Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Eğitim Bilimleri Dergisi / Journal of Educational Sciences
Yıl / Year: Ocak / January 2016 • Cilt-Sayı / Volume-Issue: 43 ss/pp. 43-66 • ISSN: 1300-8889 • DOI: 10.15285/ebd.25354

Topolojinin ilkokul, ortaokul ve lise matematik dersi öğretim programlarında ele alınmasının tartışılması

Ali DELİCE*
K. Gizem KARAASLAN**

Öz

Geometri öğretiminde yüzyıllarca Öklid geometrisinin etkisinde kalınmışken, geometrinin kapsamının genişlemesi ve çeşitli dallara ayrılması öğretilecek geometri konularının da güncellenmesi ihtiyacını ortaya çıkarmıştır. Bu çalışmada geometri ve cebir ilişkileri içeren, birçok farklı disiplinde uygulama alanı bulunan topolojinin matematik eğitimi literatüründe ilkokul, ortaokul ve lise düzeylerinde nasıl ele alındığı incelenmiştir. Nitel paradigmaya sahip araştırmada doküman analizi tekniği kullanılmıştır. Elde edilen veriler içerik analizi ile değerlendirilmiştir. Araştırmada topolojinin temelde eğriler, çizgeler, yüzeyler ve topolojik dönüşümler konuları bazında ele alındığı görülmüş bu konularda ele alınan topoloji kavramlarının neler olduğu belirlenmiştir. Elde edilen bulgulara dayanarak topolojinin ilkokul, ortaokul ve lise matematik öğretim programlarında yer alabilmesi durumu ve bu durumdaki muhtemel katkısı tartışılmıştır.

Anahtar kelimeler: Topoloji, matematik eğitimi, öğretim programı

Discussing the place of topology in primary, secondary and high school curriculum

Abstract

Although the geometry learning was influenced by Euclid Geometry, it appears that the separation of various branches resulted in the necessity of expanding the scope of geometry. In this study how topology was examined as a part of the mathematics curriculum in primary, secondary and high schools. The document analysis was used in the qualitative study. The data were analyzed by using the content analysis. The results show that the curves, graphs, the surface and the topological

* Doç. Dr., Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, OFMA Bölümü, alidelice@marmara.edu.tr
** Araş.Gör., Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, kgizemyig@mehmetakif.edu.tr

transformation were disscussed in the study of topology and the topological terms were. delineated. Whether the topology should be included in primary, secondary and high school curriculums has been discussed based upon the findings of the study.

Keywords: Topology, mathematics education, mathematics curriculum

Giriş

Ülkelerin eğitim sistemleri güncel gelişmelere göre yeniden yapılandırılmaktadır. Bu süreçte teknolojik gelişmeler, öğretim yöntemlerindeki gelişmeler, bilginin yeniden yapılandırılması, sosyal beklentiler gibi bileşenler etkili olmaktadır (MEB, 2011, s. 6). Son dönemlerde Türk eğitim sisteminde ilkokul, ortaokul ve lise öğretim programlarında çeşitli reformlar ve güncellemeler gerçekleşmiştir. Bu reform hareketlerinden etkilenen alanlardan bir tanesi de matematik eğitimidir, çünkü ortaya koyulan yeni kuramlar ve yaklaşımlar, matematikten beklenilenlerin, matematiğin nasıl kullanıldığının, matematik öğrenme ve öğretme süreçlerinin yeni baştan oluşturulmasına katkı sağlamaya çalışmaktadır (NCTM, 2010; MEB, 2013).

Matematik ile yaşam arasında ilişkilendirme yapmaya yardımcı olan görsel ve cebirsel temsillerin uzamsal beceriler ve görselleme yardımıyla birlikte kullanıldığı geometri matematiğin içerisinde önemli bir yere sahiptir. Geometri alanındaki gelişmelere bakıldığında, geometrinin yıllarca Öklid geometrisinin etkisinde kaldığı, 17. yy'a kadar aksiyomatik yaklaşımla geliştirildiği ve şekillerin metrik özellikleriyle sınırlı kaldığı görülmektedir. İlerleyen zamanlarda şekillerin metrik olmayan özellikleri de önem kazanmaya başlamıştır. 19. yüzyılın yarısından sonra Öklid geometrisinden bağımsız olarak projektif geometri, afin geometri ve topoloji yeni geometri sistemleri olarak alandaki yerini almıştır (Hacısalihoğlu, 1975, s. 1-16). 1991 yılı itibariyle, sıralamakta ve hatırlamakta zorlanılacak 50'den fazla geometri çeşidi olduğu görülmektedir (Malkevitch, 1991, akt. MEB, 2010, s. 6).

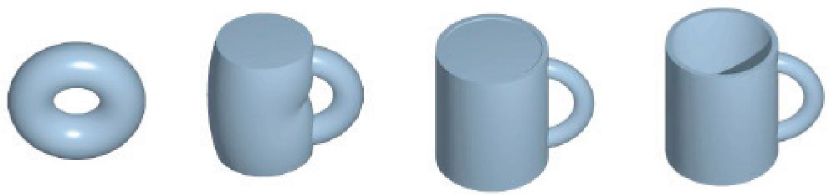
Matematik dersi öğretim programının paradigmasının değişmesi sonucu, ilkokul, ortaokul ve lise öğretim programlarında yer alan konuların gerçek yaşama dayandırılarak ve formallikten uzak kalınarak matematiksel kavram ve özelliklerin somut deneyimlerden ve sezgilerden yola çıkarak öğrencilerin kendileri tarafından oluşturulması ön plana çıkmış ve vurgulanmıştır (MEB, 2005a; MEB, 2005b). Öğretim programlarında benimsenen yaklaşımının değişmesine paralel olarak programda içerilen konularda da bazı farklılıklar olmuştur. Örneğin Öklid geometrisine kıyasla doğanın modellenmesinde daha başarılı olduğu belirtilen fraktal geometri (Baki, 2001), 2013 güncellemesinde olmamasına rağmen ilk reform hareketiyle öğretim programlarında yer almıştır. Programda fraktal geometriye yer verilerek gerçek yaşama dayalılığın yanında öğretim programlarında yer alan amaçlara ulaşılmasında fraktal geometriden yararlanılabileceği de vurgulanmıştır (Delice, 2011). 2010 yılında yayınlanan 10. sınıf geometri öğretim programında Öklid postulatlarına yer verilmiş ve Öklid'in 5. postulatının sorgulanmasıyla Öklid dışı geometrilere kısa bir giriş yapılmıştır (MEB, 2010, s. 75). Bunun yanında 2005 yılında ilköğretim matematik öğretim programına (MEB, 2005, s. 38) girmesinden sonra, 2010 yılında yayınlanan 10. sınıf ve

11. sınıf geometri öğretim programlarında fraktal geometriye yer verilerek öğretim programında yer alan geometri türlerinde çeşitlilik sağlanmıştır. Ancak yine ihtiyaca göre güncellenen 2013 öğretim programında geometriye ayrı bir öğretim programı olarak değil matematik öğretim programı içerisinde bir öğrenme alanı olarak yer verilmiştir. Bu güncellemelerde Öklid dışı geometriler ve fraktal geometri konuları, geometri öğrenme alanı içerisindeki konular arasında yer almamıştır (MEB, 2013). Fakat yine de farklı geometri çeşitlerinin öğretim programı çerçevesinde tartışılmasının kendini yenileyen ve geliştiren konu ve paradigmalar bağlamında önemli olduğu düşünülmekte, ayrıca öğretim programındaki son iki değişiklikte vurgulanan matematiğin gerçek hayat uygulamaları ve matematik geometri ilişkilendirmeleri bağlamında katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Geometri çeşitleri belirlenirken, dönüşümler altında değişmeyen özelliklerden yararlanılmıştır. Dönüşümler altında değişmeyen özelliklere göre geometriler sınıflandığında, en geniş geometrinin topoloji olduğu söylenebilir. Topoloji, Öklid geometrisi ve diğer popüler geometri çeşitlerinden afin geometri ve projektif geometriyi kapsamaktadır (Kidder, 1976). Öklid geometrisi dönüşümler açısından incelenirse, bu geometride yansıma, öteleme, dönme dönüşümlerinin uygulanmasıyla değişmeyen özelliklerin ele alındığı ve iki nokta arasındaki uzaklığın korunduğu görülür (Arnold, 1963, s. 22). Topolojide açıklık-kapalılık, iç, dış ve sınır noktaları, noktaların sırası ve bağlantılılık özellikleri korunur (Kidder, 1976). Buna göre topolojik dönüşümler altında daha az sayıda özellik korunmaktayken Öklid dönüşümlerinde topolojik dönüşümler altında korunan özelliklere ek olarak uzunluk, açıların ölçüsü gibi daha fazla özellik korunmaktadır (Kidder, 1976). Topolojik dönüşümler altında daha az sayıda özellik korunduğundan topolojinin daha genel yani daha geniş kapsamlı bir geometri olduğu söylenebilir. Topolojiye farklı açılardan yaklaşmak öğretim programlarındaki muhtemel yeri hakkında fikir edinebilmekte yardımcı olacaktır, bu bağlamda topoloji önce informal sonrada matematiksel olarak ele alınacaktır.

Topoloji dönüşümler açısından matematiksel tanımlar kullanılmadan açıklanacak olursa, topolojide kabul edilen dönüşümler yer değiştirmek, germek, döndürmek, bükmek, çekmek ve sıkıştırmak gibi elastik hareketlerdir. Porter'a (2009) göre geometrinin bir genişlemesi olan topoloji matematiğin bir alt dalıdır. Topoloji kelimesi ise hem çalışma alanı hem de belirli özellikleri sağlayan kümeler ailesi anlamında kullanılmaktadır.

