JSES

Journal of Sustainable Educational Studies

Geliş/Received: 16.01.2022 Kabul/Accepted: 17.02.2022

CEVABI TEK OLMAYAN SORU ÜZERİNDE MATEMATİKSEL DÜŞÜNME SÜRECİ: BİR GEOGEBRA UYGULAMASI[1]

Özlem ÇEZİKTÜRK[2]

Tuğba HANGÜL[3]

Özet

Bu çalışmada öğretmen adaylarının Öklid uzayı özelindeki matematiksel düşünme süreçlerinin Geogebra aracılığıyla incelenmesi amaçlanmıştır. Bu bağlamda bir devlet üniversitesinin matematik öğretmenliği programında çevrim içi olarak yürütülen "Analitik Geometri II" dersi kapsamında 33 öğretmen adayına açık uçlu bir soru yöneltilmiştir. Adaylardan *"Bir noktadan sonsuz doğru geçer. İki noktadan sonsuz eğri geçer. Bu durumda üç noktadan sonsuz ... geçer."* sorusundaki boşluğu Geogebra'dan faydalanarak doldurmaları istenmiştir. Olgubilim deseni olarak tasarlanan bu çalışmanın verileri, doküman incelemesi yoluyla elde edilmiştir. Bu bağlamda, öğretmen adaylarının Geogebra uzantılı dosyaların içindeki yazılı ifadeler incelenmiştir. Elde edilen bulgulara göre; öğretmen adaylarının prizmalardan, eğrilere kadar geniş bir yelpazede cevap verebildikleri görülmüştür. Fakat öğretmen adaylarının sadece %36 sı hem iki boyutu hem de üç boyutu düşünerek farklı seçenekli cevaplar oluşturmuştur. Diğer taraftan çalışma grubunun yaklaşık yarısının ilgili soruya farklı seçenekler üretemeyerek tek bir cevap verdiği belirlenmiştir. Bu çalışmadan elde edilen sonuçlara göre, Geogebra'nın sahip olduğu nitelikler sayesinde zaman zaman bir ispat aracı işlevi gördüğü söylenebilir. Bu bağlamda, özellikle analitik geometri, analiz gibi temel matematiksel ve geometrik kavramları kapsamına alan derslerde matematiksel/ geometrik düşünmenin gelişimine katkı sağlamak amacıyla Geogebra kullanarak özel hazırlanmış sorularla uygulamalar yapılması önerilmektedir.

Anahtar Sözcükler: Analitik Geometri; Geogebra; matematiksel düşünme süreci

MATHEMATICAL THINKING PROCESS ON AN OPEN-ENDED QUESTION: A GEOGEBRA APPLICATION

Abstract

This study sought to investigate the preservice mathematics teachers' mathematical thinking process on Euclidean Space by using Geogebra. 33 preservice teachers from an online Analytic Geometry II course participated in this study. The data collected were the Geogebra documents and writing papers produced by preservice teachers. An open-ended question which was used in this study consist of: *"There are infinite number of lines going through a point. Infinite number of curves can be drawn joining any two points. So, infinite number of ..... can be drawn joining any three points."* The results show that answers were listed in a large scope from prisms to curves. However, only 36% of the pre-service teachers created different alternative answers by considering both 2D and

[1] Bu çalışma 18-19 Aralık 2021 tarihlerinde FSMVU Eğitimde Mükemmeliyet Araştırmaları Kongresi'nde (EMAK-2021) sunulan sözlü bildirinin genişletilmiş hâlidir.

[2] Dr. Öğretim Üyesi, Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, İstanbul- Türkiye, ozlem.cezikturk@marmara.edu.tr, ORCID: 0000-0001-7045-6028

[3] Arş. Gör. Dr., Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, İstanbul-Türkiye, tugba.hangul@marmara.edu.tr, ORCID: 0000-0003-4871-497X

3D. On the other hand, about half of the study group gave a single answer to the related question, unable to produce different options. It was concluded that Geogebra may act as a proof tool, especially in the Analytic Geometry and Analysis courses that covers basic mathematical and geometric concepts. The conclusion was that, it is possible to use open-ended questions with Geogebra practices as part of development of mathematical and geometric thinking process.
Keywords: Analytic geometry; Geogebra; mathematical thinking process

Makale Türü (Article Type): Araştırma Makalesi/Research Article

Kaynakça Gösterimi: Çeziktürk, Ö., & Hangül, T. (2022). Cevabı tek olmayan soru üzerinde matematiksel düşünme süreci: Bir Geogebra uygulaması. *Journal of Sustainable Educational Studies (JSES)*, (Ö1), 97-113.

1. GİRİŞ

Teknolojinin hızlı gelişimi, eğitimin her zaman kalitesini iyileştirmeye yönelik çalışmalar içerisinde olmasını gerektirmektedir. Bu bağlamda, ilkokuldan üniversiteye kadar tüm seviyelerde matematik eğitiminde yeni öğretim yöntemlerinin uygulanması gerekliliği anlaşılmaktadır (Sekulic ve Takaci 2013; Tamam ve Dasari 2021). Buna ek olarak, yeni öğretim yöntemlerinin, pratik uygulama ve günlük hayatta onu tanıma yoluyla öğrencileri matematiği farklı görmeye ve deneyimlemeye teşvik etmesi beklenmektedir. Tüm bu talepler, teknoloji tabanlı ve öğrenci odaklı bir öğrenme sistemi geliştirerek öğrenci ihtiyaçlarını kolaylaştıran bir öğrenmenin işe koşulmasını içermektedir (Sekulic ve Takaci 2013; Tamam ve Dasari 2021).

Bu durumda öğrenmeyi desteklemek amaçlı; çeşitli uygulamalara sahip web tabanlı veya dinamik matematik/ geometrik yazılımlar kullanılabilir (Tamam ve Dasari 2021). Dinamik geometri yazılımlarının matematik bağlamındaki öğrenme ve öğretme ortamlarını zenginleştirerek kalitesini arttırdığı, pedagojik faaliyetlerde büyük bir ilgi ve motivasyon oluşturarak, matematik ve geometrik düşüncelerin gelişimini olumlu yönde etkilediği pek çok araştırma (Jones 2000; Straesser 2002; Forsythe 2007; Kutluca ve Zengin 2011; Ismail ve Rahman 2017; Hangül ve Cezikturk 2020; Pari Condori, Mendoza Velazco vd. 2020; Wijaya 2020) tarafından ortaya konmuştur (Şengün ve Kabaca, 2016). Dinamik geometri yazılımlarının matematik öğrenme ve öğretme süreçlerinde yer almasının gerekliliği, bu araştırmaların ortak önerisi olarak dikkat çekmektedir.

Dinamik geometri yazılımlarının incelendiği çalışmalarda, bu yazılımların matematiksel kavramları görselleştiren bir araç olmanın ötesinde bu kavramlara ilişkin sorgulama, muhakeme ve akıl yürütme, problem çözme ve değerlendirme yapma gibi becerileri destekleyecek biçimde kullanılmasının önemi belirtilmiştir (Şengün ve Kabaca, 2016). Öte yandan dinamik geometri ortamlarının öğrencilerde ispat ve ispatlama konusunda daha anlamlı bir fikir oluşumunu sağladığı söylenebilir (Jones, 2001). Bu bağlamda, dinamik geometri/ matematik yazılımlarının sahip oldukları özellikler sayesinde gerek matematiksel sorgulama ve muhakeme süreci içinde bulunulması gerekse bu süreç içerisinde birer ispat aracı olarak kullanabilmesi gibi farklı işlevleri söz konusudur. Tüm bu belirtilenlerin de kavramsal ve anlamlı öğrenmeyi destekleyecek nitelikler olduğu görülmektedir.

