C : yazub ve gine Z

kadar ‘aded tarh idüb, bâkīsin yazasın. Pes, taleb olan ‘aded muktezâ-(y)ı hisâb üzere dört vâki‘ oldı. Dört ‘adedi satr-ı evvelde üçünci sıfrun üzerine yazasın kim dört üzeridür. Ve mislin dahi mukābelesinde satr-ı hâmisde yazasın. (Ber-în misâl:)

4	satr-ı evvel
0 0 0	
3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1	satr-ı sânî

Ba‘dehû, ol satr-ı evvelde yazduğun dört ‘adedi satr-ı hâmisde olan dört ‘adede darb id(esin kim) on altı ‘aded hâsıl olur. Satr-ı râbi‘de yazasın.

4	satr-ı evvel
0 0 0	
3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1	satr-ı sânî
16	satr-ı râbi‘
4	satr-ı hâmis

Ba‘dehû, satr-ı râbi‘de yazduğun on altı ‘adedi **[62a]** satr-ı evvelde olan dört ‘adede darb idesin kim altmış dört (‘aded) olur, satr-ı sâlisde yazasın.

4	satr-ı evvel
0 0 0	
3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1	satr-ı sânî
64	satr-ı sâlis
16	satr-ı râbi‘
4	satr-ı hâmis [82]

82

Ba'dehû, satr-ı evvelde olan dört 'adedi, satr-ı sâlisde yazduğun altmış dört 'adede darb idesin kim iki yüz elli altı[83] 'aded hâsıl olur. Asl-ı mâldan ol kadar 'aded tarh idüb, bâkī ne kalursa, yazasın. (Ber-în) misâl:

4	satr-ı evvel
0 0 0	
3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1	
2 5 6	
5 8	satr-ı sânî [84]

4	satr-ı evvel	4	satr-ı evvel
0 0 0		0 0 0 0 0 0	
3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1	satr-ı sânî	3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1	satr-ı sânî
64	satr-ı sâlis	64	satr-ı sâlis
16	satr-ı râbi'	16	satr-ı râbi'
4	satr-ı hâmis L T C :	4	satr-ı hâmis Z

[83] altı L Z C : - T

[84]

4	satr-ı evvel	4	satr-ı evvel
0 0 0		0 0 0 0 0 0	satr-ı sânî
3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1		3 1 4 1 4 3 7 2 0 8 1	satr-ı sâlis
2 5 6		2 5 6	satr-ı râbi'
5 8	satr-ı sânî L T C :	5 8	satr-ı hâmis Z

Baʻdehû, beşinci satırda olan dört ʻadedi, yine[85] kendü misline darb idesin kim on altı ʻaded olur ve satr-ı râbiʻde olan on altı ʻadedi dahi altı kendü misline darb idesin kim doksan altı ʻaded olur. Ve satr-ı râbiʻde olan altmış dört (ʻadedi) dört kendü misli idesin kim iki yüz elli altı (ʻaded) olur. Baʻdehû, satr-ı sâlisde **[62b]** yazduğun aʻdâdı bir hâne ve satr-ı râbiʻde olan aʻdâdı iki hâne ve satr-ı hâmisde olan aʻdâdı, üç hâne dest-i râst tarafına[86] nakl idesin. Ber-în misâl:

4	satr-ı evvel
0 0 0	
5 8 1 4 3 7 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 5 6	satr-ı sâlis
9 6	satr-ı râbiʻ
1 6	satr-ı hâmis

