Muğla Üniversitesi SBE Dergisi
Güz 2000 Cilt:1 Sayı:1

KOİNTEGRASYON ANALİZİ

Osman Nuri YİĞİTBAŞI*
Ali Rıza FİRUZAN**

ÖZET

Kointegrasyon teorisi, ekonomik zaman serilerindeki uzun süreli hareketler arasındaki ilişki üzerinde çalışmayı dener. Ekonomik teorinin çoğu uzun süreli davranış ile ilgilidir ve bu teorilere test yapmak için en uygun en önemli bilgi "zaman serilerini trendden arındırmak veya farklarını almakla kaybolur" biçimindedir (Box – Jenkins yaklaşımında hiçbir analiz yapılmadan önce olduğu gibi). Kointegrasyon, bir hata düzeltim modeli (ECM) oluşumunu ve ayrıca VAR modeli üzerinde bazı sınırlamaları içerir.

Kointegrasyon testleri, boş hipotezi kointegrasyon yokmuş gibi belirtir. Birim kök testleri, birim kök boş hipotezine sahiptir. Bununla ilgili bazı problemler tartışılmıştır.

Kointegrasyon teorisi, Rasyonel Beklentiler Hipotezini (Rational Expectation Hypothesis) ve Pazar Etkinliği Hipotezini (Market Efficiency Hypothesis) test etmek için kullanılmaktadır. Önce kointegrasyon olmama durumu hipotezini red edilmesine ve sonraki bu hipotezin kabulüne dayanır. Bu testlerin sonuçları, tek değişken mi yoksa çok değişken ilişkilerinin mi ele alınıp alınmadığına duyarlıdır. Örneğin x ve y kointegre olmamış olabilir, fakat x, y ve z kointegre olmuş olabilir.

ABSTRACT

The theory of cointegration tries to scrutinize the relationship among the long-term motions in economic-time series. Most economic theories are concerned with serious information for testing these theories is "purifying time series from trend or disappear by subtracting". (as in Jenkin's approach in which before no analysis was done.) Cointegration involves a formation of an error-correcting model and also includes some limitations on the model VAR.

The tests of cointegration denotes a null hypothesis as tough there was not such a cointegration. The unit root tests have unit root a null hypothesis. Such problems related with this subject have been discussed.

The theory of cointegration has been used to test the hypothesis of rational expectations and the hypothesis of market efficiency.

It is based on first, the refusal of the state of the hypothesis of not being cointegration, then acceptation of this hypothesis.

The outcomes of these tests are sensitivie to examine whether one variable or relationship of variables.

For instance x and y may not be cointegre, but x, y or z may be.

* Dr.Öğr.Gör., Muğla Üniversitesi Rektörlüğü Enformatik Bölümü
** Yrd.Doç.Dr., Muğla Üniversitesi İ.İ.B.F. İşletme Bölümü

Ekonometride zaman serisi analizinde kointegrasyon analizi 1980 ortalarında literatüre girmiş ve son zamanlarda deneysel model kurmada kabul gören bir yöntem olmuştur.

Ekonometride önemli bir konu, kısa süreli dinamikleri uzun süren denge ile integre etmektir. Kısa süreli dengesizliğin modellenmesi için genellikle kısmi düzeltim modeli kullanılmaktadır. Bunun genişletilmiş bir hali geçmiş periyotların dengesizliğini de ($X^{*}_{t+1} = \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \ldots + \beta_k X_{t-k}$ da olduğu gibi) birleştiren "Hata Düzeltme Modeli" (Error Correction Model) dir. Kısa süreli dinamik analizde, önce genellikle farkların alınmasıyla, değişkenlerdeki trend elenir. Ayrıca bu yöntem ekonomik teorilerin hakkında çok şey söyleyeceği uzun süren ilişkilerle ilgili potansiyel değerli bilgiyi verir. Granger (1981) de geliştirilen, Engle ve Granger (1987) de işlenen kointegrasyon teorisi uzun süren dengeyle kısa süren dinamikleri integre etmeyi amaçlamaktadır.

Δy_t durağan bir zaman serisi veya I (1) ise, y_t zaman serisinin birinci dereceden farkının alındığı söylenir. Durağan zaman serileri için I (0) olur. "Saf gürültü", durağan serilerin özel bir durumudur. Δy_t I (1) ise, y_t zaman serisinin ikinci dereceden farkının alındığı veya I (2) olduğu söylenir. $y_t \sim$ I (1) ve $u_t \sim$ I (0) ise, o zaman bunların toplamı $Z_t = y_t + u_t \sim$ I (1) dir.

$y_t \sim$ I (1) ve $x_t \sim$ I (1) olduğu varsayılsın. $y_t - \beta x_t$ I (0) durumunda, β mevcut ise y_t ve x_t 'nin kointegre olduğu söylenir. Bu y_t ve x_t 'nin C I(1,1) oldukları biçiminde gösterilebilir. Burada,

$$y_t = \beta x_t + u_t$$

regresyon eşitliğinin mantığa uygun olmasıdır. Çünkü y_t ve x_t zaman üzerinde birbirinden çok uzak eğilim göstermezler. Böylece aralarında uzun süren denge ilişkisi vardır. y_t ve x_t kointegre edilmemişlerse, $y_t - \beta x_t = u_t$ de I (1) dir ve zaman geçtikçe birbirilerinden daha fazla uzak eğilim gösterebilirler. Böylece aralarındaki denge ilişkisi hiçbir zaman uzun süreli olarak kalmaz. Bu durumda y_t'nin x_t üzerindeki regresyonundan elde edilen y_t ve x_t arasındaki ilişki yapaydır.

Box-Jenkins yönteminde, zaman serileri durağan değil ise serileri durağan yapmak için farkları alınır ve sonra durağan serileri uygun hale getirmek için özel olarak işlenmiş ARMA modelleri kullanılır. x_t ve y_t gibi iki zaman serisi ele alındığında aynı şey yapılır. Bu farkların alınması işlemi, serilerdeki uzun dönem hareketi veya trendi elimine etmektedir. Bununla birlikte ilgilenilecek şey x_t ve y_t deki trendler arasındaki ilişkiyi açıklamaktır. Bu y_t'nin x_t'li regresyonu alınarak yapılabilir. Fakat bu regresyon eğer uzun süreli bir ilişki mevcut olmazsa, hiç bir anlam taşımamaktadır. y_t ve x_t 'nin kointegre edilip edilmediği irdelendiği zaman, y_t ve x_t 'deki trendler arasında uzun süreli herhangi bir ilişkinin olup olmadığı da irdelenmiş olmaktadır.