Günümüzde dinamik geometri sistemleriyle (DGS) bilgisayar cebir sistemlerinin (BCS) birleştirilmesiyle oluşan dinamik matematik yazılımları (DMY) dikkat çekmektedir (Baydaş, Göktaş ve Tatar, 2013). Dinamik matematik yazılımları içerisinde en yaygın olanlardan biri de Geogebra'dır. Çünkü Geogebra, DGS'nin kullanım kolaylığını BCS'nin özellikleriyle birleştiren çok yönlü bir araçtır (Hohenwarter, Hohenwarter ve Lavicza, 2009). Bu ücretsiz yazılım, geometriyi ve cebiri farklı temsiller şeklinde birleştirdiği için programın yazarı Markus Hohenwarter tarafından bu şekilde adlandırılmıştır (Edwards ve Jones, 2006). Geogebra; grafik penceresi, cebir penceresi, hesap çizelgesi gibi farklı ara yüzleriyle; matematiksel kavramların cebirsel, nümerik ve şekilsel temsilleri arasında hızlı ve etkili geçişler yapmaya imkân sunmaktadır (Aktümen, Horzum, Yıldız ve Ceylan, 2011). Bununla birlikte Geogebra matematiğin daha iyi anlaşılmasına katkı sağlamak için geliştirilmiştir (Dikovic, 2009). Kullanıcılar, sürgü özelliğini kullanarak veya koordinat düzleminde matematiksel yapıların konumlarını değiştirerek bunlara bağlı diğer yapıların da değişimlerini gözlemleyebilmektedir. Bu sayede matematiksel ilişkilerin dinamik ortamda daha iyi anlaşıldığı ve matematiksel problemlerin de daha kolay çözülebileceği görülmektedir (Dikovic, 2009). Dahası, herhangi bir bilgisayarda çevrimiçi veya çevrimdışı olarak kullanma imkânı sunduğu için Geogebra dünyada yaygın hale gelmektedir (Edwards ve Jones, 2006; Dikovic, 2009; Arinive ve Dewi, 2019).

Tüm bu uğraşların matematiği ve geometriyi daha iyi anlamak adına gerçekleştirildiği görülmektedir. Baykul (2009, s. 354) geometriyi, *"Matematiğin; nokta, doğru, düzlem, düzlemsel şekiller, uzay, uzaysal şekiller ve bunlar arasındaki ilişkilerle geometrik şekillerin uzunluk, açı, alan, hacim gibi ölçülerini konu edinen dalıdır."* şeklinde tanımlamıştır. Okul matematiğinde (ilköğretim ve lise) ölçüsel geometriyle ölçü-dışı geometri bir arada verilmektedir. Ölçüsel geometri cisimlere ve şekillere yönelik yapılan ölçümlerle ilgili hesaplamaları ele alırken; ölçü-dışı geometri tanım, teorem, aksiyom ve geometrik yer gibi hususlara odaklanmaktadır (Baki, 2019). Bu bakımdan, geometri öğretiminde iç içe geçmiş iki hedefin olduğu görülmektedir. Bunlardan birincisi, matematik dersi öğretim programlarında belirtilen geometriye ilişkin bilgi ve becerilerin kazanılması, ikincisi ise öğrencilerin geometrik düşünce düzeylerinin gelişimini desteklemesidir (Baykul, 2009). Bunların ilki bilinen ve genelde odaklanılan amaçtır. Diğeri, düşüncenin yapısında değişiklik gerektirir ve birincisine göre daha üst seviyededir. Bu bağlamda, yapılan öğretim bir taraftan öğrencilerin programın geometri alanında belirtilen bilgi ve becerileri kazanmalarını hedeflerken, diğer taraftan geometrik düşünceyi geliştirecek özelliğe sahip olmalıdır. Bu iki durum birbirinden bağımsız değil, aksine iç içe geçmiş haldedir (Baykul, 2009).

Yükseköğretim düzeyine gelindiğinde de yukarıda okul matematiği için ifade edilen hedeflerin daha da geliştirilmesi beklenmektedir. Buradan hareketle, matematik öğretmenliği lisans programının başlangıcından itibaren geometrik düşüncenin gelişimini destekleyecek nitelikte Geometri öğretimi, Öklid geometrisi, Analitik geometri I-II, Diferansiyel geometri, Dönüşümler ve geometriler, Genel topoloji gibi geometri derslerinin olduğu görülmektedir (YÖK, 2018). Bu derslerden Analitik geometri I, 2018 yılında yürürlüğe giren matematik öğretmenliği lisans programının 3. yarıyılındaki haftalık 2 saatlik zorunlu alan eğitimi derslerinden birisidir. Benzer şekilde, mevcut programın 4. yarıyılında da Analitik geometri II, haftalık 2 saatlik zorunlu alan eğitimi dersi olarak yer almaktadır (YÖK, 2018, s. 2). Analitik geometri; cebir ve geometrinin birleşiminden elde edilen bir matematik dalıdır (Sugandi ve Bernard, 2020). Bu yaklaşımla, Analitik geometri I dersi kapsamında *"Düzlemde ve uzayda kartezyen koordinatlar; düzlemde ve uzayda vektörler; düzlemde doğrular; üç boyutlu uzayda doğru ve düzlemler; doğru ve düzleme göre yansımalar; nokta-doğru; doğru-düzlem ve düzlemlerin birbirleriyle ilişkileri; düzlemde öteleme ve dönme"* kavramları ele alınırken; Analitik geometri II dersinde ise *"Koniklerle ilgili temel bilgiler, düzlemde genel ikinci derece denklemleri ve bunların indirgenerek temsil ettikleri koniklerin çizimi; kutupsal, silindirik ve küresel koordinatlar; uzayda özel yüzeyler: silindirler, dönel yüzeyler, ikinci dereceden yüzeyler"* gibi başlıklara odaklanılmaktadır (YÖK, 2018, s. 7-8). İçeriklerden de anlaşıldığı üzere, öğretmen adaylarının bu derslerde boyutsal geometriyi cebirsel yollarla inceleme fırsatı buldukları görülmektedir. Analitik geometri II; Öklid geometrisi, Matematik öğrenme ve öğretme yaklaşımları, Analiz I-II-III gibi temel alan eğitimi derslerinde belli bir altyapı oluşturulduktan sonra verilmektedir. Ayrıca Analitik geometri dersi, matematik öğretmen adaylarının aldığı pür matematik derslerinin başında gelmektedir ve Geometri, Lineer cebir, Cebir, Kompleks analiz, Nümerik analiz, vs. gibi dersler için de bir basamak teşkil etmektedir. Bu bağlamda, bu dersin matematik öğretmenliği lisans programında önemli bir yeri olduğu görülmektedir.

Literatür incelendiğinde; analitik geometrinin öğrenimi ve öğretimiyle alakalı yurt içinde ve yurt dışında farklı bağlamlara odaklanan çalışmaların olduğu görülmektedir. Bunlardan bazıları Cabri, Geogebra vb. gibi dinamik geometri/matematik yazılımlarının öğrencilerin analitik geometri derslerindeki başarılarına etkisini (Tatar, Kağızmanlı ve Akkaya, 2014; Güneş, 2016; Bayraktar, Broutin ve Güneş, 2018; Khalil vd., 2018) ve bu yazılımların analitik geometri derslerindeki kullanımına yönelik görüşlerini (Tatar, Kağızmanlı ve Akkaya, 2014; Baltacı, Yıldız ve Kösa, 2015; Güneş, 2016) incelerken, diğer bir çalışma bu yazılımların analitik geometri dersinin öğrenme süreçlerindeki kullanımına (Baltacı ve Yıldız, 2015) odaklanmaktadır. Öte yandan, öğretmen adaylarının analitik geometri alan dilini kullanma becerileri (Pazarbaşı ve Es, 2015); öğrencilerin analitik geometri alanına yönelik Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinin belirlenmesi (Yudianto, Sugiarti ve Trapsilasiwi, 2018); analitik geometriye ile analize ait kavramları birlikte ele alan yaklaşıma dayalı öğretim modeli (Madrazo ve Dio, 2020); Geogebra yazılımının analitik geometriye ilişkin problem çözme becerilerine (Sugandi ve Bernard, 2020) ve uzamsal görselleştirme becerilerine (Kösa, 2016) etkileri gibi hususlar da incelenmiştir. Bu çalışmalarda analitik geometri derslerine dinamik geometri/ matematik yazılımlarının entegre edilmesinin başarıyı arttırma, matematiksel düşünme becerilerini geliştirme, kavramsal öğrenmeyi destekleme, öğretimin ve öğrenci öğrenmelerinin değerlendirilmesine imkân verme gibi farklı açılardan avantajlarının olduğu belirtilmiştir. Bununla birlikte, bu çalışmalarda daha farklı bağlamları ve yaklaşımları içeren daha fazla araştırmanın yapılması gerektiği de vurgulanmıştır. Tüm bu söylenilenler ışığında, bu çalışmada Analitik geometri dersi kapsamında, öğretmen adaylarının açık uçlu bir soru üzerindeki matematiksel düşünme süreçleri