Baʻdehû, bir ʻaded bulub, ikinci sıfır üzerine, yaʻnî yedi üzerine[87] yazasın ve ol ʻadedün aynın satr-ı hâmisde yaza(sın), on altı yanına. Baʻdehû, satr-ı evvelde yazduğun ʻadedi, satr-ı hâmisde olan küllî ʻadede darb idesin. Ne hâsıl olursa, satr-ı çeharda yazasın, cümle idesin ve satr-ı çeharda olan külli ʻadedi, satr-ı evvelde yazdugun ʻadede darb idesin. [Hâsılını ve][88] satr-ı sâlisde olan küllî ʻadedi, satr-ı evvelde[89] yazdugun ʻadede darb idesin. Ne hâsıl olursa, satr-ı sânîden ol kadar ʻaded tarh idüb, bâkīsin yazasın. Pes, taleb olan ʻaded, mukntezâ-(y)ı hisâb üzere, iki **[63a]** vâkiʻ oldı. Mezbûr iki(y)i satr-ı evvelde yazub ve mislin dahi satr-ı hâmisde yazasın. (Ber-în) misâl:

satr-ı evvel		4				2				
		0				0				0
satr-ı sânî	5	8	1	4	3	7	2	0	8	1
satr-ı sâlis	2	5	6							
satr-ı râbiʻ			9		6					
satr-ı hâmis			1		6		2			

[85] yine Z C : dört L T
[86] tarafına L C : + yazasın ve T
[87] yedi üzerine L C : - T
[88] Ne hâsıl olursa L T C
[89] evvelde L C : + olan T

Ba'dehû, satr-ı evvelde vasatda vâki' olan iki ('adedi), satr-ı hâmisde olan yüz altmış iki 'adede darb (idesin). (Her) ne hâsıl olursa satr-ı râbi'de mukābelesinde sebt idesin. (Ber-în misâl)

4 2	satr-ı evvel
0 0 0	
5 8 1 4 3 7 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 5 6	satr-ı sâlis
3	
9 6 2 4	satr-ı râbi'
9 9 2 4	
1 6 2	satr-ı hâmis [90]

(Ve) cümle idesin (kim), dokuz bin dokuz yüz yiğirmi dört 'aded olur, yazasın. Ba'dehû, giru satr-ı evvelde olan iki 'adedi satr-ı râbi'de olan dokuz bin[91] dokuz yüz yiğirmi dört 'adede darb idesin kim, on dokuz bin sekiz yüz[92] kırk sekiz 'aded olur. Mukābelesinde satr-ı sâlisde yazasın. (Ber-în) *misâl:*

90

4 2	satr-ı evvel	4	satr-ı evvel
0 0 0		0 0 0	
5 8 1 4 3 7 2 0 8 1	satr-ı sânî	5 8 1 4 3 7 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 5 6	satr-ı sâlis	2 5 6	satr-ı sâlis
3		3	
9 6 2 4	satr-ı râbi'	9 6 2 4	satr-ı râbi'
9 9 2 4		9 9 2 4	
1 6 2	satr-ı hâmis C :	1 6 2	satr-ı hâmis L T

[91] dokuz bin L C : - T

[63b]

4 2	satr-ı evvel
0 0 0	
5 8 1 4 3 7 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 5 6	
1 9 8 4 8	satr-ı sâlis
2 7 5 8 4 8	

(Ve) cümle idesin, iki yüz yetmiş beş bin sekiz yüz kırk sekiz ʻaded olur. Satr-ı sâlisde sebt idesin. Baʻdehû, satr-ı sâlisde yazdugun küllî aʻdâdı, satr-ı evvelde olan iki ʻadede darb idesin kim beş yüz elli bir bin altı yüz doksan altı ʻaded olur. Asl-ı satr-ı sanide olan aʻdâddan ol mikdâr ʻaded tarh idüb, bâkīsin yazasın. *Misâl:*

4 2	satr-ı evvel
0 0 0	satr-ı sânî
5 8 1 4 3 7 2 0 8 1	
5 5 1 6 9 6	
2 9 7 4 1	

Baʻdehû, satr-ı hâmisde olan ikiyi yanındaki on altı ʻadede (v)urasın kim otuz iki olur,[93] satr-ı râbiʻde yazasın. Baʻdehû gine mezbûr iki(y)i kendü nefsine (v)urasın,[94] dört olur. Ve dördi gine ikiye (v)urasın sekiz olur. Satr-ı râbiʻde yazduğun otuz iki yanına yazasın ki üç yüz yiğirmi sekiz **[64a]** ʻaded olur. Evvelden dahi satr-ı râbiʻde olan dokuz bin dokuz yüz[95] yiğirmi dört ʻaded(e) (ilhâk idüb ve) cümle idesin kim satr-ı râbiʻde on[96] bin iki yüz elli iki[97] ʻaded olur, yazasın. Ber-în misâl:

---

[92] sekiz yüz L C : - T
[93] Dört adedi dört kendü misli idesin iki yüz elli altı aded olur … Baʻdehû satr-ı hâmisde olan ikiyi yanındaki on altı adede urasın kim otuz iki L T C : - Z
[94] (v)urasın L T C : darb idesin Z
[95] yüz L Z C : - T
[96] on L Z C : + iki T

4 2	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 7 5 8 4 8	satr-ı salis
1 0 2 5 2	satr-ı râbi‘
1 6 2	satr-ı hâmis [98]

Ba‘dehû, satr-ı evvelde olan iki ‘adedi, satr-ı râbi‘de olan on bin iki yüz elli iki ‘adede darb idesin kim yiğirmi bin beş yüz dört ‘aded olur. Satr-ı sâlisde olan iki yüz yetmiş beş bin sekiz yüz kırk sekiz ‘adede ilhâk idesin kim iki yüz doksan altı bin üç yüz elli iki ‘aded olur. Ber-în misâl:

4 2	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 6 3 5 2	satr-ı sâlis
1 0 2 5 2	satr-ı râbi‘
1 6 2	satr-ı hâmis [99]

[97] iki L T Z : - C

[98]

4 2	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 7 5 8 4 8	satr-ı salis
1 0 2 5 2	satr-ı râbi‘
1 6 2	satr-ı hâmis

L T C :

4 2	satr-ı evvel
0 0 0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 7 5 8 4 8	satr-ı salis
1 0 2 5 2	satr-ı râbi‘
1 6 2	satr-ı hâmis

Z

[99]

Baʻdehû, satr-ı hâmisde olan iki(y)i[100] yanında olan **[64b]** on altı ʻadede (v)urasın[101] kim otuz iki ʻaded olur, yazasın. Ve mezbûr iki(y)i kendü nefsine (v)urasın[102] kim dört olur. Mezbûr dört ʻadedi (dahi), üçe darb idesin kim on iki olur. Mezbûr on iki(y)i dahi satr-ı râbiʻde yazasın, cümle üç yüz otuz iki ʻaded olur. Evvelde satr-ı râbiʻde olan aʻdâda ilhâk olundukda(n sonra) cümle satr-ı râbiʻde on bin beş yüz seksen dört ʻaded olur. (Ber-în) misâl:

4 2	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 6 3 5 2	satr-ı sâlis
1 0 5 8 4	satr-ı râbiʻ
1 6 2	satr-ı hâmis [103]

---

[100] iki(y)i L T : ʻadedi Z : iki adedi C
[101] (v)urasın L T C : darb idesin Z
[102] (v)urasın L T C : darb idesin Z
[103]

4 2	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 6 3 5 2	satr-ı sâlis
1 0 2 5 2	satr-ı râbiʻ
1 6 2	satr-ı hâmis

L Z :

4 2	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 6 3 5 2	satr-ı sâlis
1 0 5 8 2	satr-ı râbiʻ
1 6 2	satr-ı hâmis

T :

2	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 6 3 5 2	satr-ı sâlis
1 0 2 5 2	satr-ı râbiʻ
1 6 2	satr-ı hâmis