Mevsimsel düzeltim durumu da benzer bir durumdur. x ve y ’den mevsimsel bileşenleri elimine etmek ve daha sonra mevsimsel olmayan hale getirilen veriyi analiz etmek yerine x ve y ’deki mevsimsellikler arasında bir ilişkinin olup olmadığı sorulabilir. Bu “mevsimsel kointegrasyonun” arkasındaki düşüncedir. Bu durumda birinci farklar veya I(1) süreçleri hesaba katılmaz. Örneğin aylık verilerde 12. farklar $y_t - y_{t-12}$ dikkate alınır. Benzer olarak x_t içinde $x_t - x_{t-12}$ olur.

Ortak trendler, deterministik ve stokastik trendler olarak ikiye ayrılmaktadır. Trendsiz (zaman üzerinde bir regresyon kullanılarak) bir deterministik trend durumunu ve farkların alınması, stokastik bir trend durumunu varsayar. Kointegrasyon kavramı, ortak stokastik trendler” fikrine dayanır. Fakat bu ortak trendlerin tek türü değildir. Ayrıca biri ortak deterministik trendlere de sahip olabilir. Aynı kavram mevsimsel olanlar için de genişletilebilir. Kukla değişkenler kullanan mevsimsel düzeltimi, deterministik mevsimsel olarak ve Box-Jenkins yaklaşımında olduğu gibi farkların alınması ile mevsimsel düzeltimi, stokastik mevsimsel olarak varsaymaktadır. Mevsimsel kointegrasyon kavramı, stokastik mevsimsele uygulanır. Pratikte, deterministik ve stokastik bileşenlerin her ikisi de bir zaman serisinde bulunabilir. Bu durum göz önüne alınarak zaman serisi aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$x_t = T_t + S_t + \mu_t + \eta_t + \varepsilon_t$$

Burada T_t deterministik trendi (t de polinomial), S_t deterministik mevsimseli (mevsimsel kukla değişkenleri), μ_t stokastik bir trendi (I(1) süreci) ve η_t stokastik bir mevsimseli (üç aylık veri ile, $(1-L^4)$ durağandır) göstermektedir.

Deterministik bileşenlerin varlığını kabul etmemek, kointegrasyon üzerinde yanıltıcı bazı yorumlara götürür. Fakat analizi basitleştirmek ve kointegrasyon konuları üzerinde dikkatleri toplamak için, ele alınan zaman serilerinde deterministik hiçbir unsurun olmadığı varsayılmalıdır.

1. Kointegrasyon Regresyonu

İlk kez Engle ve Granger [1](1987) tarafından ortaya konulmuş olan aşağıdaki basit örnek ele alınabilir. “Saf gürültü”, korelasyonlu, iki hata terimi e_{1t} ve e_{2t} olsun. x_{1t} ve x_{2t} aşağıdaki modellerden elde edilen iki seri olsun.

$$x_{1t} + \beta x_{2t} = u_{1t} \qquad u_{1t} = u_{1,t-1} + e_{1t} \qquad (1)$$

$$x_{1t} + \alpha x_{2t} = u_{2t} \qquad u_{2t} = \rho u_{2,t-1} + e_{2t} \qquad |\rho| < 1 \qquad (2)$$

[1] R.E.Engle, C.W. Granger, “Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing”, *Econometrica,* c. 55, Oxford University Press, New York, 1987, s.263.

$u_{1t} \sim I(1)$ ve $u_{2t} \sim I(0)$ olduğuna dikkat edilmelidir. Model yalnızca $\alpha \neq \beta$ olduğunda içten tutarlıdır. Bu sınırlamanın nedeni, $\alpha = \beta$ olursa, her iki eşitliği de eşanlı olarak doyuran x_{1t} ve x_{2t} için herhangi bir değer bulmak imkansızdır. α ve β parametreleri, genelde belirlenmemiştir. Bunun nedeni içsel değişken yoktur ve hatalar ilişkilidir. x_{1t} ve x_{2t} için indirgenmiş formlar aşağıdaki gibidir.

$$x_{1t} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} u_{1t} + \frac{\beta}{\alpha-\beta} u_{2t}$$

$$x_{2t} = -\frac{1}{\alpha-\beta} u_{1t} + \frac{1}{\alpha-\beta} u_{2t}$$

Bunlar u_{1t} ve u_{2t} 'nin doğrusal kombinasyonlarıdır. Bu nedenle her ikisi içinde $I(1)$ 'dir. (2) eşitliği durağan iki $I(1)$ değişkenlerinin doğrusal kombinasyonlarını tanımlar. Böylece x_{1t} ve x_{2t} serileri kointegre edilmiş olur.

Bu durumda x_{1t} 'nin x_{2t} üzerindeki doğrusal en küçük kareler regresyonu α 'nın "tutarlı" bir tahmininin hızlı elde edilmesini sağlar. Böylece gerçek değere EKK tahminleyicisinden daha çabuk ulaşılmış olur.

Olağan durumda $\hat{\beta}$, β'nın EKK tahminleyicisi ise $\sqrt{T(\hat{\beta}-\beta)} \rightarrow 0$ 'dır.