Geogebra yazılımı aracılığıyla incelenmiştir. Böylelikle hem öğretmen adaylarının mevcut kavramlara ilişkin nasıl akıl yürüttükleri hem de Geogebra yazılımının, matematiksel muhakeme ve sorgulama süreçlerini inceleme noktasındaki katkısı ortaya konulmak istenmiştir.

Bu bağlamda bu araştırma kapsamında aşağıdaki araştırma problemine cevap aranmıştır:

1. Matematik öğretmen adaylarının cevaplarında hangi matematiksel kavramlar ortaya çıkmıştır?
2. Geogebra yazılımının matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerine katkıları nelerdir?

2. YÖNTEM

2.1. Araştırma Deseni

Bu çalışma, nitel araştırma yöntemlerinden olgubilim desenine göre planlanmıştır. Olgubilim (fenomenoloji), farkındalığımızın olduğunu düşündüğümüz ama derin bir anlayışımızın olmadığı olguları konu edinmektedir. Olgularla, içinde yaşadığımız şu dünyadaki durumlar, olaylar, yönelimler, algılar ve deneyimler gibi değişik biçimlerde karşılaşmamız mümkündür. Yine de aşinalık olarak göreceğimiz bu durum, bahsedilen bu kavramları tam olarak anlayabildiğimizi göstermemektedir. Bu bağlamda olgubilim yani fenomenolojik desen, çok da yabancı olmadığımız ama tam olarak kavrayamadığımız olguları incelemeyi amaçlayan araştırmalarda kullanılmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu çalışmada da nokta, doğru, düzlem, eğri gibi ilkokuldan itibaren matematik ders programlarında yer verilen kavramları içeren bir soru üzerinden matematik öğretmen adaylarının matematiksel çıkarım süreçleri incelenmek istenmiştir. Bir diğer ifadeyle, hakkında çok derin bir kavrayışımızın olmadığı, matematik öğretmen adaylarının bu temel kavramların sentezine ilişkin mevcut durumlarının bir fotoğrafı çekilerek bunların yorumlanması amaçlanmış ve bu sebeple çalışma olgubilim deseni olarak tasarlanmıştır.

2.2. Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubunu bir devlet üniversitesinin matematik öğretmenliği programında 2020-2021 Eğitim-Öğretim yılında yürütülen Analitik geometri II dersine kayıtlı 33 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Çalışma grubu belirlenirken amaçlı örnekleme yöntemlerinden kolay ulaşılabilir durum örneklemesi tercih edilmiştir. Covid-19 salgın sürecinde araştırmacıların hızlı biçimde ulaşabilecekleri bir grup olmasına dikkat edilmiştir. Öte yandan, araştırmanın matematik öğretmen adaylarıyla birlikte yapılmasının en önemli bir sebebi de, geleceğin matematik öğretmenlerinin matematiksel düşünme süreçlerini Geogebra tarzı dinamik bir matematik yazılımıyla destekleyebileceklerini ve Geogebra'yı adeta bir ispat aracı olarak kullanabileceklerini fark etmelerini sağlamaktır.

2.3. Verilerin Toplanma Süreci ve Veri Toplama Araçları

Dönem öncesinde, YÖK'ün matematik öğretmenliği lisans programında belirlediği Analitik geometri II dersinin içeriği yükseköğretim kurumları için hazırlanmış farklı analitik geometri kitapları (Karakaş, 1983; Karakaş, 2008; Arslaner, 2015) incelerek güncellenmiştir. Bu bağlamda dersin öğrenme çıktıları:

1. Konikleri sınıflandırır, denklemlerini ayırt eder ve özelliklerini analiz eder.
2. Yüzey tanımını yapar ve özelliklerini belirler.
3. Uzayda silindir, küre, konik yüzeyler ve torus gibi yüzeylerin özelliklerini belirler.
4. Özel yüzeylerin ara kesit eğrilerini bulabilir.

olarak belirlenmiştir. Dönem süresince çevrim içi olarak verilen Analitik geometri II dersi kapsamında; nokta, doğru, düzlem, eğri, nokta grupları vb. konular ve bunların birbirleriyle ilişkileri üzerinde sınıf tartışmaları yapılarak ve üretilen tüm fikirler GeoGebra aracılığıyla görselleştirilmiştir. Böylelikle öğretmen adaylarının gerek farklı temsiller kullanılarak gerekse matematiksel sorgulama ve muhakeme süreçlerine aktif olarak katılarak ilgili geometrik kavramları anlamlandırmaları amaçlanmıştır. Analitik Geometri II derslerinin öğretimi dönem boyunca bu yaklaşımla gerçekleştirilmiştir.

Veri toplama sürecine yönelik, öncelikle araştırmacılar tarafından *"Bir noktadan sonsuz doğru geçer. İki noktadan sonsuz eğri geçer. Bu durumda üç noktadan … geçer."* şeklinde açık uçlu sorudan oluşan bir form hazırlanmıştır. Soru metni hazırlandıktan sonra dersi daha önce almış iki öğretmen adayıyla pilot çalışması yapılarak soruya nihai hali verilmiştir. Soru, herhangi bir kitapta (Öklid'in elementleri dışında) doğrudan cevabı bulunamayacak tarzdaki özelliğiyle dikkat çekmektedir. Sorunun belirlenmesinde farklı durumlar düşünüldüğünde farklı cevaplar vermeye fırsat sunması etkili olmuştur. Öğretmen adaylarının bu farklı durumları dikkate alarak matematiksel bir düşünme sürecine girip girmeyecekleri merak edildiğinden soru tam olarak yapılandırılmamıştır. Öğretmen adaylarının sadece çizim yaparak sonuca ulaşamayacakları, önceki öğrenmeleriyle ilişkilendirme yapmalarını gerektiren bir süreç geçirmeleri istenmiştir. Bu bakımdan, bu soruya cevap verebilmeleri için öğretmen adaylarının hem matematiksel düşünme sürecine girmeleri hem de cevaplarını ispatlayacak nitelikte bir çizim yapmaları gerekmektedir. Bu doğrultuda, öğretmen adaylarına soruyu cevaplandırma sürecinde GeoGebra yazılımından faydalanabilecekleri söylenerek çalışmanın verileri, adayların süreçte oluşturdukları GeoGebra uzantılı dosyalarından ve yazılı olarak doldurdukları formlardan elde edilmiştir.