Çalışma alanı olarak topoloji ise kendi ve tersi sürekli olan dönüşümler altında değişmeyen özellikleri incelemektedir. Bir cismin şeklinin deforme olması, ancak birebir, kendisi ve tersi sürekli olan bir dönüşümle yani informal olarak fonksiyonun kendisinin ve tersinin birbirine yakın noktaları yakın noktalara dönüştüren bir dönüşüm olmasıyla mümkündür (Flegg, 1974, s. 17-18). Örneğin, bir simidin şekil verilmesi kolay elastik bir maddeden yapıldığını düşünürsek sıkıştırıp eğip bükerek bu nesneyi bir kahve fincanı şekline çevirebiliriz. Dolayısıyla bir kahve fincanı ve bir simit topolojik olarak eş nesnelerdir. Şekil 1'de bir simidi bir kahve fincanına çeviren deformasyonun basamakları verilmiştir. Bu nesnelerin hepsi topolojik olarak birbirine eşdeğerdir. Bu çalışmada topoloji, topolojik dönüşümler altında değişmeyen özelliklerin incelendiği geometri anlamında kullanılmıştır.



Şekil 1. Bir simidin bir kahve fincanına deformasyonu (Homeomorphism, 2015)

Topoloji matematiği tüm kümelere genellemeye imkân verdiğinden matematiksel konulara daha geniş bir açıdan bakmayı (Narlı, 2010) ve metrik geometri, küme teorisi, mantık gibi birçok alanın daha iyi anlaşılmasını sağlar (Wallrabenstein, 1973). Geometri çerçevesinde topoloji ele alındığında, projektif geometri, afin geometri ve Öklid geometrisi gibi diğer geometriler de topolojinin özelleştirilmesi sonucu oluşur (Kaya, 2005, s. 16). Bundan daha çarpıcı olarak topoloji bilmenin Öklid geometrisini de aydınlatacağı vurgulanarak, topoloji konularının basit kapalı eğriler, iç ve dış, doğruları ayıran noktalar, düzlemi ayıran doğrular gibi düzlem geometrisi konularıyla ilişkili olduğunu belirtilmiştir (Yates, 1971). Özetlemek gerekirse, topolojinin farklı geometriler arasındaki ilişkileri görmeyi sağlayacağı ve geometrik ilişkilere farklı bir gözle bakmayı sağlayacağı ifade edilmektedir. Temelinde kümeler ve geometriyi barındıran bu önemli matematik alanının basit seviyelere indirilerek öğretilmesinin gelişen matematik alanını yansıtması bakımından, yeni programın yaklaşımına uyacağı düşünülmektedir.

Bilgisayarların birbirlerine bağlanma şekilleri, coğrafi verilerin konumsal analizleri (Karaş ve Batuk, 2005), mimari tasarım (Tarım, 2006), dijital tıp ve yapay zekâdan dil çalışmalarına kadar (Narlı, 2010) farklı disiplinlerde de topoloji uygulama alanı bulmaktadır. Farklı disiplinlerin gerçek yaşamla ilişkisi düşünüldüğünde topolojinin insanların hayatındaki öneminin de ortaya çıktığı söylenebilir. Bunun yanında topolojinin bir alt alanı olan çizge kuramı da birçok günlük hayat problemine çözüm sunmaktadır. Çizgeler sonlu sayıda noktalardan ve bunları birbirine bağlayan çizgilerden yani kenarlardan oluşur (Flegg, 1974, s. 58). Gerçek yaşamdaki çeşitli durumlar noktalarla ve bu durumlar arasındaki ilişkiler ise çizgilerle gösterilerek, çizgeler oluşturup bu durumlar topolojik olarak ifade edilebilir. Her gün kullanılan ulaşım araçlarında, durakları gösteren şemalarda bile çizgelerin kullanıldığı Şekil 2'de görülmektedir. Yani çizgeler, nesneler ve olaylar arasındaki ilişkileri farklı şekilde ortaya koyacak bir yol sunmaktadır. Topolojide kullanılan bu tarz çizimler öğrencilerin düşüncelerini sistematik bir yolla sunmasına imkân vermektedir (Wallrabenstein, 1973).

Şekil 2. Ankara Metro Haritası (Ankara Metro Haritası, 2012)

Matematik dışında yer alan disiplinlerde faydalanılması ve ayrıca günlük hayatta uygulama bulmasının yanında topoloji matematik eğitiminde de az da olsa çalışılmış bir alandır. 1950'lerden sonra matematik eğitimi alanında topolojiyi içeren çeşitli çalışmalar görülmektedir. NCTM'nin (National Council of Teachers of Mathematics) yayınladığı yıllık kitaplarda topoloji kavramlarını içeren çeşitli bölümlerin bulunması örnek olarak gösterilebilir (Bing, 1957; Blank, 1963; Crowell, 1963; Johnson, 1963; akt. Yates, 1971, s. 12). Topolojinin eğitim bağlamında ele alınmasının genellikle Piaget ve Inhelder'in (1956) çalışmalarına dayandığı görülmektedir. Bu araştırmacılar "topolojik öncelik tezi (topological primacy thesis)" olarak bilinen iddiayı ortaya atmışlardır. Bu teze göre küçük çocuklar uzayı ilk önce topolojik, sonra projektif ve en son Öklid olarak algılamaktadırlar (Baki, 2006; Darke, 1982). Buna göre önce süreklilik, sıra gibi topolojik özellikler, sonra perspektif gibi projektif özellikler, en son olarak da uzaklık gibi Öklid özellikler algılanır. Bilim insanları arasında büyük yankı uyandıran bu iddiayı desteklemek veya çürütmek için çeşitli özellikteki katılımcılarla çalışmalar yapılmıştır (Darke, 1982). Topoloji öncelik tezinin ortaya atılmasından sonra topolojiyi öğretim programı bağlamında ele alan çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Topoloji konularını içeren çeşitli öğretim materyalleri geliştirilmiş olup bu çalışmalar farklı yaş gruplarına ve matematik seviyelerine hitap etmektedir (Ör: Powell, 1965; Foley, 1967; Mahoney, 1991). Detaylar bu çalışmanın bulgular kısmında tartışılmıştır. Bu çalışmaların yanında öğrencilerin informal topolojik kavramları kendiliğinden geliştirdikleri ve okula bu önbilgilerle geldikleri son yıllardaki çalışmalarla ortaya koyulmuş, öğrencilerin geometrik akıl yürütmelerinin geliştirilmesinde ve dönüşümlere ilişkin fikirlerin oluşturulmasında sadece Öklid geometrisiyle sınırlı kalınmaması, topoloji ve hatta diğer geometriler bağlamında da bu çalışmaların yapılabilmesi gerekliliği vurgulanmıştır (Greenstein, 2014). Ancak ülkemizde topoloji yalnızca lisans seviyesinde bir ders olarak yer almakta, günümüze kadar olan lisans öncesi (lise, ortaokul ve ilkokul) matematik ve geometri öğretim programlarında topoloji konuları yer almamaktadır.

Türkiye'deki reform sonrası öğretim programlarına bakıldığında matematiğin birbiriyle ilişkilendirmenin, disiplinler arası ilişkilerin, matematiksel düşünceleri farklı temsillerle ifade etmenin önem kazanan bilişsel beceriler olduğu görülmektedir (Ersoy, 2006; MEB, 2013). Geometri öğrenme alanındaki düzlem geometri konularında görülen, iç, dış ve sınır kavramı; nokta doğru parçası kavramları, poligonlar, benzerlikler, uzay geometrideki küre, silindir gibi kavramlar Öklid geometrisinde tartışılan topolojik kavramlardır (Yates, 1971). Topoloji öğretilirken gerekli yerlerde öğrencileri, programın hedeflediği gibi çeşitli ilişkilendirmeleri yapmaya yöneltmek onların Öklid geometrisini daha iyi anlamalarını da sağlayabilir.

Matematik öğretim programında yer alan konular düşünüldüğünde matematik eğitiminde yapılan çalışmaların da vurguladığı gibi geometri görselleme ve uzamsal yeteneklerin geliştirilmesi yardımıyla etkili öğretilebilir (Karaaslan, Karaaslan ve Delice, 2012; Clements ve Battista, 1992). Şekillerin zihinde hareket ettirilip belirli olaylara göre şekillendirilmesi olarak tanımlanan zihinsel döndürme ve nesnelerin döndürülmesiyle oluşan değişikliği belirleme yeteneği olarak tanımlanan uzamsal görselleme yeteneğinin (Bishop, 1980), topolojinin geometri öğretim programına entegrasyonuyla geliştirilebileceği düşünülebilir. Öğrencilerin topoloji konularıyla uğraşmaları onları yüzeyleri, eğrileri, nesneleri hayal etmeye zorlayacaktır. Örneğin, topolojik dönüşümler öğrenciyi bir nesnenin eğilip büküldüğünü, döndürüldüğünü, hareket ettirildiğini düşünmeye itecektir. Çeşitli yüzeylerde yer alan eğrilerin özellikleri incelenirken, zihinde yüzeylerin görüntüleriyle oynama yapılması gerekmektedir. Tüm bunların bir sonucu olarak topolojinin uzamsal görselleme becerilerine katkı sağlaması beklenmektedir.

Öğretim programında, matematikte kullanılan görselleri somut materyaller yardımıyla oluşturma gibi psikomotor ve matematikle uğraşmaktan zevk alma gibi duyuşsal becerilerin geliştirilmesinin de hedeflendiği görülmektedir (MEB, 2013, s. IV). Topolojinin, eğitimin amacı olan bilişsel beceriler yanında duyuşsal ve psikomotor becerilerin (Yaman ve Dede, 2007) bir bütün halinde geliştirilmesi hedefine ulaşmada da etkili olabileceği düşünülmektedir. Esnek geometri olarak bilinen topolojide, öğrenciler Öklid geometrisinden tanıdıkları şekilleri/nesneleri topolojik dönüşümler altında farklı şekillere/nesnelere dönüştürebilirler. Topolojik olarak birbirine eş olan nesneleri oluşturarak bilişsel becerileri, nesneleri oluşturma sürecinde psikomotor becerileri ve geometrinin estetik ve eğlenceli yanıyla tanışarak duyuşsal becerilerini geliştirmeye yönelik etkinliklerde bulunmuş olurlar.