Oysa burada $T \rightarrow \infty$ iken $T(\hat{\beta}-\beta) \rightarrow 0$ 'dır. x_{2t} 'nin x_{1t} üzerindeki bu regresyonu "Kointegrasyon (Yapan) Regresyon" olarak adlandırılır. x_{1t} ve x_{2t} 'nin diğer tüm doğrusal kombinasyonları (kointegrasyon regresyonu (2) dışındaki) sonsuz bir varyansa sahip olacaktır. (2) denkleminin EKK tarafından yapılan tahminde eşanlı eşitliklerin sapması yoktur. Çünkü x_{1t} ve x_{2t} arasındaki korelasyon, T de, $T \rightarrow \infty$ gittikçe sonsuza giden x_{2t} 'nin varyansından daha düşüktür. Bu $(-\alpha)$ 'nın bir tahminini elde etmek için x_1'in x_2 üzerinde, $(-1/\alpha)$ 'nın bir tahminini elde etmek için de x_1'in x_2 üzerinde regresyonunun alınıp alınmayacağının durumudur. $\rho = 1$ ise u_{2t} 'nin $I(1)$ olduğuna ve o zaman kointegrasyon regresyonunun elde edilemeyeceğine dikkat edilmelidir.

(1) ve (2) nolu eşitlikler dikkate alınarak otoregresif form aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\Delta x_{1t} = \beta\delta x_{1,\,t-1} + \alpha\beta\delta x_{2,\,t-1} + \eta_{1\,t} \qquad (3)$$

$$\Delta x_{2t} = -\,\delta x_{1,\,t-1} - \alpha\delta x_{2,\,t-1} + \eta_{2\,t}$$

Burada $\delta = (1-\rho) / (\alpha-\beta)$ ve η_{1t} ile η_{2t} e'nin doğrusal kombinasyonlarıdır. $z_t = x_{1t} + \alpha x_{2t}$ olarak tanımlanırsa,

$$\Delta x_{1\,t} = \beta\, \delta\, z_{t-1} + \eta_{1\,t}$$
$$\Delta x_{2\,t} = -\,\delta\, z_{t-1} + \eta_{2\,t} \qquad (4)$$

yazılabilir. (3) numaralı denklemleri basit model için VAR (Vector Auto Regressions) sunuluşunu vermektedir.

Hata düzeltim modelinin ECM formu,

$$\Delta y_t = \gamma \Delta x_t + \alpha(y-\beta x)_{t-1} + u_t$$

şeklindedir. Y 'deki değişmeyi, x 'teki değişme ve geçmiş dönemin dengesizliğine bağlar. Ele alınan model için bu formdaki ECM, $z_t = x_{1\,t} + \alpha_{2\,t}$ olarak tanımlandığına dikkat edilerek, basitçe çıkarılabilmektedir. Bu nedenle (2) numaralı denklem yardımıyla,

$$z_t = \rho\, z_{t-1} + e_{2t} \qquad \text{veya}$$
$$\Delta z_t = (\rho-1)\, z_{t-1} + e_{2t} \text{ veya}$$
$$\Delta x_{1t} = -\alpha\, \Delta x_{2t}\, (\rho-1)\, z_{t-1} + e_{2t} \qquad (5)$$

elde edilir. Bununla beraber, EKK ile tahminleme yapıldığında, bu denklemin x_{2t} ve e_{2t} arasındaki korelasyon nedeniyle parametrelerin tutarsız tahminlerini verdiği göz önünde bulundurulmalıdır. Yine bu denklemdeki tüm değişkenlerin I (0) olduğuna dikkat edilmelidir.

(4) denklemleri, bu modelin Δx_{1t} 'nin Δx_{2t} içermediği ve tersi durum dışında ECM ifadeleri olarak görülebilirler. (4) denklemleri, EKK ile tahmin edildiğinde η_{1t} ve η_{2t} serisel olarak ilişkisiz olduğu için tutarlı parametre tahminlerini verirler. (4) denklemlerinin tahmininden β'nın tutarlı bir tahmini elde edilebilir.

Bu aşamada sorulabilecek tek soru, (1) ve (2) denklemlerindeki α ve β parametrelerini belirlemenin nasıl başarıldığıdır? Burada hata terimlerinin ayırt edilmesinde eldeki bilgilerin işletilmesi ile parametrelerin belirlenmesi söz konusudur. u_{1t} tesadüfi bir yürüyüş ve

u_{2t} I(0) ‘dır [1]. İki denklemin doğrusal kombinasyonları göz önüne alınarak birbirine benzeyen bir denklem üretilebilir. Doğrusal kombinasyon (2) denklemi I(0) hatası üretemez. Burada α belirlenmektedir. Benzer şekilde hiç bir doğrusal kombinasyonun olmaması (1) denkleminde olduğu gibi bir tesadüfi yürüyüş hatası üretmez. Böylece de β belirlenmektedir. (2) denklemi α ‘nın tutarlı bir tahminini elde etmek için EKK ile tahmin edilebilir. Bu, I(1) olan x_{2t} ve I(0) olan u_{2t} ‘nin doğası sebebiyle eşanlılık sapmasının dışındadır. O zaman z_t kurulur ve (4) denkleminden β ‘nın bir tahmini elde edilir.

Engle ve Granger ilk önce kointegrasyon regresyonunu tahminlemeyi (bunun dinamik ve gecikmeleri içermeyen bir regresyon olduğuna dikkat edilmelidir) ve daha sonra ECM varyansları yoluyla kointegrasyon regresyonundan tahminlenen katsayıyı kullanan iki aşamalı tahmin yöntemi ile kısa süren dinamikleri tahminlemeyi önerirler. Diğerleri uzun süren parametreleri ve kısa süren dinamikleri ile eşanlı olarak tahminlemeyi önermişlerdir. Benarjee ve diğerleri (1) ve (2) denklemleriyle verilene benzer bir modele dayanan Monte Carlo çalışması yapmışlar ve küçük örneklerde (2) statik regresyonundan α tahminlerinin sapmalı olduğunu bulmuşlardır. Dinamik bir modelde uzun süreli parametreyi tahmin etmenin daha iyi olduğunu önermişlerdir.