2.3. Verilerin Analizi ve Yorumlanması

Verilerin çözümlenmesi aşamasında ise içerik analizi yönteminden faydalanılmıştır. İçerik analizinde, verileri açıklayabilecek ilişki ve kavramlara erişebilmek amaçlanmaktadır. Bu doğrultuda, verilerin sırasıyla kavramsallaştırılması, elde edilen kavramlara göre düzenlenmesi ve veriyi açıklayıcı temaların ortaya çıkarılması istenmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu çalışmada da daha önce yapılandırılmış herhangi bir çerçeve kullanılmadığı için verilerin çözümlenmesi içerik analizi yaklaşımıyla gerçekleştirilmiştir. İlgili dokümanlar incelenerek; öğretmen adaylarının cevaplarındaki benzerlikler ve farklı noktalar, kullandıkları alternatif yöntemler, oluşturdukları farklı gösterimler, çizimler, açıklamalar vb. ortaya konulmaya çalışılmıştır. Ayrıca veriler; yüzde ve frekans hesaplamalarıyla desteklenmiş, zaman zaman da öğretmen adaylarının kendi ifadelerinden doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Miles ve Huberman'ın (1994) formülü kullanılarak da, iki araştırmacının ayrı ayrı oluşturduğu alt boyutlar arasındaki uyum yüzdesi hesaplanmış ve kodlama güvenirliği % 98 olarak bulunmuştur. Daha sonra da araştırmacıların görüş ayrılığı yaşadıkları kodlarda birtakım düzeltmeler yapılarak analiz süreci tamamlanmıştır.

3. BULGULAR

Öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde; prizmalardan, eğrilere kadar geniş bir yelpazede durumu ele alabildikleri görülmüştür. *"Üç noktadan sonsuz…. geçer."* sorusuna verdikleri cevaplar ve bunlara ilişkin yapılan genel değerlendirmeler Tablo 1'de sunulmuştur. Buna göre adayların 12'sinin (%36) hem iki boyutu hem de üç boyutu düşünerek farklı seçenekleri içeren cevaplar üretebildikleri belirlenmiştir. Bu durum, bu öğretmen adaylarının boyut kavramını çok yönlü düşünebildiklerine işaret etmektedir.

Öte yandan, noktaların doğrusal olup olmamasına ilişkin durumları göz önünde bulundurarak üç ve üzeri farklı cevap sunabilen öğretmen adayının sayısı ise 8 (%24) dur. Öğretmen adaylarının hepsi, üç nokta doğrusal ise bunlardan sonsuz düzlem geçer cevabını vermiştir. Noktaların doğrusal olmaması durumuna ilişkin bu 8 öğretmen adayının sonsuz sayıda elips, hiperbol, daire, eğri, küre, çokgen ile tek bir düzlem gibi oldukça farklı cevaplar verdikleri görülmektedir. Bunların içinde en sık rastlanan cevap, sonsuz sayıda elips ve hiperbol olmuştur. Öğretmen adaylarının çizimlerini genelde elips ve hiperbol gibi konikler üzerinden yaptıkları görülmüştür.

Öğretmen adaylarından 9'unun (%27) iki seçenekli cevap sunabildiği görülmektedir. Bunlardan 4'ü, üç noktanın doğrusal olup olmaması durumunu dikkate alarak cevap verirken, 5 öğretmen adayı ise bu üç noktanın yalnızca doğrusal olmadığı durum üzerinden soruyu cevaplamıştır. Noktaların doğrusal olmadığı durum hakkında yorum yapan öğretmen adayları, sonsuz çokgen, sonsuz konik, sonsuz eğri, tek bir düzlem cevaplarını üretirken; noktaların doğrusal olması durumunda üç noktadan tek bir doğru veya sonsuz düzlem geçebileceğini ifade etmişlerdir.

Tablo 1. Öğretmen Adaylarının Yanıtlarında Ortaya Çıkan Kavramlar

Öğrt. adayı	Cevaplar			Sonuç
	Noktalar doğrusal değilse		Noktalar doğrusal ise	
Ö1	Elips	Hiperbol	Düzlem	Hem 2D hem de 3D'yi düşünerek yorumlama
Ö2	Elips		-----	Elipse ait hem 2D'de hem de 3D'de çizim
Ö3	Daire	Katı cisim	-----	Hem 2D hem de 3D'yi düşünerek yorumlama
Ö4	Tek bir çember		Tek bir doğru	İddiasını kanıtlar nitelikte çizim ve adım adım ispat
Ö5	Daire	Düzlem	Düzlem	Hem 2D hem de 3D'yi düşünerek yorumlama
Ö6	Elips	Hiperbol	Düzlem	Hem 2D hem de 3D'yi düşünerek yorumlama
Ö7	Katı cisim		------	Öklid dışı geometriye işaret eden bir cevap

Ö8	Yüzey	------	-----	Öklid geometrisine göre düzlem, Öklid dışı geometriye göre sonsuz yüzey
Ö9	Doğru	------	Düzlem	Soruda bilgi olarak sunulan aşamaların da ispatı ve üç noktaya ait ispat 3 noktanın çakışık olması durumunda sonsuz sayıda doğru yanıtı
Ö10	Çokgen	Konik	------	Soruda bilgi olarak sunulan aşamaların da ispatı ve üç noktaya ait ispat
Ö11	Tek bir düzlem	Eğri	------	Hem 2D hem de 3D'yi düşünerek yorumlama
Ö12	Tek bir düzlem	Elips, hiperbol ve eğri	Düzlem	Hem 2D hem de 3D'yi düşünerek yorumlama
Ö13	Elips ve daire	Eğri, küre ve çokgen	Düzlem	Hem 2D hem de 3D'yi düşünerek yorumlama
Ö14	Konik	------	------	Koniklere ilişkin bilgi eksikliği
Ö15	Elips	------	------	Önce sonsuz çokgen ifadesini doğru varsayma sonra cevabı sonsuz elips olarak değiştirme
Ö16	Eğri	------	------	Çizim ve açıklama yapmadan cevap verme
Ö17	Eğri	Çokgen	------	Düzlemde 3 noktayı sabit tutarak bunların üzerine sırayla bir, iki, üç… noktalar ekleyerek farklı çokgenler elde etme
Ö18	Konik	------	------	3 noktayı sabit tutup diğer noktaları sürgüye bağlayarak sonsuz sayıda elips, hiperbol oluşturma
Ö19	------	------	------	Soruyu cevaplamamış
Ö20		Hiçbir fonksiyon		Çizim ve açıklama yapmadan cevap verme
Ö21	Çokgen	------	------	İlk iki noktanın sabit tutulup, üçüncü noktanın çokgenlerin köşesi olmadığı fakat bunlardan birinin kenarları üzerinde olması
Ö22	Eğri	Elips ve hiperbol	Düzlem	Hem 2D hem de 3D'yi düşünerek yorumlama
Ö23	Eğri	Elips ve hiperbol	Düzlem	Hem 2D hem de 3D'yi düşünerek yorumlama
Ö24	Dörtgen	------	------	3 noktanın sabit tutulup 4. noktanın düzlemde hareket ettirilmesiyle sonsuz sayıda dörtgen elde edilmesi
Ö25	-------	------	Düzlem	Soruda bilgi olarak sunulan aşamaların da ispatı ve üç noktaya ait ispat
Ö26	Konik	------	Düzlem	Elips ve hiperbolde bulunan sonucun koniklere genellenmesi
Ö27	Çokgen	------	------	İlk iki noktanın sabit tutulup, üçüncü noktanın çokgenlerin köşesi olmadığı fakat bunlardan birinin kenarları üzerinde olması
Ö28	Daire	------	------	İç içe geçmiş daire görsellerinin kullanılması ama herhangi bir açıklama olmaması
Ö29	Konik	------	Düzlem	İspatta herhangi bir görsel kullanılmaması
Ö30	Eğri	Elips ve hiperbol	Düzlem	Soruda bilgi olarak sunulan aşamaların da ispatı ve üç noktaya ait ispat Hem 2D hem de 3D'yi düşünerek yorumlama
Ö31	Konik	------	------	3 noktanın sabit tutulup diğer noktaların hareket ettirilmesiyle sonuca varma
Ö32	Çokgen	Elips Daire	------	Soruda bilgi olarak sunulan aşamaların da ispatı ve üç noktaya ait ispat Hem 2D hem de 3D'yi düşünerek yorumlama
Ö33	Üçgen	------	------	3 noktanın köşe olarak değil, üçgenlerin kenarları üzerinde olduğu sonsuz durum