Bu araştırma ile matematik ve matematik eğitiminde yaşanan gelişmelerin matematik dersi öğretim programına yansımasını sağlamak amacıyla, topolojinin ortaöğretimde nasıl ele alındığını ve ele alınabileceğini ortaya koyarak öğretim programları için bir öneri sunulacağı düşünülmektedir. Bu amaçla topolojinin lisans öncesi düzeylerde (ilkokul, ortaokul ve lise) hangi konularla ve kavramlarla ne şekilde ele alındığı araştırılarak güncellenen ve reform hareketine uygun bir konu/kazanım önerisi yapılıp yapılamayacağı incelenecektir. Matematik öğretim programlarının geliştirilmesinde, yeni konuların programa dâhil edilmesi veya çıkarılmasında, matematik öğrenme ve öğretme süreçlerinin yeniden oluşturulmasında literatürde yer alan ancak öğretim programlarında yer verilmeyen topoloji gibi çalışma alanlarının matematik eğitiminde nasıl ele alındığını ve alınabileceğini inceleyen bu tür bilimsel araştırmaların etkili olduğu düşünülmektedir. Ayrıca ulusal ve uluslararası arenada yok denecek kadar az sayıda çalışıldığından matematik eğitimine katkı sağlayacağına inanılmaktadır.

Yöntem

Topolojinin lisans öncesi düzeylerde nasıl ele alındığına odaklanan bu çalışmada derin incelemeye ihtiyaç duyulmasının yanında araştırmacıya veri toplama ve veri analizi gibi süreçlerde esnek bir yaklaşım sağladığından nitel paradigma benimsenmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2008, s. 45-47). Topolojinin lisans öncesi öğretim programlarına nasıl yansıdığına dair literatürde yer alan matematik ve matematik eğitimi çalışmalarının ayrıntılı incelenmesi gerekliliği durum çalışması araştırma modelinin benimsenmesine sebep olmuştur. Araştırılması amaçlanan olgu veya olaylar hakkında çeşitli bilgileri içeren yazılı materyallerin analiz edilmesine olanak sağlayan doküman incelemesinden faydalanılmıştır. Doküman incelemesinde hangi dokümanların önem taşıdığı ve veri kaynağı olarak kullanılacağı araştırma problemine bağlıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 187-188). Bu çalışmada da araştırma problemine uygun olan kitaplar, öğretim programı basılı kaynakları ve araştırma makaleleri gibi dokümanlar elde edilerek, uygun kategoriler geliştirmek yoluyla araştırmacılara incelenen konuyla ilgili karşılaştırma yapma imkânı sunan içerik analizi yöntemi kullanılmış ve veriler bu yolla değerlendirilmiştir (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün ve Karadeniz, 2009, s. 240).

Veri toplama süreci

Doküman analizi tekniği ile tarama yapılırken topolojiyi lisans öncesi düzeyde, matematik bağlamından çok matematik eğitimi bağlamında ele alan, topolojiyi sezgisel olarak ve Öklid geometrisi ile ilişki kurarak açıklayan çalışmalara ulaşılması hedeflenmiştir. Bunun için ProQuest, ERIC, JStor, EBSCOhost, ScienceDirect veri tabanları ile Türk eğitim dergileri ve Google (akademik-scholar) taranmıştır. Tarama sonucunda ilkokul, ortaokul, lise ve lisans seviyesinde topoloji öğretimine ilişkin çalışmalar, topolojiye ilişkin öğretim materyalleri, ders notları ve etkinlikleri içeren tez, makale, bildiri ve proje raporları araştırmaya dâhil edilmiştir.

Nitel yaklaşımı benimseyen çalışmalarda, araştırma süreci geliştirme ve yeniden ifade etmeye dayalı bir süreç olarak tanımlanmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2008, s. 47). Nitel yaklaşım paradigmasının benimsendiği bu araştırmada, alandan elde edilen önbilgiler doğrultusunda araştırma problemleri yeniden düzenlenerek netleştirilmiş ve aşağıdaki araştırma problemi ve alt problemler oluşturulmuştur:

Topoloji lisans öncesi düzeylerde ne şekilde ele alınmaktadır?

- Araştırmaların türü, araştırmalarda ortaya çıkan ürünün türü, araştırmaların hitap ettikleri öğrenci grupları ve araştırmaların içerdikleri topoloji konuları nelerdir?
- Eğriler konusuna ilişkin hangi kavramlara nasıl yer verilmektedir?
- Topolojik dönüşümler konusuna ilişkin hangi kavramlara nasıl yer verilmektedir?
- Yüzeyler konusuna ilişkin hangi kavramlara nasıl yer verilmektedir?
- Çizgeler konusuna ilişkin hangi kavramlara nasıl yer verilmektedir?

Verilerin analizi

İçerik analizinin temelinde, elde edilen verileri açıklayabilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmak amaçlanmaktadır, bunun için önce veriler kavramsallaştırılır, daha sonra ortaya çıkan kavramlara göre mantıklı bir şekilde düzenlenir ve buna göre veriyi açıklayan kategoriler saptanır (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 227). Analizde gerçekleşen süreçler, amaca ve incelenecek materyalin cinsine göre değişiklik gösterebilir (Büyüköztürk vd., 2009, s. 241). Bu araştırmada topolojinin ilkokul, ortaokul ve lise düzeylerinden hangilerine hitap ettiği, hangi konularla ve kavramlarla ele alındığı, araştırma sonunda ne tür ürün ortaya koyulduğu derinlemesine incelenmek amacıyla çeşitli analizler yapılmıştır. Literatürde yer alan çalışmaların hangi yaş seviyesine ve/veya matematik düzeyine göre hazırlandığı, çalışmanın türü, yayının tarihi ve hangi topoloji kavramlarını içerdiği incelenmiştir. Bu incelemeler sonucunda lisans öncesi düzeyde eğriler, topolojik dönüşümler, çizgeler ve yüzeyler konularında yer alan kavramlar belirlenerek ilgili temalara kodlanmıştır ve topolojinin lisans öncesi düzeyde nasıl alınabileceği tartışılmıştır.

Verilerin analizi sürecinde güvenirliğin sağlanması için kodlamalar araştırmacıların içinde olduğu üç matematik ve üç matematik eğitimcisi olmak üzere toplam altı uzman tarafından ayrı ayrı gerçekleştirilmiştir. Daha sonra bir araya gelinerek görüş farklılığı gösteren noktalar üzerinde tartışılmış ve kodlamalar üzerinde görüş birliği sağlanmıştır.

Bulgular

Bu araştırmada topolojinin ilkokul, ortaokul ve lise düzeylerinde hangi konularla ve kavramlarla ne şekilde ele alındığını ortaya koymak amaçlanmıştır. Literatür incelendiğinde bu amaçla örtüşen oldukça az sayıda çalışma olduğu dikkat çekmiştir. Amaca uyan tüm çalışmalar araştırmaya dahil edilmiştir. Ele alınan araştırmaların demografik verileri (isimleri, yayınlandıkları yılları, araştırmayı yapan yazar/kurum isimleri ve sayfa aralıkları) Tablo 1'de yer almaktadır. Verilerin sunumunu kolaylaştırmak amacıyla incelenen çalışmalar numaralandırılmış, ilerleyen tablolarda çalışmalar bu numaralarla ifade edilmiştir (Tablo 1).

Tablo 1
İncelenen Araştırmaların Demografik Verileri

Çalışma no	Yıl	Yazar, editör veya kurum	Çalışma veya çalışmadaki bölümün adı	Sayfa aralıkları
1	1965	Powell, B.	Mathematics for the elementary school, Unit 1, geometry	1-66
2	1967	Foley, J.L.	Curves, vertices and knots	1-66
3	1969	Georgia University, Research and Development Center in Educational Stimulation (GURDCES)	Bending and stretching	1-21
4	1970	Victoria Education Department (VED)	Modified Mathematics, Forms III and IV	19-23
5	1973	Meserve, B.E. ve Meserve, D.T.	Topology (Topics for mathematics clubs)	47-56
6	1991	Mahoney, M. W.	Intuitive topology for the high school geometry classroom	1-78

İncelenen çalışmaların en eskisi 1965, en yenisi ise 1991 yılında yapılmıştır. 1973 ve 1991 yılları arasında ve 1991 yılından sonra topoloji lisans öncesi seviyede ele alan bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Yıl: Ocak 2016 • Cilt-Sayı: 43 • ISSN: 1300-8889 • ss. 43-66

Elde edilen veriler alt problemlere paralel olarak aşağıda sunulmuştur.

Araştırmaların türü, araştırmalarda ortaya çıkan ürünün türü, araştırmaların hitap ettikleri öğrenci grupları ve araştırmaların içerdikleri topoloji konularına yönelik bulgular

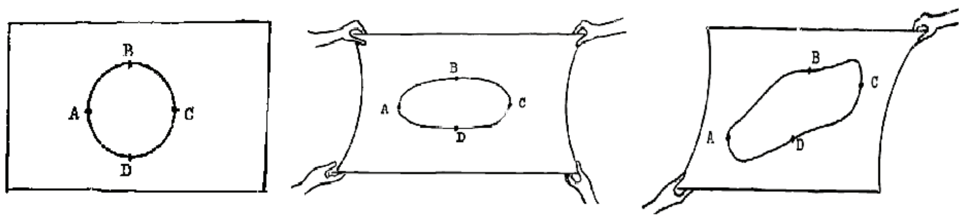
Bu bölümde araştırmaların özellikleri özetlenmiş (Tablo 2) ve ardından her bir çalışmada yapılanlardan kısaca bahsedilmiştir.