I(1) değişkenlerindeki regresyonlar için söylenenler mevsimlik veri için de söylenebilir. Stokastik trendli değişkenleri içeren regresyonlarla ilgili tartışma, eğer y’nin farkları alınırda x ‘in alınmazsa, bu durumda y, I(0) ve x, I(1) ‘dir. y ‘nin x üzerindeki regresyonunun bir anlam taşımadığını akla getirmektedir. y ve x ‘in her ikisi de trende sahipse, bu durumda y ~I(1) ve x ~I(1) ‘dir. y ‘nin x üzerindeki regresyonu onlar kointegre olmadıkça yapılamaz, yani $y - \beta x \sim I(0)$ ise β vardır. Bu ortak stokastik trendler durumudur. Benzer bir durum mevsimlik veri ile olan durumdur. Eğer y mevsimlik olarak düzeltilmiş ve x düzeltilmemişse y’nin x üzerindeki regresyonu bir anlam taşımaz. Eğer x ve y’nin ikisi de stokastik mevsimlik elemanlara sahipse, y’nin x üzerindeki regresyonu (eğer bunlar yalnızca mevsimlik olarak kointegre edilmemişlerse) anlamlı olur. Yani ortak mevsimlik elemanlar vardır. Ayrıca y_t ve x_t’nin her ikisi de I(1) ise, $\Delta y_t = \beta \Delta x_t + \gamma x_{t-2} + u_t$ formunun bir regresyonu anlamsız olur; çünkü Δy_t, Δx_t ve u_t için I(0) iken, x_{t-2} için değildir. Böylece tüm değişkenlerin aynı düzeyde olmadıkları söylenebilir.

---

[1] Damodar N. GUJARATI, (Çev. Ü.ŞENESEN, G.G. ŞENESEN), *Temel Ekonometri,* Literatür Yayıncılık, 21. Bölüm, İstanbul, 1999, s. 733.

2. Vektör Otoregresyonu ve Kointegrasyon

Vektör otoregresyonu ve kointegrasyon arasında basit bir ilişki vardır. İki değişkenli durumda VAR modelindeki katsayılar matrisinin karakteristik köklerinin hepsi bire eşitse serilerin hepsi I(1)'dir; fakat kointegre edilmemiştir. Eğer köklerin biri kesin olarak birse, seriler kointegre edilmiştir. Eğer köklerin hiçbiri bir değilse, seriler durağandır. Bu nedenle ne integre edilmiş ne de kointegre edilmemiştir. Ele alınan (3) denklemiyle verilen VAR modeli,

$$X_{1t} = (1+\beta\delta)x_{1,\,t-1} + \alpha\beta\delta x_{2,\,t-1} + \eta_{1t}$$

$$X_{2t} = -\delta x_{1,\,t-1} + (1-\alpha\delta)x_{2,\,t-1} + \eta_{2t}$$

şeklinde yazılabilir. Katsayılar matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 1+\beta\delta & \alpha\beta\delta \\ -\delta & (1-\alpha\delta) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Karakteristik kökler 1 ve 1-$\boldsymbol{\alpha\delta}$ + $\boldsymbol{\beta\delta}$ 'dır. Böylece seriler kointegre edilmiştir. Eğer $\rho = 1$ ise, $\boldsymbol{\delta} = 0$ 'dır ve iki birim kök elde edilir. Bu durumda x_1 ve x_2 kointegre edilmemiştir. (3) denklemlerindeki katsayılar matrisi dikkate alınırsa, katsayılar matrisi A-I olduğundan birim kökler yerine, sıfır köklerden söz edilmelidir. A-I tekil bir matristir ve aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$A - I = \begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\delta & -\alpha\delta \end{bmatrix}$$

VAR modelinde kointegrasyon ilişkisinin bulunması için aşağıdaki yöntem izlenir. Önce fonksiyonun karakteristik kökleri bulunur. Sonra da her köke ait karakteristik vektörler elde edilir. Buradaki, $(A - \lambda I)\,C = 0$, yukarıdaki denklemler çözülerek elde edilmiştir.

Örneğin kök λ = 1'e uygun olarak,

$$\beta\,\delta\,C_1 + \alpha\,\beta\,\delta\,C_2 = 0$$

$$\delta\,C_1 + \alpha\,\delta\,C_2 = 0$$

burada $C_1 = -\alpha$ ise $C_2 = 1$ elde edilir. Benzer olarak diğer kök $(1-\alpha\delta + \beta\delta)$ için karakteristik vektörü $C_1 = -\beta$ ise $C_2 = 1$ olarak alınır. Bu vektörler ile aşağıdaki matris dikkate alındığında,

$$R = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bu matrisin tersi,

$$R^{-1} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

O halde bu matristeki satırlar arzu edilen doğrusal kombinasyonları verir:

$x_1 + \beta x_2$ durağan değildir (birim köke uyarak).

$-x_1 - \alpha x_2$ durağandır.

Bu örnekte, birim köklü VAR modeli ile başlanmıştır. Uygulamada, birim kökler için test yapılmalıdır. Bunun için aşağıdaki yol izlenir: 1'e en yakın kök $\hat{\gamma}$ ile gösterilebilir. Burada $n(\hat{\gamma}-1)$ ele alınır ve "μ" değerinin elde edilmesi veya tahmin edilmesi amacıyla Fuller (1976) 'da $18n(\hat{\rho}-1)$ veya $n(\hat{\rho}_{\mu}-1)$ için tablolara başvurulur [1]. "n" örnek büyüklüğünü ifade etmektedir. Örnek olarak aşağıdaki sonuçları üreten,

$$\begin{pmatrix} \Delta_{yt} \\ \Delta C_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34{,}16 \\ 31{,}50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}055 & -0{,}11 \\ 0{,}291 & -0{,}371 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ C_{t-1} \end{pmatrix}$$

ve 53 gözleme dayanan (1898 - 1950), y_t = gelir ve c_t = tüketimli VAR modeli ele alınmış olsun.

1 W. A. Fuller, *Introduction to Statistical Time Series,* John Wiley & Sons, New York, 1976.

A - I matrisi, - 0,0424 ve - 0,2740 karakteristik köklerine sahiptir. A'nın kökleri her birine 1 eklenerek elde edilmiştir. Bunlar, 0,9576 ve 0,8260'dır. Köklerden 0,9576'nın 1'den önemli derecede farklı olup olmadığını test etmek için 53(0,9576 - 1) = - 2,20 hesaba katılmalıdır. Fuller (1976)'da tablo haline getirilmiş % 5 değeri, - 13,29'dan daha az değildir. Böylece, bu kök 1'den önemli şekilde farklı değildir. Daha sonra karakteristik vektörlerinin R ve R^{-1} matrisleri hesaplanır. R^{-1} 'in iki sırası (C_t – 2,99y_t)'nin yaklaşık olarak bir birim kök süreci ve (C_t – 0,88y_t)'nin yaklaşık olarak durağan olduğu sonucunu verir. Burada yer alan "0,88", uzun vadeli tüketim fonksiyonunda marjinal tüketim eğilimini ifade etmektedir.