Farklı durumları düşünmeden sadece tek bir cevap veren öğretmen adaylarının ise 15 (%45) kişi olduğu bulunmuştur. Yani öğretmen adaylarının yaklaşık yarısının tek bir durum üzerinden yorum yapabildiği tespit edilmiştir. Bu cevapların bazıları noktaların doğrusal olduğunu kabul ederek bazılarının ise noktaların doğrusal olmadığını kabul ederek oluşturulduğu anlaşılmaktadır. Elips, daire, yüzey, konik, eğri, çokgen, üçgen gibi cevaplar verilmiştir. Bu cevapların içinde en dikkat çekeni ise, bu üç noktadan hiçbir fonksiyonun geçmeyeceğini iddia eden öğretmen adayına (Ö20) aittir. Fakat Ö20'nin bu iddiasını ne sözel olarak ne de herhangi bir görsel çizerek kanıtlama yoluna gittiği belirlenmiştir. Bu bağlamda, soruya tek bir cevap veren öğretmen adaylarının birbirinden oldukça farklı düşündükleri görülmektedir. Son olarak, katılımcılar içinde Öklid dışı geometriyi işaret eden 1 öğretmen adayının (Ö8) ve soruyu yanıtlamayan da 1 (%3) öğretmen adayının olduğu belirlenmiştir.

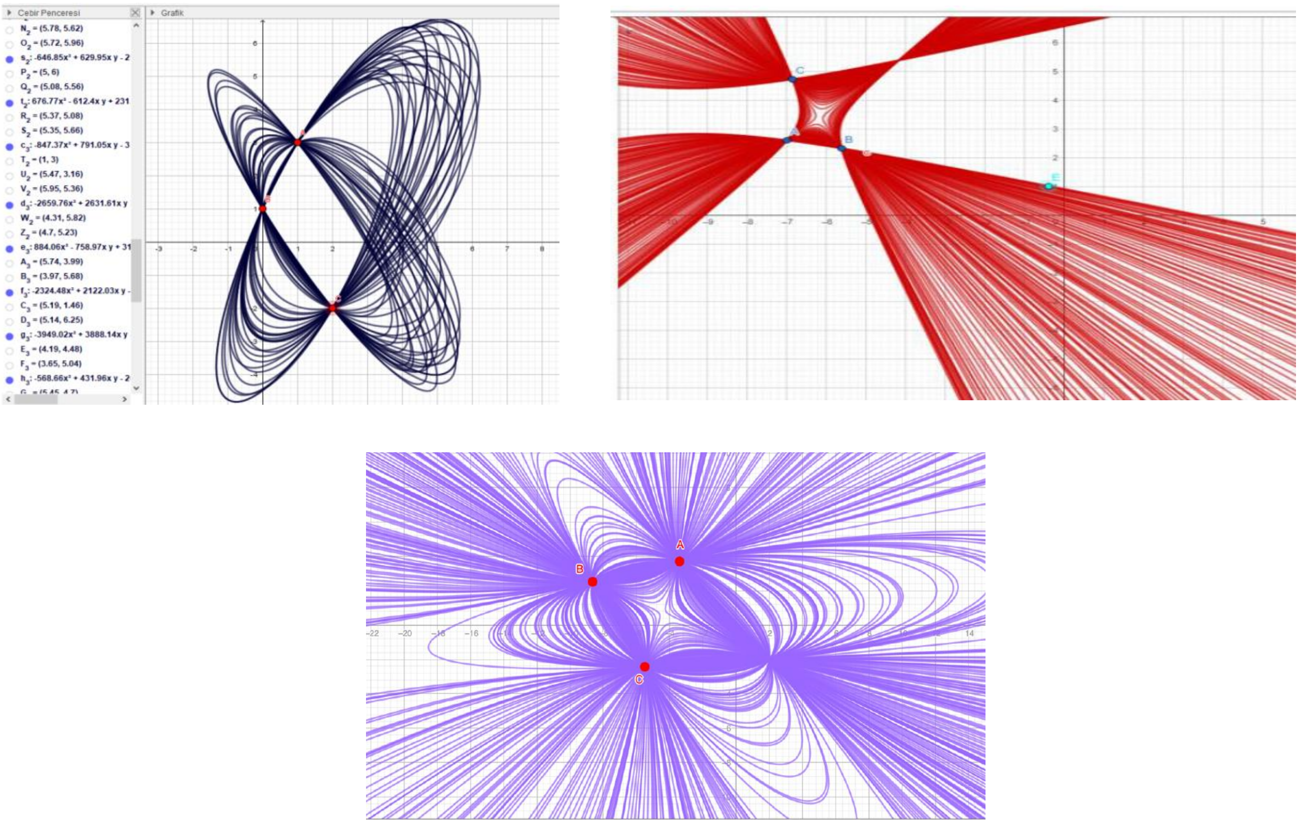
Yukarıda da belirtildiği gibi, öğretmen adaylarının cevaplarının üç noktanın doğrusallığına göre farklılıklar gösterdiği tespit edilmiştir. Bu bağlamda, verilen cevaplar daha detaylı olarak bu iki ayrı başlık altında incelenmiştir:

3.1. Noktaların Doğrusal Olmadığı Durumlara İlişkin Cevaplar

Öğretmen adaylarından 2'si hariç geriye kalan 31 kişinin üç noktanın doğrusal olmadığı durumları düşünerek cevap verdikleri görülmektedir. Bu cevaplar; elips, hiperbol, konik, katı cisim, eğri, daire, yüzey, çokgen, dörtgen, üçgen, küre, doğru, tek bir düzlem, tek bir çember şeklindedir. Bu cevaplar her ne kadar çeşitlilik gösterse de cevapların konik, elips ve eğri etrafında yoğunlaştığı tespit edilmiştir. Bu cevaplar aşağıda daha detaylı biçimde açıklanmıştır:

3.1.1. “Elips”, “hiperbol” ve “konik” kavramlarına ilişkin cevaplar

Elde edilen verilerde genel olarak, üç noktadan sonsuz “elips”, “hiperbol” ve “konik” geçtiğine dair cevaplar göze çarpmaktadır. Ö6 (6 nolu öğretmen adayı), düzlemi düşünerek üç noktadan sonsuz tane elips veya sonsuz tane hiperbol geçebileceğini Geogebra dosyasında göstermiştir. Şekil 1’de Ö6’nın çizimleri yer almaktadır:



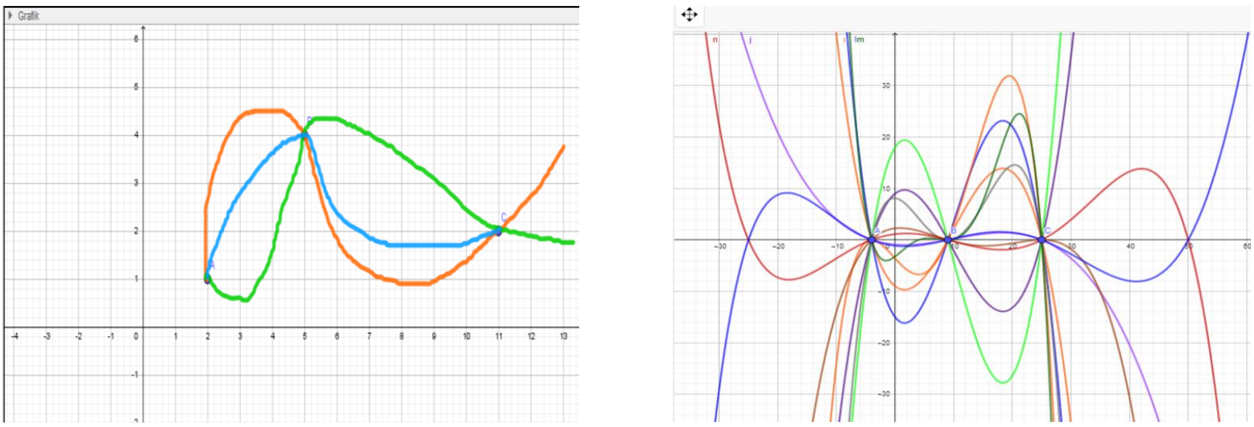
Şekil 1. “Elips”, “Hiperbol” ve “Konik” Cevaplarına ilişkin Çizimler