Tablo 2

Araştırmaların Türü, Hitap Edilen Grubun Özellikleri ve İçerilen Topoloji Konuları

Çalışma No	**Araştırmanın Türü**	**Araştırmada Ortaya Çıkan Ürünün Türü**	**Araştırmanın Hitap Ettiği Öğrenci Grubu**	**Konular**
1	Proje	Öğretmen Kitabı	İlkokul Öğrencileri	· Eğriler · Yüzeyler
2	Proje	Öğrenci Çalışma Kitabı	İlkokul ve Ortaokul Öğrencileri	· Eğriler · Çizgeler · Yüzeyler · Topolojik Dönüşümler · Topolojiyle İlgili Eğlenceli Aktiviteler
3	Proje	Öğrenci Çalışma Kitabı	İlkokul Öğrencileri	· Eğriler · Çizgeler · Yüzeyler · Topolojik Dönüşümler
4	Proje	Öğretmen Kitabı	Ortaokul Öğrencileri	· Eğriler · Topolojik Dönüşümler · Çizgeler · Yüzeyler
5	Proje	Kitap	Lise ve Ortaokul Öğrencileri	· Eğriler · Topolojik Dönüşümler · Çizgeler · Yüzeyler
6	Tez	Öğretmen Kitabı	Lise Öğrencileri	· Eğriler · Çizgeler · Yüzeyler · Topolojik Dönüşümler

İncelenen kaynaklarda aynı konuların farklı öğretim seviyesinde, farklı düzeyde matematik başarısına ve matematik ilgisine sahip öğrenciler için ele alındığı görülmüştür. Örneğin, ilkokul ve ortaokul öğrencileri seviyesinde hazırlanmış ayrıca matematik başarısı düşük öğrenciler için uygun olduğu belirtilmiş olan bir çalışmada (Foley, 1967) ele alınan topoloji konuları, başka bir çalışmada öğrencilerin okul programlarında görmedikleri ilginç matematik konularını öğretmek için hazırlanan üniteler (Meserve ve Meserve, 1973) içinde yer almıştır. Konular aynı olsa da kullanılan matematiksel dilin seviyesi hitap edilen gruba göre değişmektedir. Örneğin Foley (1967), topolojik dönüşümlere daha informal olarak yaklaşmış ve dönüşümlerden bahsederken esnetme, deforme etme gibi işlemlerden yola çıkılarak konu anlatımı gerçekleştirilmiştir. Daha anlaşılır olmaları için eğrilerin esnetilme işlemi birkaç adımda verilmiştir (Şekil 3).



Şekil 3. Düzlem üzerindeki bir çemberin deformasyonu

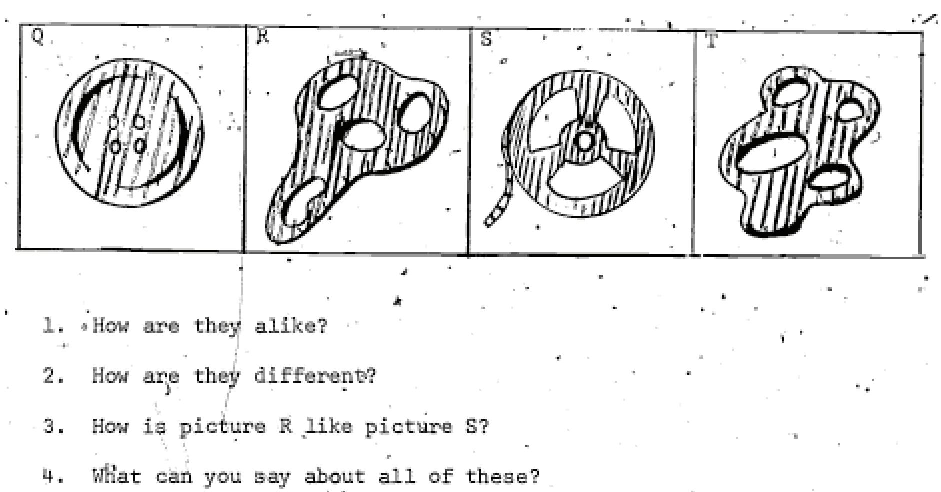
Meserve ve Meserve (1973) tarafından hazırlanan topoloji bölümü ise matematik kulüpleri için matematik konuları kitapçığının içerisinde yer almaktadır. Kitapçığın giriş bölümünde öğrencilere standart matematik konuları dışında ilginç matematik konularının tanıştırılmasının amaçlandığı belirtilmiştir. Çalışma incelendiğinde lise düzeyine uygun olduğu görülmektedir. Burada topolojik dönüşümler matematiksel kavramlar kullanılarak, komşuluk kavramı yardımıyla şöyle tanımlanmıştır:

> *"Topolojide noktaların komşuluğunu koruyan dönüşümlerle ilgileniriz… Bir topolojik dönüşümde P noktası P noktasına eşlenirse, P'nin her komşuluğu (ne kadar küçük olursa olsun) P noktasının bir komşuluğuna eşlenmelidir ve P noktasının komşuluğundaki her nokta P'nin komşuluğundaki noktaların bir görüntüsü olmalıdır."*

Topolojinin ilkokul seviyesine indirgendiği bazı kaynaklarda (Powell, 1965; GURDCES, 1969) değinilen sezgisel topoloji konuları, başka bir tez çalışmasında ise ortaöğretim geometri ders programına uyarlanmaya çalışılmıştır (Mahoney, 1991).

Ele alınan konular açısından incelendiğinde eğriler konusuna tüm çalışmalarda yani hitap edilen farklı grupların hepsi için yer verildiği görülmüştür. Bunun yanında topolojik dönüşümler ve topolojik eşlik konuları bazı çalışmalarda ayrı bir bölüm olarak daha ayrıntılı incelenmiştir (Mahoney, 1991; GURDCES, 1969; Foley, 1967).

Araştırmalarda topoloji konularına; konu anlatımı, etkinlik, ünite gibi çeşitli şekillerde ve farklı yaklaşımlarda yer verildiği görülmüştür. Küçük çaplı bir proje olduğu düşünülen ve ilkokul seviyesine yönelik hazırlanan topoloji etkinliklerinden oluşan çalışma kitabında (GURDCES, 1969) topoloji kavramlarının ünitede yer verilen resimleriyle ilgili "birbirlerine ne kadar benziyorlar?", "birbirlerinden ne kadar farklılar?", "R resmi S resmine ne kadar benziyor?", "bütün bunlar hakkında ne söyleyebilirsiniz?" soruları sorularak, öğrencilerin özellikleri keşfetmeleri hedeflenmiş ve çalışma doğrudan öğrencilere yönelik hazırlanmıştır (Şekil 4).



Şekil 4. Bir etklinlik örneği

İlkokul seviyesine yönelik başka bir çalışmada ise üniteler öğretmenlere yönelik hazırlanmış olup ünitede öğrencilere öğretilebilecek şarkılar, etkinlik ve aktivite önerileri yer almakta ve topoloji kavramlarına hikâyelerle yer verilmektedir (Powell, 1965). Matematik başarısı düşük öğrencilere bir seçenek olarak hazırlandığı ifade edilen Modified Mathematics Forms III ve IV (VED, 1970) ise alternatif matematik konularına yönelik çeşitli fikirleri içeren bir referans kaynağı olup öğretmenlere yönelik hazırlanmıştır ve topoloji bölümü kavramları keşfettirmeye yönelik sorulabilecek örnek sorularla kısa etkinlik önerilerini içermektedir. Matematikten geri kalmış öğrencilere yönelik program hazırlayan bir projenin ürünü olan diğer bir kitapçıkta ise konu anlatımı ve etkinlikleri içeren çeşitli topoloji üniteleri yer almaktadır (Foley, 1967). Konu anlatımı etkinliklerden yola çıkılarak gerçekleştirilmiş, etkinlikleri destekleyen karikatürlere ve çok sayıda görsel öğeye yer verilmiş olup konu ilköğretim öğrencilerinin seviyesine uygun olacak şekilde oldukça basite indirgenmiştir.

Mahoney (1991) ise tez çalışmasında eğriler, çizgeler, topolojik dönüşümler ve topolojik eşlik konularını içeren çeşitli üniteleri lise geometri müfredatında yürütülmesine yönelik hazırlamıştır. Ünitelerin öncesinde öğrencilerin sahip olmaları gereken önbilgilere yer verilmiş, ünite içerisinde ise konu anlatımlarına ve etkinliklere yer verilmiştir. Örneğin, ilk ünite olan "topoloji nedir" ünitesinden önce, öğrencilerin nokta, doğru ve düzlem kavramlarını anlamış olması gerektiği ifadesi yer almakta ve bu ünitenin 9 ve 10. sınıftaki geometri dersinin ilk ünitesinde geometriye giriş kavramlarını gördükten sonra verilmesi önerilmektedir. Bazı ünitelerin sonunda ise öğretmenlerin bu üniteleri tamamladıktan sonra derste yer verebilecekleri başka etkinlik ve tartışma fikirleri sunulmuştur. Örneğin, topolojiye giriş ünitesinden sonra öğretmenlerin Öklid geometrisi ve topolojinin farklarını açıklaması ve tartıştırması önerilmiştir.

Çalışmalar incelendiğinde hepsinde eğriler ve topolojik eşlik/dönüşüm konularının yer aldığı ve yüzeyler konusu içinde değerlendirilebilecek (iç ve dış) kavramlara yer verildiği görülmüştür. Bu konular dışında çizgeler de neredeyse tüm çalışmalarda yer almıştır. Çalışmalardan birinde ise öğrencilerin kendilerinin uygulayabileceği topolojik fikirleri içeren eğlenceli aktiviteler de yer almıştır (Foley, 1967). Topolojik dönüşümlere eğriler, çizgeler ve yüzeylerin hepsinin uygulamalarında yer verilmiştir.