İki değişkenli durumda kointegrasyon katsayısı, (eğer mevcutsa) tek olarak belirlenmiştir. Ayrıca bu durumda VAR modeli için (A - I) matrisinin rankı 1'dir ve aşağıda sunulan (6) denkleminde görüldüğü gibi, CB′ olarak ifade edilebilir. Burada C ve B sıra vektörleridir ve B′ kointegrasyon vektörünü verir. Değişken sayısının ikiden fazla olduğu durumlarda, birden fazla kointegrasyon regresyonu olabilir ve bunlar tek olarak belirlenme ihtiyacında olmazlar. Örneğin, n değişkenin olduğu, (n-r) birim kök ve r kointegrasyon vektörü olduğu varsayılsın. Bu durumda (A - I) matrisinin rankı r < n olacaktır. Daha önceki gibi,

$$A - I = CB' \qquad (6)$$

yazılabilir. Buradaki C ve B , (n x r) boyutlu matrislerdir. B′ sıraları r farklı kointegrasyon vektörlerini verir. Ayrıca bunların hepsi anlamlı ekonomik açıklamalara sahip olmayabilirler. Bunlar arasından ekonomik anlamı olan doğrusal kombinasyonlar seçilmelidir. (n-1) birim kökün var olduğu durumda, koşul olarak r = 1 ise kointegrasyon vektörü tek olacaktır. n değişkenli genel bir VAR modeli ve k gecikmeleri için kointegrasyon vektörlerinin ve sayılarının belirlenmesi Johansen tarafından açıklanmıştır. Ancak bu anlatılan amaçlar için uygun değildir. Onun yerine sadece bir birim kök var ise, başka bir ifade ile diğer tüm değişkenler stokastik bir trend tarafından temsil ediliyorsa, gecikmeli VAR modeli için uygulanabilecek bir yöntem ele alınır. Eğer modelde 3 değişken varsa : n =3, (n-1) = 1 veya r = 2 olmaktadır. İki kointegrasyon vektörü vardır. Bir VAR modelinde :

1. AR modelinde katsayıların matrisi yazılır.
2. Karakteristik kökler bulunur.
3. Karakteristik vektörler bulunur. Bunlar, (A - λ I) x = 0 denklemini çözen x vektörleridir.
4. Sütunları bu vektörlerden oluşan matrise R adı verilerek, R^{-1} 'i bulunur. Daha sonra birim kök olmayan uygun R^{-1} 'in sıraları, kointegrasyon katsayılarını verir. Birim köke karşılıklı sıra, birim kök sürecinin katsayılarını verir.

Bir örnekle bu yöntem daha iyi açıklanabilir. Bir VAR modeli olarak,

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,38 & -0,02 \\ 0,8 & -0,38 & -0,02 \\ 0,8 & -0,38 & -0,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{1t} \\ e_{1t} \end{bmatrix}$$

ele alınsınırsa VAR modelinin katsayılar matrisinin karakteristik kökleri 1,0 ; 0,66 ve 0,42 olur. Kolon bu köklere karşılık gelen karakteristik vektör R matrisi,

$$R = \begin{bmatrix} -0,8165 & 0,1879 & 0,4483 \\ 0,4082 & 0,0167 & 0,4082 \\ 0,4082 & 0,9820 & 0,7952 \end{bmatrix}$$

ve

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} -0,8363 & 0,6275 & 0,1473 \\ -0,3408 & -1,7957 & 1,1141 \\ 0,8503 & 1,8956 & -0,1950 \end{bmatrix}$$

olmaktadır. R^{-1} AR'nin diagonal elemanları 1,0 ; 0,66 ve 0,42 olan bir diagonal matris olduğu göz önünde bulundurulmalıdır. Bu nedenle,

$$f_1 = -0,8363x + 0,6275y + 0,1473z$$

$$f_2 = -0,3408x - 1,7957y + 1,1141z$$

$$f_3 = 0,8503x + 1,8956y - 0,1950z$$

gereksinim duyulan üç doğrusal fonksiyondur. f_1 birim kök süreci, f_2 ve f_3 durağan süreçlidir. Bunlar kointegrasyon regresyonlarıdır.

Ayrıca f_2 ve f_3 'ün doğrusal kombinasyonlarının da durağan olduğu dikkate alınmalıdır. Örneğin f_2 ve f_3 'ü alınırsa ve y elimine edilirse, (x + 2z) kointegrasyon denklemi elde edilir. Benzer olarak, x'i elimine ederek (y-z) kointegrasyon denklemi ve z'yi elimine ederek (x + 2y) kointegrasyon denklemi bulunur. Bu modelde sıfır köke sahip (A - I) matrisinin rankı 2'dir. Bu durum,

$$\begin{bmatrix} -0,20 & -0,38 \\ -0,20 & -0,44 \\ -0,28 & -0,28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = CB'$$

biçiminde yazılabilir. B′ nün satırları, daha önce elde edilen (x + 2z) ve (y – z) kointegrasyon vektörlerini vermektedirler. Bu farklı kointegrasyon denklemleri arasından ekonomik anlama sahip olanlar seçilir. Bu örnekte f_1 genel stokastik trend olarak saptanmıştır.

Açıklamayı basitleştirmek amacıyla VAR modelinde yalnızca bir gecikmenin olduğu varsayılarak, model tartışılmıştı. k sayıda gecikmenin bulunduğu bir VAR modeli aşağıda görüldüğü gibi yazılabilir.

$$x_t = A_1x_{t-1} + A_2x_{t-2} + \dots + A_kx_{t-k} + \varepsilon_t \qquad (7)$$

$$\Delta x_t = B_1\Delta x_{t-1} + B_2\Delta x_{t-2} + \dots + B_{k-1}\Delta x_{t-k+1} + B_k\Delta x_{t-k} + \varepsilon_t \qquad (8)$$

Burada $B_i = -I + A_1 + A_2 + \dots + A_i$ $i = 1, 2, \dots, k$ durumundadır ve x_t I (1) ise Δx_t I (0) olmaktadır.