C

Ba‘dehû, mezbûr satr-ı hâmisde olan iki ‘adedi kendü misline darb idesin kim dört olur ve dört ‘adedi giru ikiye darb idesin kim sekiz olur. Cümle satr-ı hâmisde yüz altmış sekiz ‘aded olur, yazasın. Ba‘dehû, satr-ı sâlisde olan a‘dâdı,[104] bir hâne ve satr-ı râbi‘de olan a‘dâdı[105] iki hâne ve satr-ı hâmisde olan a‘dâdı üç hâne dest-i rast tarafına nakl idüb, yazasın. (Ber-în) misâl:

[65a]

4 2	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 6 3 5 2	satr-ı sâlis
1 0 5 8 4	satr-ı râbi‘
1 6 8	satr-ı hâmis [106]

---

4 2	satr-ı evvel	4 2	satr-ı evvel
0 0 0		0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî	2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 6 3 5 2	satr-ı sâlis	2 9 6 3 5 2	satr-ı sâlis
1 0 5 8 4	satr-ı râbi‘	1 0 5 8 4	satr-ı râbi‘
1 6 2	satr-ı hâmis L T :	6 2	satr-ı hâmis Z C

[104] a‘dâdı L T C : - Z
[105] a‘dâdı L Z C : - T
[106]

4 2	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 6 3 5 2	satr-ı sâlis
1 0 5 8 4	satr-ı râbi‘
1 6 8	satr-ı hâmis L T :

Ba‘dehû, bir ‘aded dahi bulub, âhâd hânesinde vâki‘ olan sıfrun üzerin(d)e yazasın ve mislin dahi satr-ı hâmisde yazasın. Ba‘dehû, satr-ı evvelde yazduğun ‘adedi satr-ı hâmisde olan küllî ‘adede darb idesin. Ne hâsıl olursa, satr-ı çehârda[107] yazasın. Ba‘dehû, satr-ı evveldeki ‘adedi, satr-ı râbi‘de olan[108] küllî ‘adede darb idesin. Ne hâsıl olursa, satr-ı sâlisde yazasın. Pes, taleb ol(ın)an ‘aded bir vâki‘ oldı. Mezbûr biri, âhâd hânesinde olan sıfrun üzerine yazasın ve mislin dahi satr-ı hâmisde[109] yazasın. Bin altı yüz seksen bir ‘aded olur. (Ber-în) (misâl:)

4 1	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 6 3 5 2	satr-ı sâlis
1 0 5 8 4	satr-ı râbi‘
1 6 8 1	satr-ı hâmis

[65b] Ba‘dehû, mesfûr bin altı yüz seksen bir ‘adedi satr-ı evvelde olan bir ‘adede darb idesin, giru bin altı yüz seksen bir ‘aded (hâsıl) olur, satr-ı râbi‘de

---

4 2	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 6 3 5 2	satr-ı sâlis
1 0 5 8 4	satr-ı râbi‘
1 6 4	satr-ı hâmis

Z :

4 2	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 6 3 5 2	satr-ı sâlis
1 0 5 8 4	satr-ı râbi‘
6 2	satr-ı hâmis

C

[107] çehârda L T C : râbi‘de Z
[108] râbi‘de olan L T C : râbi‘deki Z
[109] hâmisde L T C : + tahtında Z

yazasın. Cümle idesin kim satr-ı râbi'de on kerre yüz bin[110] (ve) altmış bin seksen bir 'aded olur, yazasın. (Ber-în) (misâl):

4 2 1	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 6 3 5 2	satr-ı sâlis
1 0 6 0 0 8 1	satr-ı râbi'
1 6 8 1	satr-ı hâmis

[111]

Ba'dehû, satr-ı râbi'de olan[112] küllî a'dâdı, satr-ı evvelde olan bir 'adede darb idesin kim on kerre yüz bin ve altmış bin seksen bir 'aded olur. Satr-ı sâlisde olan a'dâda ilhâk idüb, cümle idüb yazasın.[113] (Berîn misâl:)