Bu araştırmada lisans öncesi düzeyde ele alınabilecek konular tartışılacağından, bahsedilen dört konuya (topolojik dönüşümler, eğriler, çizgeler, yüzeyler) ilişkin olarak ayrıntılı analizler yapılmıştır. Analizler yapılırken incelenen kaynaklarda kavramlara ilişkin kısa da olsa bir açıklama bulunuyorsa veya bu kavramlar hissettirilmeye çalışıyorsa, araştırmaların bu kavramlara değindiği kabul edilmiş ve ilgili bölüme kodlanmıştır. Örneğin, "basit kapalı eğri, çembere topolojik olarak eşdeğer bir şekil olarak tanımlanabilir (Meserve ve Meserve, 1973, s. 48)" ifadesinde basit kapalı eğriye dair bir açıklama yer aldığından bu çalışmada eğriler konusunda basit kapalı eğri kavramına yer verildiği kabul edilmiştir. Ancak 3 numaralı kaynak çalışma kitabı olup herhangi bir konu anlatımı içermemektedir. Bu nedenle bu kaynak için de öğretilmesi hedeflenen kavramlar için kodlama yapılmıştır. Topolojik dönüşümler ve topolojik eşdeğer konuları ise genellikle diğer konularla birlikte ele alınmaktadır. Bu durumda kavramlar hangi konunun içinde verildiyse o konuya da kodlanmıştır. Buna bir örnek verilecek olursa, bağlantılılık kavramını Mahoney (1991) hem eğriler, hem yüzeyler için incelemiş olup, topolojik eşdeğer olabilmesi için dönüşümler altında değişmeyen özellikler içinde de yani topolojik değişmezlerden bahsederken de ele almıştır. Bu durumda 6 numaralı kaynak için bağlantılılık her üç temaya da kodlanmıştır. Başka bir örnek verilecek olursa "basit kapalı eğri, çemberin noktalarıyla birebir ve her iki yönde sürekli olarak eşlenebilen noktalar kümesidir (Foley, 1967, s. 12)" tanımı hem eğriler konusunda geçen basit kapalı eğri kavramını hem de topolojik dönüşümler/topolojik eşdeğer konusuna ilişkin birebir eşleme kavramını içermektedir. Bu durumda bu ifade hem eğriler hem de topolojik dönüşümler temasında kodlanmıştır. Ardından araştırmalarda bu kavramların nasıl geçtiği daha ayrıntılı olarak örneklere yer verilerek açıklanmıştır.

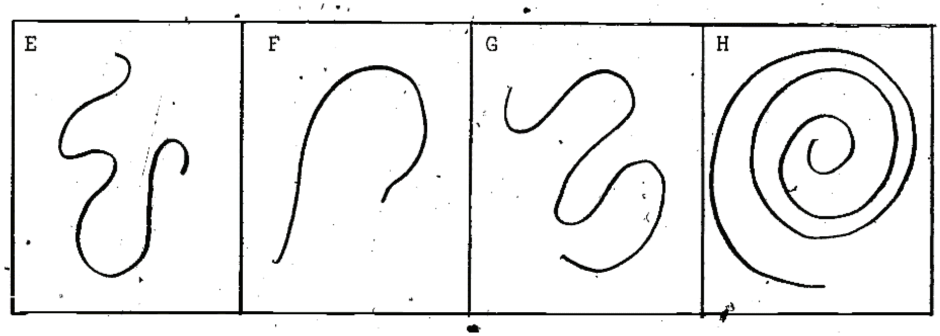
Eğriler

İncelenen tüm çalışmalarda eğriler konusuna yönelik kavramlar yer almakta ancak farklı araştırmalarda farklı kavramlara değinildiği görülmektedir (Tablo 3).

Tablo 3
Eğriler Konusunda Yer Alan Kavramlar

Kavram	Çalışma	Frekans
Kapalı eğri	4, 5	2
Basit kapalı eğri	1, 2, 3, 4, 5, 6	6
Basit açık eğri	1, 3, 5	3
Basit olmayan eğri	1	1

Çalışmaların hepsinde eğriler konusunda basit kapalı eğri kavramına değinilmiştir. Basit kapalı eğri kavramı her çalışmada farklı zorluk seviyelerinde informal ya da matematiksel ifadelerle verilmiştir. Örneğin, 2 numaralı çalışmada basit kapalı eğri matematiksel kavramlarla "…basit kapalı eğri için şunu söyleyebiliriz: her iki yönde de sürekli olan bir eşleme olacak şekilde, bir çemberin noktalarına birebir eşlenebilen noktaların kümesidir." olarak ifade edilmiştir (Foley, 1967). 1 numaralı çalışmada ise informal olarak "başlangıç noktasına geri dönen, kendi üzerinde tekrar geçmeyen ve kendisini asla kesmeyen eğri basit kapalı eğridir" şeklinde açıklanmıştır (Powell, 1965). Basit açık eğri kavramları az sayıda çalışmada doğrudan geçmekte olup bir (3 numaralı) çalışmada ise resimler aracılığıyla sezdirilmektedir (Şekil 5).



Şekil 5. Açık eğri örnekleri

Bazı kaynaklarda basit kapalı eğrilerin bir düzlemi ayırdığı bölgelere de değinilmiş olup bunlar yüzeyler konusundaki bulgular altında ele alınmıştır. Basit kapalı eğri dışında, kapalı eğri kavramına az sayıda çalışma (4,5) yer vermiştir. Sadece bir çalışma (1) basit olmayan eğriye de değinmiş ve çeşitli basit olmayan eğri örnekleri vermiştir.

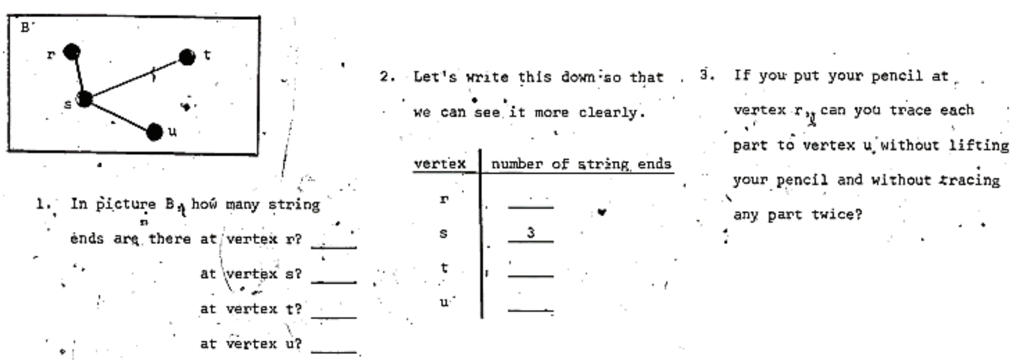
Çizgeler

Analiz edilen çalışmalardan bir çalışma dışında tüm çalışmalar gerçek yaşamda sıkça kullanılan çizgeler konusuna yer vermiştir (Tablo 4).

Tablo 4
Çizgeler Konusunda Yer Alan Kavramlara Yönelik Bulgular

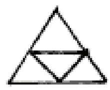
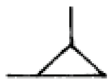
Kavram	Çalışma	Frekans
Dolaşılabilirlik (Traversable)	2, 3, 4, 5, 6	5
Köşe	2, 3, 4, 5, 6	5
Kenar	2, 3, 4, 5, 6	5
Euler sayısı	2, 6	2

Çizge tanımı gereği sonlu sayıda noktalardan ve bunları birbirine bağlayan çizgilerden yani kenarlardan oluşur (Flegg, 1974, s. 58). Dolayısıyla çizge konusuna değinen tüm çalışmalarda çizgeyi oluşturan köşe ve kenar elemanları açıklanmıştır. Bununla birlikte çizgelerde dolaşılabilir bir tur yapmak için gerekli olan koşullar tüm çalışmalarda ele alınmıştır. Çalışmalarda çeşitli çizge örnekleri ve etkinlikleri yer almaktadır. Etkinlikler öğrencilerin denemeler yaparak çeşitli sonuçlara ulaşması ve buradan çizgelerle ilgili çeşitli çıkarımlara ve genellemelere ulaşabilmelerine imkân verecek şekilde yapılandırılmıştır (Şekil 6).



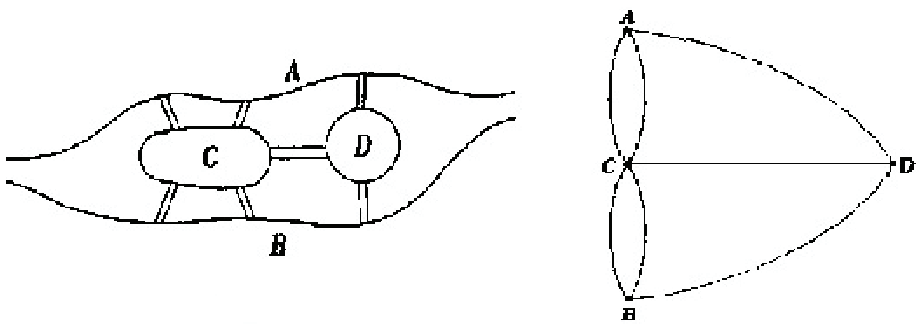
Şekil 6. Etkinlik örneği (GURDCES, 1969)

Bazı çalışmalarda çizgelerdeki köşe (vertice), kenar (edge) ve bölge (region) sayıları arasındaki ilişkiyi gösteren Euler sayısına da değinilmiştir. Öğrencilerin çeşitli tabloları doldurarak Euler sayısına yönelik ilişkiyi keşfetmeleri beklenmiştir (Şekil 7).

Network	# of vertices (V)	# of edges (E)	# of regions (R)	V-E+R=?
1. 				
2. 				