Eğer x_t'nin bazı doğrusal kombinasyonları durağan ise, x_t'deki değişkenler arasında bazı kointegrasyon ilişkileri vardır. Böyle bir durumda B_k matrisi,

$$B_k = -I + A_1 + A_2 + \dots + A_k$$

tam ranklı olmak zorunda değildir. Önceki tartışmada k = 1 'in elde edildiği durum ve $(-I + A_1)$ olduğu dikkate alınmalıdır.

Önceki tartışmalar ayrıca, eğer bir VAR modelindeki değişkenlerin bazıları kointegre edilmiş ise, bunun VAR modelinin parametreleri üzerinde bazı kısıtlamaları içerdiği izlenimini uyandırır. Sınırlandırılmamış VAR modellerinden yapılan tahminler iyi olmamaktadır. Bu nedenle parametreler üzerindeki bazı sınırlamalar Bayesyan VAR (BVAR) yaklaşımına yüklenmiştir. Kointegrasyon teorisi, VAR modeli üzerindeki bazı sınırlamaları koyabilmek için teorik bir temel verir. VAR modelleriyle tahminlerin yapılması, kointegrasyon teorisi tarafından zorlanan sınırlamalarla geliştirilerek bulunmuştur. Bunun yanısıra yapılan karşılaştırmaların çoğu, BVAR 'dan çok sınırlandırılmamış VAR ile oluşur. Yapılması gereken, BVAR tarafından üretilenlerle birlikte kointegrasyon sınırlamaları kullanan VAR modellerinden çıkan tahminleri karşılaştırmaktır.

Johansen ve Juselius para talebi fonksiyonları için, bazı uzun süreli tahmin denemeleri yapmışlardır [1]. Üçer aylık hazırlanmış verileri kullanarak, Danimarka ve Finlandiya için para talebi fonksiyonlarını tahmin etmişlerdir. Danimarka'nın verileri 1974-1'den 1987-3'e kadar olan 67 adet gözlemdir. Danimarka'nın verileri için yalnızca kointegre edilmiş ilişki vardır ve

[1] S. Johansen, K Juseliu, "Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration-with Applications to the Demand for Money," *Oxford Bulletin Economics and Statistics,* c. 52, 1990, s. 169-210.

kointegrasyon vektörünün açıklanması, para fonksiyonu için uzun süreli bir talep olarak basitleştirilmiştir. Fakat Finlandiya'nın verileri için 3 kointegrasyon vektörü vardır ve bu farklı yorumlara neden olmaktadır. Zira "kointegrasyon", ele alınan zaman serilerinin istatistiksel özelliklerine dayanan "Teorik bir ekonometri" kavramıdır. Kointegre edilmiş ilişkiler, ekonomik anlama sahip olmak ihtiyacına gerek duymazlar. Fakat gerek duymasalar da VAR modellerinden tahminlerin geliştirilmesinde kullanılabilirler.

Eğer birim kök değişkenlerinin bir seti kointegrasyon ilişkisini sağlarsa, tüm değişkenlerin basit birinci dereceden farklı ekonomik problemlere yol açabilir. n değişkenli genel VAR'ı sisteminde, eğer tüm değişkenler durağan değilse, düzeylerde sınırlanmamış bir VAR'ı kullanmak uygundur. Eğer değişkenlerin hepsi I(1) ise, fakat hiç kointegrasyon ilişkisi yoksa, o zaman birinci farklardaki sınırlandırılmamış bir VAR'ın uygulaması uygundur. Eğer r kointegrasyon ilişkisi varsa, bu durumda sistemin r durağan kombinasyonlarıyla bir VAR ve orjinal değişkenlerin (n-r) farkları olarak modellenmesi gerekir.

Her durumda, öngörümleme ile ilgilenilirse bazı kointegrasyon ilişkilerinin oluşumu herhangi bir ekonomik yoruma sahip olmasalar da VAR modellerinden elde edilen öngörümler geliştirmeye yardımcı olur. Ekonomik anlamı olmayan kointegrasyon ilişkilerinin çıkarılması gerekmez. Bu özellik, kointegrasyon testlerinin ve kointegrasyon ilişkilerinin kullanımında çok önemlidir.

3. Kointegrasyon ve Hata Düzeltim Modelleri (ECM)

x_t ve y_t kointegre edilmişse, aralarında uzun süren bir ilişki vardır. Üstelik kısa süren dinamikler hata düzeltim modeli (ECM) ile açıklanabilir. Bu Granger tanıtım teoremi olarak bilinir.

Eğer $x_t \sim I(1)$, $y_t \sim I(1)$ ve $z_t = y_t - \beta x_t$, I (0) ise o zaman x ve y'nin kointegre olduğu söylenir. Bu durumda Granger tanıtım teoremi, x_t ve y_t'nin en azından ρ_1 ve ρ_2'nin biri sıfır değil iken ve ε_{1t} ile ε_{2t} saf gürültü hataları iken;

$$\Delta x_t = \rho_1 z_{t-1} + \text{gecikmiş } (\Delta x_t , \Delta y_t) + \varepsilon_{1t}$$

$$\Delta y_t = \rho_2 z_{t-1} + \text{gecikmiş } (\Delta x_t , \Delta y_t) + \varepsilon_{2t}$$

formunun ECM'ler tarafından üretildiğinin düşünülebileceğini göstermektedir.