---

110 bin L T C : - Z

111

4 2 1	satr-ı evvel	4 2 1	satr-ı evvel
0 0 0		0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî	2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 6 3 5 2	satr-ı sâlis	2 9 6 3 5 2	satr-ı sâlis
1 0 6 0 0 8 1	satr-ı râbi'	1 0 6 0 0 8 1	satr-ı râbi'
1 6 8 1	satr-ı hâmis L T C :	1 6 8 0	satr-ı hâmis Z

112 olan L Z C : + a'dadı satr-ı evvelde ba'dehû râbi'de olan T

113 idüb yazasın L Z C : idesin T

4 2 1	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sâlis
1 0 6 0 0 8 1	satr-ı râbi‘
1 6 8 1	satr-ı hâmis [114]

Ba‘dehû, satr-ı evvelde olan bir ‘adedi satr-ı sâlisde olan külli a‘dâda[115] darb idüb, (her) ne hâsıl **[66a]** olursa,[116] asl-ı mâl hânesinde ol mikdâr a‘dâd tarh ide(sin). Pes, darb-ı mesfûrda hâsıl olan a‘dâdı asl-ı mâldan[117] tarh olundukda, bâkī ‘aded kalmadı. Pes, ma‘lûm oldı ki(m) zikr ol(ın)an mâlun dıl‘i dört yüz yiğirmi bir ‘aded (vâki‘) olur miş. Mîzan-ı mâlü'l-mâl:

114

4 2 1	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sâlis
1 0 6 0 0 8 1	satr-ı râbi‘
1 6 8 1	satr-ı hâmis

L Z C :

4 1 1	satr-ı evvel
0 0 0	
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sânî
2 9 7 4 1 2 0 8 1	satr-ı sâlis
1 0 6 0 0 8 1	satr-ı râbi‘
1 6 8 1	satr-ı hâmis

T

115 a‘dâda L T C : ‘adede Z
116 (her) ne hâsıl olursa L T C : hâsılını Z
117 asl-ı mâldan L T C : - Z

$$\begin{array}{r}
421 \\
421 \\
\hline
421 \\
842 \\
1684 \\
\hline
177241
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
421 \\
177241 \\
\hline
177241 \\
354482 \\
708964 \\
\hline
74618461
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
421 \\
74618461 \\
\hline
74618461 \\
149236922 \\
298473844 \\
\hline
31414372081
\end{array}$$

[66b][118]

[67a] Misâl-i mâlü'l- mâl bi tarîk-i cetvel.

satr-ı evvel 4 2 1

0 0 0 [119]

satr-ı sânî	3	1	4	1	4	3	7	2	0	8	1
	2	5	6								[123]
		5	8				[120]				
		5	5	1	6	9	6[121]				
			2	9	7	4	1[122]				

[118] Sayfanın içeriğinde herhangi bir şey yoktur.
[119] 4 2 1
0 0 0
L T Z : - C

[120] 58 L T C : 589741 Z
[121] 551696 L T C : 589741 Z
[122] 29741 L C : 29241 T : - Z
[123] 256 L T C : 25616962081 Z

			2	9	7	4	1	2	0	8	1
					1	0	6	0	0	8	1
			2	9	6	3	5	2			
		2	9	6	3	5	2[124]				
			2	0	5	0	4				
		2	7	5	8	4	8				
			1	9	8	4	8				
		2	5	6							
satr-ı sâlis	2	5	6								
		6	4								

124 29635 Z C : - L T

					1	0	6	0	0	8	1
								1	6	8	1
					1	0	5	8	4[128]		
			1	0	5	8	4				
					3	3	2[126]				
			1	0	2	5	2				
					3	2	8				
				9	9	2	4				
					3	2	4[127]				
				9	6[125]						
satr-ı râbi‘		9	6								
		1	6								

[125] 96 Z C : 6 L T
[126] 332 L T C : 12
32 Z

[127] 324 Z C : 9324 L T
[128] 10584 L T C : 1558 Z

								1	6	8	**1**
							6[129]				
							4				
					1	6	**2**				
		1	6								
satr-ı hâmis			**4**								

[129] 6 L T C : 82 Z