Şekil 7. Etkinlik (Mahoney,1991)

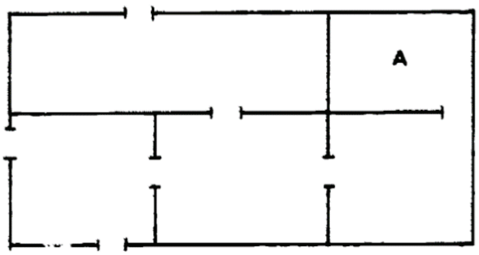
Çizgeler konusunda neredeyse tüm çalışmalarda bir gerçek yaşam problemi olan ve çizgelerin çıkış noktası olarak bilinen Königsberg Köprüsü problemine değinilmiştir (Meserve ve Meserve, 1973, Şekil 8). Probleme göre bu şehirde nehrin üzerinde adacıklar bulunmakta; bu adacıklar ve diğer karalarla bağlantıyı sağlayan toplam yedi köprü bulunmaktadır. Her köprüden yalnızca bir defa geçerek bu turu yapmanın mümkün olup olmamasına çözüm aranmaktadır (Barr, 1989, s. 120).



Şekil 8. Königsberg Köprüsü Problemi

Königsberg Köprüsü probleminin yanında azımsanmayacak sayıda birbirinden farklı olan çizge etkinliklerine yer verildiği göze çarpmaktadır. Örneğin Şekil 9'da A odasından başlayarak ve her kapıdan geçerek tüm odaları gezmenin mümkün olup olmadığı ve sonra herhangi bir odadan başlayarak bunu yapmanın mümkün olup olmadığı sorulmuştur. Bu soru da aslında bir çizge problemini ifade etmektedir (VED, 1970).

(*d*) **The figure shows a plan of a house. Can you start at A and walk through every door of the house exactly once ? Can you start anywhere else and successfully go through each door only once ?**



Şekil 9. Çizgelerle ilgili etkinlik örneği

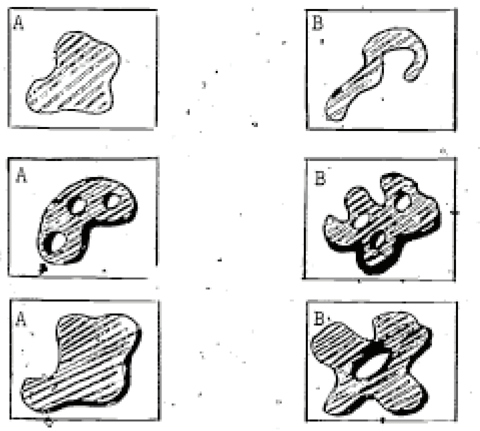
Topolojik dönüşümler

Topolojik dönüşümler bazı çalışmalarda informal olarak eğip bükme, germe ve sıkıştırma gibi işlemlerle nesnenin uğradığı değişikler ve değişmeyen özellikler vurgulanarak ele alınmış, bazılarındaysa matematiksel kavramları kullanarak komşuluk ve birebir eşleme gibi gerekliliklere yer vermiştir. Bir çalışma dışında tüm çalışmalarda topolojik dönüşümlere ilişkin çeşitli kavramlara değinilmiştir (Tablo 5).

Tablo 5
Topolojik Dönüşümler Konusunda Yer Alan Kavramlara Yönelik Bulgular

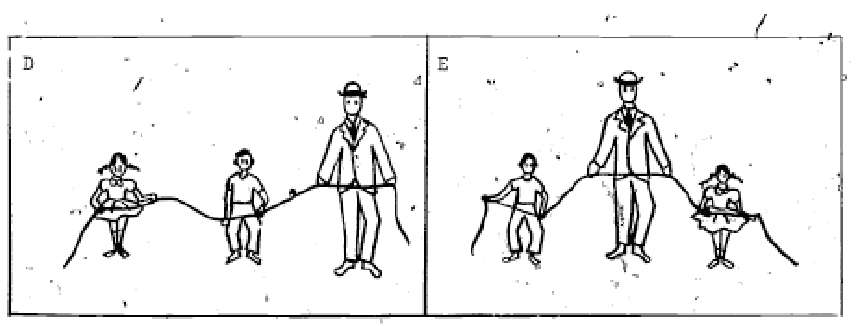
Kavram	Çalışma	Frekans
Birebir eşleme	2, 4, 5, 6	4
Komşuluk	4, 5, 6	3
Sıra	2, 3, 6	3
Yönlendirilebilirlik	6	1
Bağlantılılık	5, 6	2
Betti sayısı	5, 6	2

Topolojik dönüşümleri deformasyon işlemlerine vurgu yaparak ele alan çalışmalardan birine ait örnek Şekil 10'daki gibi olup, etkinlikte çeşitli nesneler verilerek bunların birbirine dönüştürmenin mümkün olup olmadığı düşündürülmüştür (GURDCES, 1969).



Şekil 10. Etkinlik örneği

Topolojik dönüşümlere ilişkin şekillerin biçiminin değişmesi vurgusu neredeyse tüm çalışmalarda vardır ancak bunun yanında bazı çalışmalarda topolojik dönüşümlere ilişkin sıra ve komşuluk kavramları içeren ifadeler de yer almaktadır. Çalışmaların yarısında komşuluğun daha basit bir ifadesi gibi düşünülebilecek eğriler veya yüzeyler üzerindeki noktaların sırası durumlarına yer vermişlerdir (Şekil 11a ve Şekil 11b).



Şekil 11a. Sıra ile ilgili örnekler (GURDCES, 1969)

Şekil 11b. Sıra ile ilgili örnekler (Mahoney, 1991)

Topolojik dönüşümler ve topolojik eşlik konusunda birebir eşleme vurgusu kimisinde biraz daha basit düzeyde olmak üzere çoğu çalışmalarda yer almaktadır. Çalışmaların yarısı komşuluk kavramına da değinmiş olup bu çalışmalarda topolojik dönüşümler diğer çalışmalara göre daha matematiksel ifadelerle verilmiştir. Örneğin bir çalışmada topolojik dönüşümler şu şekilde açıklanmıştır:

> *"…geometrik bir şekil başka bir geometrik şekle şu şekillerde eşlenirse topolojik dönüşüm gerçekleşir: a) şekildeki her nokta, diğer şekildeki bir noktaya eşlenir… b) şekil üzerindeki bir noktayı diğer bir noktaya aralarındaki uzaklık sıfıra yaklaşacak şekilde hareket ettirirsek, bu noktaların eşlendiği diğer şekil üzerindeki noktalar arasındaki uzaklık da sıfıra yaklaşır"* (VED, 1970).

Diğerlerine göre daha üst matematik bilgisine sahip öğrencileri hedef alan çalışmalar, 5 ve 6 numaralı çalışma bağlantılılıkla ilgili başka bir kavram olan Betti sayısına (Mahoney, 1991) da yer vermiştir. Bu çalışmalar aynı zamanda topolojik eşdeğer olan nesnelerde bağlantılılığın değişmediğine de yer vermişlerdir. Daha kapsamlı bir içeriğe sahip olan 6 numaralı çalışma yüzeyin yönlendirilebilirliğinin değişmediğine de vurgu yapmıştır.

Yüzeyler

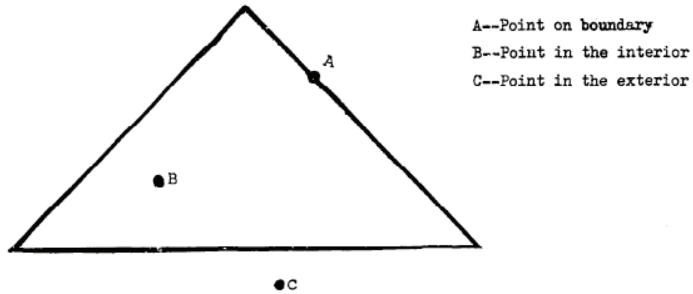
Yüzeyler konusunda geçen kavramlar, bu kavramların hangi çalışmalarda geçtiği ve frekans değerleri Tablo 6'da yer almaktadır.

Tablo 6

Yüzeyler Konusunda Yer Alan Kavramlara Yönelik Bulgular

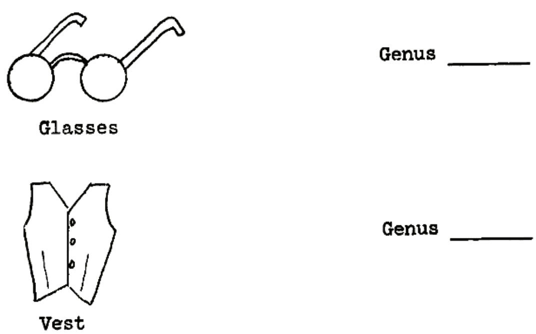
Kavramlar	Çalışma	**Frekans**
İç	1, 2, 5, 6	4
Dış	1, 2, 6	3
Bölge	2, 4, 5	3
Basit bağlantılılık	6	1
Genus	2, 3, 5, 6	4
Jordan curve teoremi	2, 6	2
Yönlendirilebilirlik	6	1
Mobius şeridi	2, 4, 5, 6	4
Sınır	1, 5	2

Çalışmalarda yüzeyler konusuna yer verilmiş olsa da bu konu öğrencilere temel kavramları hissettirilecek düzeyde kalmaktadır. Örneğin Foley (1967), genus kavramına tanımdan yola çıkarak değil de nesnede yer alan delik sayısı olarak yer verilmiştir (Şekil 12).