Granger ve Lee, kointegrasyon kavramının bir sonraki genellemesini önerirler. w_t'nin z_t'nin kümülatif bir toplamı veya

$$\Delta w_t = z_t \text{ olduğu, } \quad w_t = \sum_{j=1}^{t} z_{t-j}$$

$z_t \sim I(0)$ olduğundan, w_t I(1) olacaktır. O zaman x_t ve w_t kointegre edilmişse, x_t ve y_t ‘nin çoklu kointegre oldukları söylenebilir. Bu durumda x_t ve w_t de kointegre edilmiş olacaklardır. α‘nın kointegrasyon sabiti olduğu durumda $u_t = w_t - \alpha\, x_t \sim I(0)$ ile devam eder. x_t ve y_t çoklu kointegre edilmişlerse, Granger ve Lee aşağıdaki genelleştirilmiş ECM ifadesine sahip olduklarını gösterirler [1].

$$\Delta x_t = \rho_1 z_{t-1} + \delta_1 u_{t-1} + \text{gecikmiş } (\Delta x_t , \Delta y_t) \quad + \varepsilon_{1t}$$

$$\Delta y_t = \rho_2 z_{t-1} + \delta_2 u_{t-1} + \text{gecikmiş } (\Delta x_t , \Delta y_t) \quad + \varepsilon_{2t}$$

x_t = Satışlar, y_t = Üretim, $z_t = y_t - x_t$ = Envanter Değişimi, w_t = Envanter. Satışlar, üretim ve envanterin tümü I(1)’dir ve olası olarak kointegre edilmişlerdir. Envanter Değişimi I(0)’dır.

4. Kointegrasyon testleri

Kointegre edilmiş sistemlerin analizinde, önemli bir madde de kointegrasyon için testlerdir. İlk önce iki değişkenli x ve y durumunu göz önünde bulundurun. x ve y’nin ikisinin de I(1) olduklarını kontrol etmek için önce birim kök testleri uygulanır. Sonra y’nin x üzerinde (veya x’in y üzerinde) regresyonu alınır ve

$$u = y - \hat{\beta}\, x$$

dikkate alınır. Sonra da $\hat{u}$ üzerinde birim kök testleri uygulanır.

Eğer x ve y kointegre edilmişlerse $u = y - \beta\, x$, I(0) ‘dır. Eğer x ve y kointegre edilmemişlerse, u(1) olacaktır. Birim kök testleri u’ya uygulanacağı için boş hipotez “Bir birim kök vardır” şeklinde olacaktır. Böylece kointegrasyon testlerindeki boş ve alternatif hipotezler,

H_0 : u bir birim köke sahiptir veya x ve y kointegre edilmemiştir.

H_1 : x ve y kointegre edilmiştir.

şeklinde olacaktır. Burada diğer bir problem $\hat{u}$’nun gözlemlenmemesidir. Bu nedenle, kointegrasyon regresyonundan tahmin edilmiş olan $\hat{u}$ hata terimi kullanılır. Engle ve Granger bazı kointegrasyon testlerini önerirler. Fakat $\hat{u}_t$ ’de birim kök testleri için ADF testini kullanmanın en iyisi olduğunu ileri sürülmektedir.

Alternatif bir yöntem; VAR modelini kullanmak, VAR modelinin katsayılar matrisi A’nın karakteristik köklerini hesaplamak (veya genel AR modeli

[1] C. Granger, C. Lee, *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics,* John Wiley, New York, 1982, 21. Bölüm.

durumunda (8) denklemindeki B_k matrisinin kökleri) veya (λ - 1)'i dikkate alarak daha önce açıklanan testleri uygulamak ve Fuller (1976)'daki tabloları kullanmaktır.

Değişkenin ikiden fazla olduğu durumlar daha karmaşıktır. Eğer sadece bir birim kök varsa, VAR modeline dayanan ve daha önce açıklanan yöntemler kullanılabilir. Eğer bir birim kökten fazlası varsa, daha önce sözü edilen Johansen yöntemi kullanılmalıdır.

Birim kök testlerinde boş hipotez "Bir birim kök vardır" şeklindedir. Yani zaman serilerinin farklarının durağan olduğu iddia edilir. Eğer onu red edecek yeterli kanıt olmazsa boş hipotez muhafaza edilir. Kointegrasyon testleri durumunda boş hipotez "hiç kointegrasyon yoktur" şeklindedir. Red edecek yeterli kanıt olmadıkça boş hipotez muhafaza edilir. Boş ve alternatif hipotezlerin formüle edildiği yol ve bu testler için yaygın olarak kullanılan anlamlılık düzeyleri, oyun zarlarının birim kökler ve kointegrasyondan yana hileli olduğu fikrini uyandırırlar.

Birim kök testleri için boş ve alternatif hipotezler tersine çevrilirse, kointegrasyon testlerinin boş ve alternatif hipotezleri kurulabilir. Birim kök testlerinde boş ve alternatif hipotezler,

H_0 : x_t durağandır.

H_1 : x_t bir birim kök sürecidir.

y_t içinde aynı benzer durum söz konusudur. Daha sonra kointegrasyon testi için

H_0 : x_t ve y_t kointegre edilmiştir.

H_1 : x_t ve y_t kointegre edilmemiştir.

olarak yazılır.

5. Kointegrasyonun Özet Bir Değerlendirmesi

Kointegrasyon testleri, sürekli gelir hipotezleri, rasyonel beklentilerin testi, farklı pazarlardaki pazar etkinliğini ve satın alma gücü eşitliğinin testi gibi çeşitli problemler için kullanılmaktadır. Ayrıca bu testlerin kullanımı ile ve yorumlanması ile ilgili birçok problem vardır. Bir anlamda birim kök testleri ve kointegrasyon durumunda, testde çok fazla ve tahminlemede çok az üzerinde durulan nokta vardır.

Daha önce birim kök testleri ve kointegrasyon testleri için boş ve alternatif hipotezlerin formüle edilişi ve % 5 ile % 1 anlam düzeylerinin genel kullanımı tartışılmıştı. boş ve alternatif hipotezler tersine çevrilirse, sonuçlar da tersine çevrilebilir. Örneğin test birim kök için boş olarak kurulduğunda, boş hipotez genellikle red edilemez Eğer boş hipotez zaman serileri durağan ise (alternatifi birim köke sahip) yine boş hipotez alışılmış anlam düzeyleri kullanıldığında red edilemez. Boş hipotez kointegre edilmiş ve kointegre edilmemiş olduğunda iki kointegrasyon testleri ile aynı durumdadır.