Bu cevaplara yönelik Ö6’nın yaptığı açıklamalar da şu şekildedir: *“Geogebra’dan 5 tane nokta aldım ve uygulamanın 5 noktadan geçen konik özelliği ile seçtiğim beş noktanın hangi şekli ifade ettiğini araştırdım. A, B, C noktalarını sabitleyerek diğer iki noktayı hareket ettirdim ve sürekli olarak elips ve hiperbol şekli ile karşılaştım. Yani 3 noktadan sonsuz hiperbol ve elips geçer sonucuna ulaştım.”* Bu bağlamda Ö6’nın, GeoGebra üzerinde bir keşif ve matematiksel düşünme süreci yaşadığı görülmektedir. Geogebra’nın konik oluşturmak için tasarlanmış *“5 noktadan geçen konik”* aracının bu süreçte Ö6’ya cevabını oluşturmada yardımcı olduğu görülmektedir.

Öte yandan, Ö6 ile benzer yöntemi kullanan başka öğretmen adaylarının da (örneğin; Ö1, Ö10, Ö12, Ö18, Ö22) olduğu tespit edilmiştir. Bu öğretmen adaylarının da cevaplarını, düzlemde 3 noktayı sabit tutup diğer 2 noktayı sürgüye bağlamak suretiyle oluşturdukları belirlenmiştir. Bu sebeple öğretmen adaylarına Geogebra’nın dinamik yapısına oldukça katkı sağlayan, çok fonksiyonlu *“Sürgü”* aracının yardımcı olduğu anlaşılmaktadır. Ö10’un da bu süreçte nasıl bir akıl yürütme sürecinden geçtiği *“Düzlemde sabit noktaya ve sabit bir doğruya olan uzaklıkları oranı sabit olan noktaların geometrik yerine, konik denir. Elips, hiperbol, parabol ve çember konikler olarak adlandırılırlar. Şimdi elips üzerinde inceleme yaparak “3 noktadan sonsuz konik geçer.” ifadesinin doğru olduğunu göstermeye çalışalım. Bu durumda üç nokta sabit tutulmak üzere (bu üç nokta tüm elipsler için ortak), elips oluşturmak için gerekli olan diğer noktaları sürekli değiştirdiğimizde; üç noktadan geçen sonsuz sayıda elips ile karşılaşıyoruz. Şekilde sabit üç noktası A, B ve C olan (bu üç nokta tüm elipsler için ortak), diğer noktaları ise sürekli değişen sonsuz sayıda elips görmekteyiz. Böylelikle üç noktadan sonsuz elipsin geçtiğini göstermiş oluyoruz ve elips üzerinden “3 noktadan sonsuz konik geçer.” ifadesinin doğruluğunu teyit etmiş* *oluyoruz."* sözlerinden anlaşılmaktadır. Yalnız burada, Ö10'un Ö6'dan farklı olarak elipse yönelik iddiasının doğruluğunu diğer konikler için de geçerli olup olmadığına bakmadan tüm koniklere genellediği görülmektedir. *"Doğrusal olmayan üç noktadan sonsuz elips geçer. Elips bir koniktir. O halde doğrusal olmayan üç noktadan sonsuz konik geçer."* şeklinde tümevarımsal bir yaklaşım sergilediği belirlenmiştir. Öte yandan, böyle bir genelleme yapabilmesi için birden fazla durumun doğruluğunu göstermesi gerektiğini düşünmemiştir.

3.1.2. "Eğri" kavramına ilişkin cevaplar

Öğretmen adaylarının dokümanlarında koniklerden sonra en çok "eğri" cevabına rastlanmıştır. Uzayda veya düzlemde buna ilişkin öğretmen adaylarından farklı cevapların geldiği tespit edilmiştir. Örneğin Ö11, cevabını neden sonsuz eğri olarak verdiğini şu şekilde açıklamıştır: *"...sonra düşündüm; 2 noktadan sonsuz eğri geçtiğine göre 3 noktadan hayli hayli sonsuz eğri geçer dedim. Bunu göstermek için herhangi 3 nokta aldım. Bu 3 noktadan geçen eğriler çizdim. Çok karışık görüntü olmasın diye olabilecek eğrilerden sadece birkaçını çizdim. Benim aşağıda aldığım noktalar doğrusal değiller. Fakat doğrusal da olsalardı yine aynı mantıkla sonsuz tane eğri geçebilirdi. Bu şekilde çizildiğinde 3 noktadan sonsuz eğri geçer. (Bu gösterim aynı düzlemde 3 noktayı sağladı.) Uzayda alınan 3 noktadan da sonsuz eğri geçebilir. Mesela hortum düşünelim. Hortumu evirip çevirerek 3 noktadan geçirebiliriz. Hortumun üzerindeki 3 nokta aynı düzlemde olmayabilir ama o da eğri belirtir. Böylece eğri, olabilecek durumları sağladı. Kısacası doğrusallık, aynı düzlemde bulunmama vs. durumlarını değerlendirdiğimde bazı fikirlerimden vazgeçtim. Sonuç olarak noktalı yere sonsuz eğri gelmesi gerektiğini düşünüyorum."* Bu açıklamasına ilaveten Şekil 2'deki sol tarafta verilen çizimi yapmıştır. Ö11, Geogebra'daki eğri araçlarını veya komutlarını kullanmayıp *"Kalem"* özelliğiyle basit bir şekil çizmeyi tercih etmiştir. Fakat yine de günlük hayattan "hortum" örneğini vererek yaptığı açıklamasıyla cevabını pekiştirmiştir. Bu bakımdan Geogebra'nın Ö11'in bu sorudaki matematiksel düşünme sürecinde çok büyük bir katkısının olmadığı söylenebilir. Öte yandan, Ö11'in eğri cevabını düzlemle sınırlamayıp uzay için vermiş olması dikkat çekicidir.