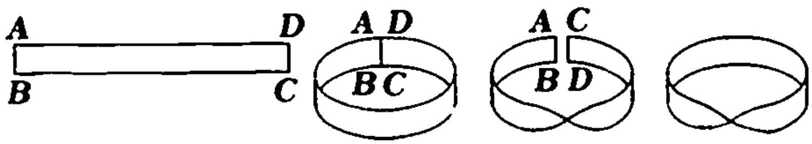
Şekil 12. Genus kavramıyla ilgili örnekler (Foley,1967)

İncelenen çalışmaların neredeyse hepsinde eğriler konusunda, eğrilerin bir düzlemi bölgelere ayırmasına yer verilmiştir. Düzlem söz konusu olduğundan bu tür tanımlamalar bu çalışmada yüzeyler grubuna kodlanmıştır. Buna göre basit kapalı bir eğrinin basit bağlantılı bir yüzeyi iç ve dış olmak üzere iki parçaya ayırdığını belirten Jordan curve teoremine biri daha basit düzeyde olmak üzere yalnızca iki çalışma (2 ve 6) yer vermiştir. İncelenen çalışmaların yarıdan fazlasında iç kavramına; çalışmaların yarısında ise dış kavramına yer verilmiştir. Bu kavramlara yer veren çalışmalardan 1 numaralı çalışma teoremin ismini vermemiş ve bölge kavramına değinmemiş, kelimelerin günlük yaşamda kullanımdan yola çıkarak örnek üzerinde düzlemde yer alan basit kapalı bir eğrinin içinde, dışında ve üzerinde çeşitli noktalara yer vererek iç, dış ve sınır kavramlarına değinmiştir (Şekil 13).



Şekil 13. İç, dış, sınır kavramına yönelik örnek (Powell, 1965)

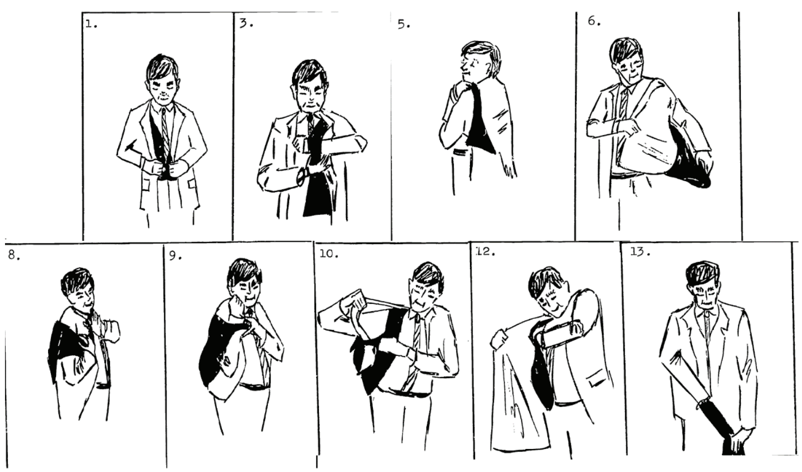
Çalışmaların birçoğunda alışılmış yüzeylerden farklı olarak tek yüze sahip möbius şeridinden bahsedilmiştir (Şekil 14) ve bazılarında möbius şeridinin kesilmesi durumunda ortaya çıkan durumların incelenmesini içeren çeşitli etkinliklere yer verilmiştir (Foley, 1967; Mahoney, 1991).



Şekil 14. Mobius şeridiyle ilgili örnekler (Meserve ve Meserve, 1973)

Topolojiyle ilgili eğlenceli aktiviteler

Çalışmalardan birinde (2) topolojik fikirlerin yer aldığı çeşitli eğlenceli aktivitelere de yer verilmiştir. Foley (1967), topolojik olarak mümkün olan, ceketi çıkarmadan yeleği çıkarmak, birbirine bağlı iki kişinin ipleri kesmeden/çözmeden birbirinden ayrılması gibi çeşitli aktivitelere yer vermiştir. Bu aktivitelerin nasıl uygulanacağı ayrıntılı olarak anlatılmış ve çeşitli görsellerle desteklenerek adımlar hakkında öğrencilere fikirler verilmiştir. Örneğin ceketi çıkarmadan yeleği çıkarmanın uygulanışı iki sayfada, 14 adımla gösterilmiştir. Şekil 15'de örnek olması bakımından bazı adımlar verilmiştir.



Şekil 15. Ceketi çıkarmadan yeleği çıkarmak

Tartışma

Bu araştırmada topolojinin ilkokul, ortaokul ve lise düzeylerinde öğretilmesini içeren bazı çalışmalar incelenmiş, araştırmalardaki topoloji konuları, bu konularda hangi topoloji kavramlarına yer verildiği ortaya konulmuştur. Tartışmaya geçmeden önce hatırlatma amacıyla bulgular özetlenecek olursa, topolojinin ilkokul, ortaokul ve lise seviyelerinde daha çok sezgisel olarak hissettirilmesi mümkün olan temel kavramlara (örneğin iç, dış, açık eğri, kapalı eğri, sıra, genus gibi) informal olarak değinildiği görülmüştür. Geometrideki bazı kavramların ve özelliklerin informal olarak öğrenilmesi yaklaşımının ülkemiz eski öğretim programlarında ve literatürdeki çeşitli çalışmalarda yer aldığı görülmektedir (MEB, 2009; Günay ve Kabaca, 2013).

Araştırmalarda ortak olarak eğriler, çizgeler, topolojik eşdeğer olma, yüzeyler konuları yer almaktadır. Eğriler konusuna bütün çalışmalarda değinilmiş olması dikkat çekmektedir. Bu konunun yapısından dolayı öğrencilerin seviyesine göre formal tanımlarla verilmesinin mümkün olmasının yanında, informal olarak çok basit seviyede bir içerikle de vermenin mümkün olması dolayısıyla her çalışmada bu konunun yer aldığı düşünülmektedir. Özellikle basit kapalı eğrinin informal olarak anlaşılmasının daha kolay olması sebebiyle tüm çalışmalarda yer verilmiş olabileceği düşünülmektedir. Ayrıca günümüzde bir yayın bir doğruya dönüştürülmesi gibi topolojik dönüşümlere izin veren menü seçeneklerinin bulunduğu dinamik ortamların oluşturulduğu dikkat çekmektedir (Greenstein, 2014). Topoloji konuların öğretimine yönelik çeşitli bilgisayar yazılımlarından yararlanılabileceği de düşünülmektedir.

Çizgeler konusunun da çoğu çalışmada yer aldığı görülmüştür. Bu konunun öğrencilerin dikkatini çekebilecek bulmaca tarzında bir yapısı olması sebebiyle tercih edildiği de düşünülebilir. Yüzeyler konusu ise diğer konulara göre sınırlı içeriklerle ele alınmıştır. Bazı çalışmalarda yüzeylere sadece eğriler konusunda bir eğrinin bir düzlem üzerine çizilmesi durumları içerisinde yer verilmiştir. Birkaç çalışmada yüzeyler konusunda eğlenceli yönü bulunan mobius şeridine de yer verilmiştir. Araştırmalarda değinilen temel topolojik kavramlar ise eğriler konusunda; basit açık/kapalı eğri, açık/kapalı eğridir. Çizgelerde ise çizgeyi oluşturan kenar ve köşe elemanlarının yanında dolaşılabilir bir tur için çizgenin sahip olması gereken özelliğe değinilmiş, daha az çalışmada ise topolojik bir değişmez olan Euler sayısına da yer verilmiştir. Yüzeyler konusunda kavramlar daha sınırlı özellikleriyle ele alınmış, iç, dış, bağlantılılık, genus, yönlendirilebilirlik kavramlarına, Jordan curve teoremine ve mobius şeridine yer verilmiştir. Bu konunun diğer topoloji konularına göre daha fazla matematiksel bilgi gerektirdiği söylenebilir. Bu yüzden lisans öncesi düzeyde bazı kavramların daha basit anlamda sezdirilmesinin amaçlandığı düşünülmektedir. Topolojik dönüşümlere ise tüm kaynaklar değinmiş olup bazıları topolojik dönüşümü esnetme, germe gibi gündelik yaşam kavramlarıyla sezdirmeye çalışırken bazıları daha net olarak matematiksel kavramlarla ifade etmişlerdir. Topolojik dönüşümlerde birebir eşleme, komşuluk, sıra, yönlendirilebilirlik, bağlantılılık ve Betti sayısı gibi özelliklere yer verilmiştir. Birebir eşleme, sıra ve komşuluk kavramlarının, güncel lise matematik öğretim programında yer alan fonksiyonlar ve limit konularındaki temel kavramları oluşturduğu görülmektedir. Dolayısıyla bu kavramların öğretim programlarında yer alan fonksiyon ve limit konularına bir hazırlık olarak kazanım ya da etkinlik önerisi ile verilebileceği düşünülebilir, böylelikle kavram imgelerinin zenginleşerek formal ve informal tanımları yapılandırmada yardımcı olabilir.

Literatür incelendiğinde topolojinin farklı öğretim seviyelerinde ele alınmasının birçok araştırmanın konusu olduğu veya çeşitli kitap bölümlerinde bu konulara yer verildiği görülmüştür (Wallrabenstein, 1973; Yates, 1971; Hilton, 1971; Smith, 2012). Bu araştırmaların yanında topolojiyi ilkokul seviyesinde etkinliklerle ele alan çalışmalara bazı eleştiriler de olmuştur. Özellikle topolojinin ilkokul seviyesinde ele alma sebebini topolojik öncelik tezine dayandıran çalışmalar, ilkokula başlayan çocukların Piaget'in bahsettiği topolojik seviyeyi çoktan geçmiş olacakları sebebiyle sorgulanmaktadır. Bunun yerine ortaokul veya lise seviyesindeki daha büyük öğrencilerin üstü kapalı olarak veya açıkça belirtilerek topolojik uzayda çalışmalar yapmaya yönlendirilebileceği belirtilmektedir (Fielker, Tahta ve Brookes, 1979). Hilton (1971) ise mobius şeridi ve klein şişesi gibi eğlenceli örneklerin aydınlatıcı ancak topoloji için yeterli olmadığını belirtmiş, lise programı için temel topoloji kavramlarının, topolojik uzayların ve temel grup teorisinin yer aldığı bir içerik önermiştir. Günümüzde matematiği eğlenceli içeriklerle sunan çeşitli kaynaklarda (Ball, 2005) veya matematik öğretimine ilişkin çeşitli kaynaklarda topolojinin bir bölüm olarak veya birer kavram olarak içerildiği görülmektedir (Smith, 2012). Topoloji günümüz matematiğinin önemli bir dalını oluşturmakta olup, yurt dışında matematik eğitiminde de belirli bir yere sahip olduğu görülmektedir. Ülkemizde ise topoloji matematik eğitiminden ziyade matematik alanında çalışılmaktadır.