Çok değişkenliye karşı tek değişkenli kointegrasyon regresyonları önemli diğer bir konudur. Örneğin, y ve x1 kointegre olmayabilir, fakat y, x1 ve x2 kointegre olabilir. Eğer y, x1 ve x2'nin tümü I(1) ise ve bunların I(0) olan doğrusal bir kombinasyonu mevcuttur.

Böylece $y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$ 'dir. Burada ε , I(0) iken (y, x_1, x_2) kointegre olmuşlardır. Fakat,

$$y = \beta x_1 + \mu$$

ele alındığında $\mu = \beta_2 x_1 + \varepsilon$, I (1) olduğundan y ve x_1'in kointegre olmadığı tesbit edilecektir. Bu alışılmış değişken problemidir. Bu durumda kointegrasyon olmama durumu hipotezi red edilmediğinden yorum yapmak yanlıştır. Örneğin, y ve x bağlantılı iki pazardaki fiyatları gösterirse, (eğer kointegrasyon olmama durumu hipotezi red edilmediyse) "iki pazarda etkin değildir" sonucuna varılır ki, bu yanlış bir sonuç olur.

Çoklu regresyona karşı basit durumda x_1 ve x_2 arasında ilişki yoksa, x_1'in katsayısı her iki regresyonda da aynı olacaktır. Kointegrasyon durumunda bu hal yeterli değildir. Kointegrasyonun tek değişkenli ve çok değişkenli testleri "tüm değişkenleri temsil eden sadece tek bir birim kök süreci olduğunda" aynı sonuçları verecektir. Alım-Satım oranlarıyla ilgili bir örnek ele alındığında, dört serinin ele alındığı durumda: VAR modelindeki matris yalnız bir birim köke sahip ise, tek değişkenli ve çok değişkenli testler aynı sonucu verecektir.

Kointegrasyon regresyonlarını tahminlemede ortaya çıkan diğer bir konu bağımsız değişken seçimidir. İki değişkenli durumda y'nin x üzerinde veya x'in y üzerinde regresyonunu ve regresyon katsayısının tersini almak asimptotik olarak pek fark yaratmaz. Fakat küçük örneklerde bu mümkündür. Değişken sayısı ikiden fazla olduğunda da durum aynıdır. Bunun yanı sıra bu problem Maksimum Likelihood (ML) yöntemi kullanılıyorsa ortaya çıkmaz. Bu problem SBEÇB (Sınırlı Bilgiyle En Çok Benzerlik Yöntemi) yöntemine karşı 2AEKK yöntemine benzerdir. Regresyon yöntemine dayanan 2AEKK tahminleri genelde ML yöntemine dayanan sabit LIML tahminleri normalizasyon için sabit değildirler.

Kointegrasyon regresyonları tahminlenirken genel regresyon ve eşanlı denklem modelleri durumunda tartışılan farklı varyanslılık, çoklu bağlantı (multicolineriti) gibi problemlerin çoğuna önem verilmez ve dikkat tüm analizin en büyük amacı varmış gibi kointegrasyon için testleme üzerinde toplanmıştır. Oysa I(1) değişkenli durumda bile bu problemlerin çoğuna önem verilmelidir ve onlar kointegrasyon testlerini de etkiler.

Son olarak uzun süreli denge ekonomik ilişkilerinin kointegrasyon regresyonlarını ele geçirdiği varsayılmaktadır. Kısmi düzenleme modelleri literatüründe dengeye ulaşmada içerilen zaman gecikmeleri ile olduğu kadar, uzun süreli denge ilişkilerinin tahminiyle de ilgilidir. Kointegrasyon tartışmalarında uzun süreli ilişkiler statik regresyonlardan tahminlenmiştir ve pek azının bir ECM tahmin edilmese de dengeye varmak için içerilen zaman gecikmelerine gereklilik olduğu söylenebilir. Dinamik modellerin tahminleri hakkındaki önceki tartışmalar çerçevesindeki uzun süreli parametrelerin ve kısa süreli dinamiklerin bir arada tahminlenmesi yöntemi daha iyi bir yöntem olacaktır. Ayrıca çoğu ekonomik zaman serilerindeki birim kök süreçlerinden yana olan ifadesinin hassas olduğu bulunmuştur ve dinamik ekonomik ilişkilerde çalışmak için tek araç olan kointegrasyon için endişeye gerek yoktur. Standart ECM ve VAR modellerini yardımcı diagnostiklerle tahminlemek daha az hassas olan bir yoruma götürebilir. ECM'ler tutarlı bir biçimde kısa süreli ve uzun süreli öngörümleri birleştirmede kullanılabilmektedirler.

KAYNAKÇA

CHATFIELD, C. (1989), The Analysis of Time Series An Introduction, 4. Baskı, Chapman and Hall.

ENGLE R.E., GRANGER C.W., (1987), "Cointegration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing", *Econometrica*, c. 55, Oxford University Press, New York, s.263.

ENGLE R.E., GRANGER C.W., (1991), der. *Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration,* 13. Bölüm, Oxford University Press, New York.

FULLER W. A., (1976), *Introduction to Statistical Time Series,* John Wiley & Sons, New York.

GRANGER C., LEE C., (1982), *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics,*John Wiley, New York, 21. Bölüm.

GUJARATI D. N., (1999), Çev. Ü.ŞENESEN, G.G. ŞENESEN, *Temel Ekonometri,* Literatür Yayıncılık, 21. Bölüm, İstanbul, s. 733.

JOHANSEN S., JUSELİU K, (1990), "Maximum Likelihood Estimation and Inference on Cointegration-with Applications to the Demand for Money," *Oxford Bulletin Economics and Statistics,* c. 52, s. 169-210.

MADDALA, G.S. (1992), Introduction to Econometrics, 8. Baskı, Macmillan Pub.Com., New York.

UTKULU, U. (1993), “Cointegration Analysis: An Introductory Sureway with Applications to Turkey”, 1. Ulusal Ekonometri ve istatistik Sempozyumu, İzmir, s. 303-324.

ÜÇDOĞRUK, Ş. (1993), “Otoregresif Zaman Serisi Modellerinde Durağanlığın Sağlanmasında İki Farklı Yöntem”, 1. Ulusal Ekonometri ve istatistik Sempozyumu, İzmir, s. 453-466.