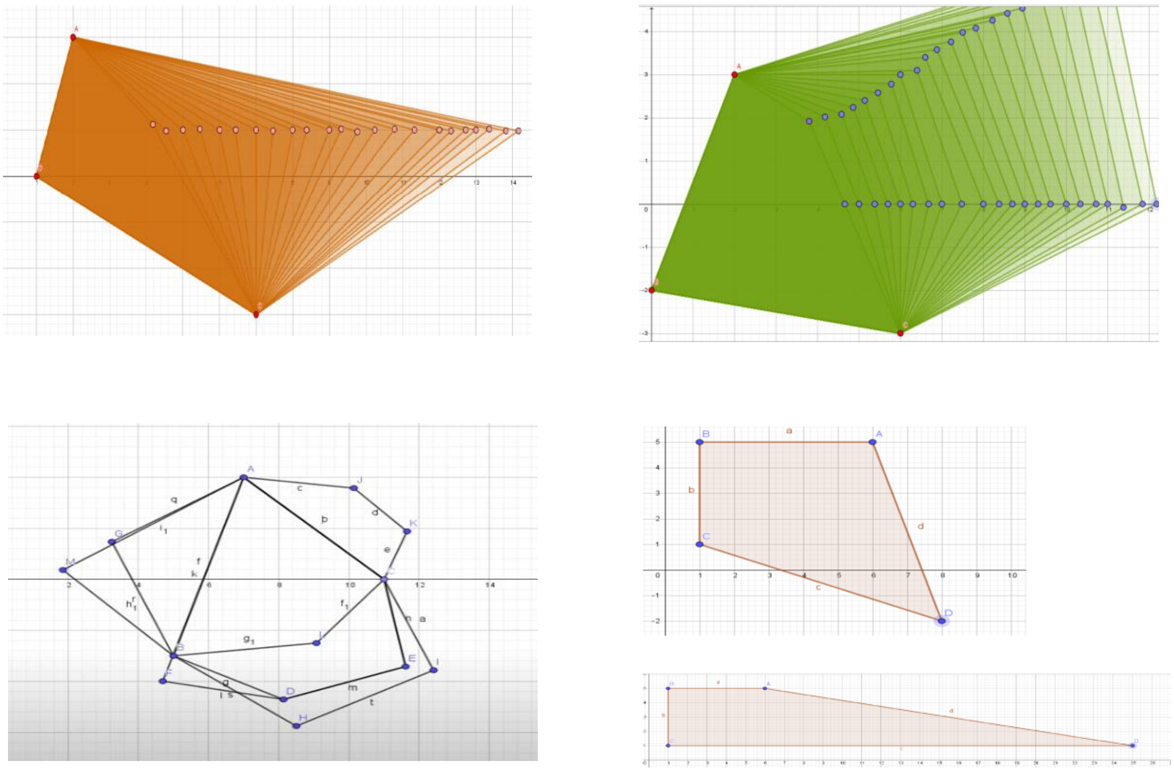


Şekil 2. "Eğri" Cevabına ilişkin Çizimler

Ö30'un çizimi ise Şekil 2'de sağ tarafta gösterilmiştir. Buna göre Ö30 düzlemde alınan üç noktadan sonsuz eğri geçebileceğini kanıtlamıştır. Fakat burada Ö11'in aksine seçtiği noktaların doğrusal olduğu görülmektedir. Noktaların doğrusal olmadığı duruma ilişkin ise Ö30'un elips ve hiperbol çizimlerinin olduğu tespit edilmiştir. Ö30'un Geogebra dosyası incelendiğinde, bu yapıya ulaşırken Geogebra'nın *giriş satırına* farklı eğri denklemleri yazdığı görülmektedir. Ö30'un bu çizimleri haricinde başka bir açıklaması mevcut olmayıp soru için verilen bilgilerin de (Bir noktadan sonsuz doğru, iki noktadan sonsuz eğri geçer.) GeoGebra da ispatını yaptığı, üç nokta için verdiği cevapları da bunlar üzerine inşa ederek oluşturduğu belirlenmiştir.

3.1.3. "Çokgen" kavramına ilişkin cevaplar

Öğretmen adaylarının dokümanlarında; "üçgen", "dörtgen" vb. gibi çokgen çeşitlerine ait cevapların yanı sıra bulunan sonuçların genellenerek "çokgen" yanıtlarının verildiği görülmektedir. Bu doğrultuda verilen cevaplara ilişkin çizimler Şekil 3'te gösterilmiştir. Buna göre Ö10, öncelikle düzlemde doğrusal olmayan 3 noktayı sabit tutup bunlara farklı konumlardaki 4. noktaları eklemek suretiyle sonsuz sayıda dörtgen elde edilebileceğini göstermiştir. Sonra bunlara 5. noktaları da ekleyerek bu durumun beşgenler için de geçerli olduğunu belirtmiştir. Buradan yola çıkarak da, bu şekilde sonsuz sayıda nokta eklemenin mümkün olduğunu ve dolayısıyla da üç noktayı içeren sonsuz sayıda çokgenin oluşturulabileceğini göstermiştir. Bu yaptıklarını da *"Çokgen, düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan n tane noktayı ikişer ikişer birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu kapalı şekillerdir. "3 noktadan sonsuz çokgen geçer." İfadesinin doğru olduğunu teyit edebilmek için önce bazı şartlar belirlememiz gereklidir. Öncelikle doğrusal olmayan üç nokta söz konusu olduğu için bu üç noktayla en az 3 kenarlı bir çokgen yani üçgen oluşturmamız mümkündür. Ancak bu üç nokta hep sabit kalacağı için oluşturacağımız her üçgen birbirinin aynısı olacaktır. Bu durumda üç nokta ile sonsuz sayıda üçgen oluşturmamız mümkün olamayacaktır. Bu nedenle çokgenleri incelerken en az dörtkenarlı ($n \geq 4$) olmasına dikkat etmemiz gerekir. Bu durumda n=4 olarak alırsak 3 noktayı sabit tutmak üzere 4. Noktayı sürekli olarak değiştirdiğimizde sonsuz sayıda dörtgen oluşturabilmemiz mümkündür."* ifadeleriyle açıklamıştır. Şekil 3'te gösterilen üstteki iki çizim Ö10'un dokümanından alınmıştır.

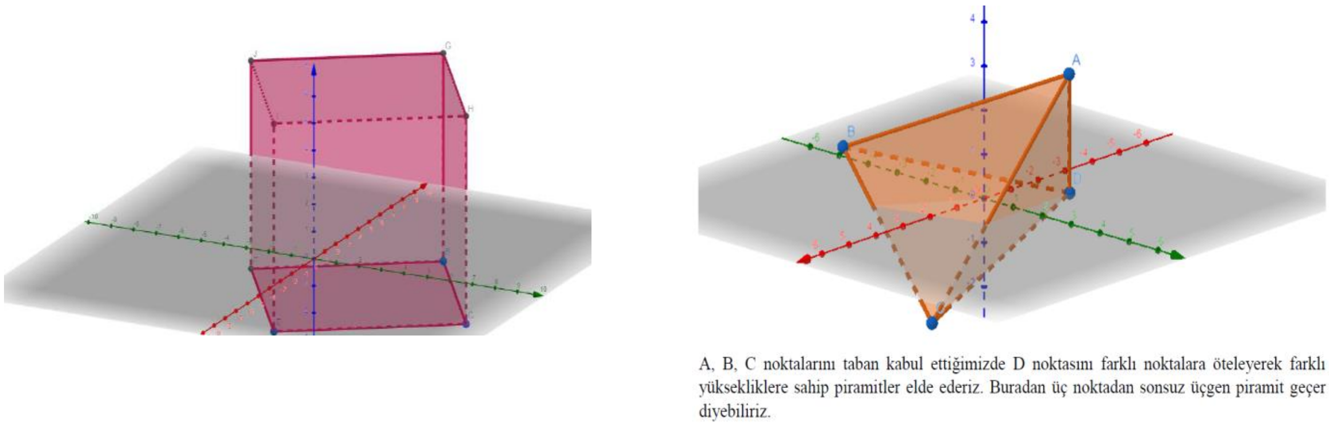


Şekil 3. "Çokgen" Cevabına ilişkin Çizimler

Ö10'a benzer mantıkla hareket eden diğer öğretmen adaylarının (Ö17 ve Ö24) yaptıkları çizimler de Şekil 3'te (alttaki iki çizim) gösterilmektedir. Burada, öğretmen adaylarına düşünme süreçlerinde Geogebra'nın *"doğru parçası"* ve *"çokgen"* araçlarının yardımcı olduğu görülmektedir.