Topoloji yapısı itibariyle konumsal ve uzamsal farkındalık, geometrik sezgi ve hayal gücünü kullanmayı gerektirmektedir. Bir örnekle açıklanacak olursa, topolojik dönüşümler konusuna çalışan bir öğrencinin bir şeklin eğilip bükülerek nasıl bir hale gelebileceğini hayal etmesi beklenir. Bu tür çalışmaların sonucunda da öğrencilerin nesnelere ait görüntülerde zihinsel oynamalar yapabilmesi olarak da tanımlanan uzamsal düşünmenin (Clements ve Battista, 1992) gelişmesi beklenmektedir. Bu tür becerilerin yanında öğrencilerden alışık oldukları geometri sistemi dışında bir sistemde çalışarak geometrik şekillerin özelliklerini birbirinden farklı geometri sistemlerinde inceleyerek, benzerlik ve farklılıklarını ortaya koymalar beklenebilir. Ayrıca topolojiyle alakalı problemleri çözerken (örneğin, çizgelerle alakalı problemler) çeşitli modeller oluşturarak farklı problemlerin çözümünde kendi oluşturduğu modellerden yararlanma yoluna gitmeleri de beklenmektedir. Böylece topoloji konularının öğretim programında yer alan matematiksel modelleme ve problem çözme, matematiksel akıl yürütme ve matematik kendi içindeki konularla ve başka alanlarla ilişkilendirme gibi matematiksel süreç becerileri kazandırma açısından faydalı olabileceği düşünülmektedir (Karaaslan, 2013).

Öğretim programlarının geçmişine baktığımızda fraktal geometri konuları 2005 yılı itibariyle önce ilköğretim daha sonra 2010'da lise öğretim programlarında yerini almış, 2013'te ise yer almamıştır. Ancak yine de fraktal geometrinin doğayı daha iyi ifade ettiği, diğer disiplinlerle ilişki kurmayı sağladığı ve ilköğretim ve lisedeki bazı konularla (sayı dizileri, simetri, oran-orantı, ölçme ve kesirler, ortaöğretim seviyesinde ise logaritma, bileşke fonksiyon, Pascal üçgeni, aritmetik ve geometrik diziler ile karmaşık sayılar gibi) yakından ilişkili olduğu ifade edilmiştir (Karakuş ve Baki, 2011). Topolojiye de benzer açıdan bakıldığında özetle birçok farklı disiplinde yer aldığı; matematik öğretim programında yer alan bazı kavramlarla yakından ilişkili olduğu ve konunun işlenişinde programda yer alan becerilerin geliştirilmesinin de oldukça uygun olduğu ve matematiği kendi içinde ilişkilendirdiği görülmektedir. Bu nedenlerle topolojinin de fraktal geometri gibi belli kazanımlarla veya etkinliklerle öğretim programında yer alabileceği düşünülmekte yeni programlara önerilmektedir. Bunun yanında topoloji öğretimine ilişkin çalışmaların kısıtlı olması göz önünde bulundurulduğunda bu alanda, topolojiye lisans öncesi seviyelerde yer vermesinin gerekli olup olmaması, hangi kavramlara ve niçin yer verilmesi gerektiği gibi konuların araştırılması önerilmektedir.

Kaynaklar

Ankara Metro Haritası. (2012). Wikimedia commons. Retrieved 02, 2015, from https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Metro_Map_Ankara_1.png

Arnold, B.H. (1963). *Intuitive concepts in elementary topology* (2nd ed.). Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall Inc.

Baki, A. (2006). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi.* (3. Baskı) Trabzon: Derya Kitabevi.

Baki, A. (2001). Bilişim teknolojisi ışığı altında matematik eğitiminin değerlendirilmesi. *Milli Eğitim Dergisi*, 149, 26-31.

Ball, J. (2005). *Bir sayı düşün* (Çev. Türer, L.). İstanbul: Tudem Yayınları.

Barr, S. (1989). *Experiments in topology*. New York: Dover Publications, Inc.

Bishop A. (1980). Spatial abilities and mathematics education: A review. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(3), 257-269.

Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E. K., Akgün, Ö. E, Karadeniz, Ş., & Demirel, F. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Pegem Akademi.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Darke, I. (1982). A review of research related to the topological primacy thesis. *Educational Studies in Mathematics, 13(2),* 119-142.

Debnath, L. (2010). A brief historical introduction to Euler's formula for polyhedra, topology, graph theory and networks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(6), 769-785.

Delice, A. (2011). Matematik ve geometri öğretim programlarının yeni kavramlarından biri: Fraktallar. *Matematik eğitiminde teknoloji kullanımı*. Karakırık, E. (Ed.) Nobel Yayın Dağıtım (sf. 279-321), Ankara.

Fielker, D. S., Tahta D. G., & Brookes W. M. (1979). Strategies for teaching geometry to younger children. *Educational Studies in Mathematics*, *10*(1), 85-133.

Flegg, H. G. (1974). *From geometry to topology*. New York: Crane, Russak & Company, Inc.

Foley, J. L. (1967). *Curves, vertices, knots and such* .(ERIC Document Reproduction Service No. ED020894)

Georgia Univesity, Research and Development Center in Educational Stimulation (GURDCES). (1969). *Bending and stretching.* Athens, GA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED113164)

Greenstein, S. (2014), Making sense of qualitative geometry: The case of Amanda. *Journal of Mathematical Behavior, 36,* 73–94.

Günay, D. & Kabaca, T. (2013). 7. Sınıf öğrencilerinin fraktallara ilişkin informel anlamalarının belirlenmesi, *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *4*(3), 169-184.

Hacısalihoğlu, H. (1975). *Dönüşümler ve geometriler*. İstanbul: Milli Eğitim Basımevi.

Hilton, P. (1971). Topology in the high school. *Educational Studies in Mathematics*, *3*, 436-453.

Homeomorphism. (2015). Wikipedia. Retrieved June 02, 2015, from http://en.wikipedia.org/wiki/Homeomorphism

Karaaslan K. G. (2013). *Ortaöğretim geometri ders programına yeni konu* önerisi: *Topoloji* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Karaaslan, G., Karaaslan, K. G. & Delice, A. (2012). Öğrencilerin *Uzamsal Yeteneklerine Göre 3 Boyutlu Geometri Problemlerinin Çözümlerinin İncelenmesi. 10. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi,* Niğde.

Karakuş, F., &&Baki, A. (2011). Assessing grade 8 elementary school mathematics curriculum and textbooks within the scope of fractal geometry. *İlköğretim Online, 10*(3).

Karaş, İ.R. & Batuk, F. (2005). *Coğrafi bilgi sistemlerinde topoloji kavramı*. 10. Türkiye Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı 28 Mart-1 Nisan 2005, Ankara.

Kidder, F. R. (1976). Elementary and middle school children's comprehension of euclidean transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(1), 40-52.

Mahoney, M. W. (1991). *Intuitive topology for the high school geometry classroom.* Kean University, Şehir

Meserve, B. E. & Meserve D. T. (1973). Topology. In L. C. Dalton & H. D. Snyder (Eds.), *Topics for mathematics clubs* (pp.47-55). Washington, DC: National Council of Teachers of

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (MEB) (2011). *Ortaöğretim Geometri Dersi 12. Sınıf Öğretim Programı*. Ankara: M.E.B.

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (MEB) (2013). *Ortaöğretim Matematik Dersi 9, 10, 11 ve 12. Sınıflar Öğretim Programı*. Ankara: M.E.B.

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (MEB) (2010). *Ortaöğretim Geometri Dersi 9.-10. Sınıflar Öğretim Programı*. Ankara: M.E.B.

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (MEB) (2005a). İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı ve Kılavuzu 8-6. Sınıflar (Taslak Basım). Ankara: M.E.B.

Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (MEB) (2005b). *Ortaöğretim Matematik (9,10, 11 ve 12 sınıflar) Dersi Öğretim Programı*. Ankara: M.E.B.

Narli, S. (2010). Do students really understand topology in the lesson? A case study. *International Journal of Human and Social Sciences, 5*(9), 543-546.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2010). *Principles and standarts for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Porter, N. D. (2009). *An introductory study of topology*. Southern University and Agricultural and Mechanical Colleg, *Şehir.*

Powell, B. (Ed.) (1965). *Mathematics for the elementary school, Unit 1, Geometry*. Minneapolis, MN: Minnesota School Mathematics and Science Center, Minnesota University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED094982).

Rahimov, A. (2006). *Topolojik uzaylar*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Smith, K.J. (2011). *The nature of mathematics*. (12th Ed.) Belmonts, CA: Brooks/Cole.

Tarım, M. (2006). *Mimari tasarımda topoloji* (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.

Victoria Education Department (VED) (1970). *Modified mathematics, Forms III and IV.* Australia. (ERIC Document Reproduction Service No. ED064045)

Wallrabenstein, H. (1973). Experiments in teaching intuitive topology in the 5th and 6th grades. *Educational Studies in Mathematics*, *5,* 91-108.

Yates, D. S. (1971). *The development and evaluation of a text in the topology of the plane for secondary teachers.* The Florida State University.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (6. bs.). Ankara: Seçkin Yayınları.