3.1.4. "Katı cisim" kavramına ilişkin cevaplar

Üç noktadan sonsuz katı cisim geçeceğini belirten 2 öğretmen adayı (Ö3, Ö7) mevcuttur. Bunlardan Ö3, "*Resimlerde olduğu gibi seçtiğimiz herhangi üç noktadan geçen yani bu üç noktayı kapsayan sonsuz tane katı cisim çizilebilir."* şeklinde bir açıklama yaparken; Ö7, *"Doğrusal olmayan üç nokta alalım. Bu noktaları üzerinde bulunduran farklı yüksekliklere ve genişliklere sahip sonsuz katı cisim çizilebilir. Bunu birkaç örnekle gösterelim. Üçgen piramit, üçgen dik prizma vb. örnekler verilebilir."* ifadesiyle cevabını sunmuştur. Şekil 4'te Ö3'ün (soldaki kare prizma çizimi) ve Ö7'nin (sağdaki prizma çizimi) çizimleri gösterilmiştir.



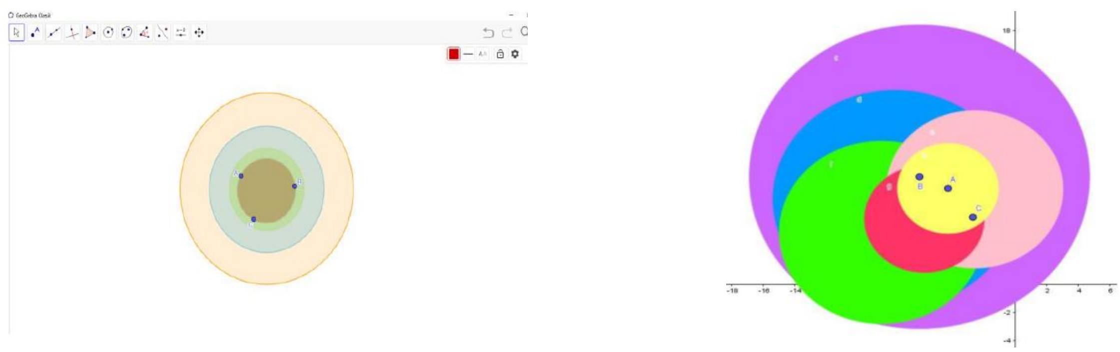
Şekil 4. “Katı cisim” Cevabına ilişkin Çizimler

Açıklamalardan ve çizimlerden anlaşıldığı üzere, Ö3 ve Ö7 üç noktayı bir düzleme sabitleyip, bu düzlem üzerinde sonsuz sayıda farklı cisim oluşturulabileceği düşüncesi üzerinden hareket etmişlerdir. Öte yandan, Ö3’ün soruya küre cevabını da verdiği Tablo 1’den görülmektedir. Ö3’ün burada diğer cevabından farklı olarak bu 3 noktanın kürenin yüzeyinde değil de içinde olması durumunu kabul ederek cevabını verdiği görülmektedir.

Katı cisimlere ait çizimlerde ise Ö3 ve Ö7’nin Geogebra’nın 3D penceresine ait araçlardan faydalandıkları görülmektedir. Burada Ö7’nin Geogebra’yı yaptığı piramit çizimi ve altına eklediği açıklamalarla adeta bir ispat aracı gibi kullandığı görülmektedir.

3.1.5. “Daire” kavramına ilişkin cevaplar

Öğretmen adaylarından ilgili soruya “sonsuz daire” cevabını verenlerin olduğu da tespit edilmiştir. Şekil 5’te sırasıyla Ö3 ve Ö32’nin çizimleri gösterilmektedir. Ö3, küre yanıtında olduğu gibi (bkz. 3.1.4. katı cisimler) daire cevabını verirken de aynı düşünce üzerinden hareket etmiştir. Bu düşüncesini *“Resimde olduğu gibi seçtiğimiz herhangi üç noktadan geçen yani bu üç noktayı kapsayan sonsuz tane daire çizilebilir.”* ifadesiyle açıklamıştır. Ö32’nin de benzer bir yaklaşım içerisinde olduğu *“Örneklerden de anlaşılabileceği gibi verilen 3 noktayı üzerinde barındıran farklı büyüklüklerde sonsuz daire çizilebilir. Bu nedenle 3 noktadan sonsuz daire geçer diyebiliriz.”* ifadelerinden ve çiziminden (bkz. Şekil 5. sağdaki çizim) anlaşılmaktadır.



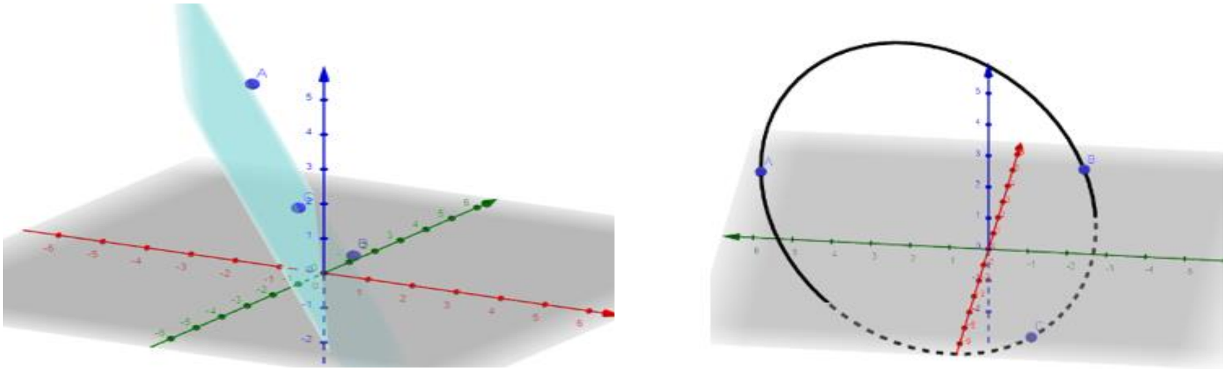
Şekil 5. “Daire” Cevabına ilişkin Çizimler

Bu şekilde düşünen başka öğretmen adaylarının da olduğu görülmektedir. Öğretmen adaylarından bazıları daireye ek olarak farklı başka yapıların da oluşabileceğini belirtirken diğer tarafta düzlemde sadece daire oluştuğunu ifade edenler de mevcuttur. Öğretmen adaylarının neden cevaplarını sadece daire ile sınırlandırdıkları hususunun üzerinde düşünülmesi gerektiği görülmektedir. Yalnız burada noktaların çemberlerin üzerinde değil de daire içinde alınması soruda verilen sınırlılıklara ters düşmektedir.

3.1.6. "Yüzey" kavramına ilişkin cevaplar

Öğretmen adayları içinde en dikkat çeken cevaplardan birinin Ö8'in cevabı olduğu görülmektedir. Ö8, yüzey cevabını hem düzlemde hem de uzayda düşündüğü için Öklid dışı geometriyi de işaret eden farklı seçenekler üretebilmiştir. Düşünme sürecine 2 boyuttan başlayarak üç noktadan sadece tek bir düzlem geçtiğini şu ifadelerle açıklamıştır: *"Öğrendiğimiz en basit yüzey düzlemdir. 3 noktadan sadece bir tane düzlem geçebilir. Geogebra'da 3 nokta çizip düzlem çizmek istediğimizde yanda görüldüğü gibi sadece bir düzlem çizebiliyoruz."* Buradan Geogebra'nın *"düzlem"* aracının en az 3 noktayla çalışması prensibi üzerinden bu çıkarımı yaptığı görülmektedir.

Sonrasında "yüzey" denilen yapının 2 boyuttan ibaret olmadığını 3 boyutta da düzlemsel olmayan yüzeylerin olduğunu ifade etmiştir: *"Ancak yüzeyler düzlemle sınırlı değildir. Eğri yüzeyler de vardır. Bunlara da yine derste gördüğümüz küre yüzeyi, koni yüzeyi, silindir yüzeyi, dönel yüzeyleri örnek olarak söyleyebilirim. Örnek olarak birini seçip ispatlayayım. Örneğin küre yüzeyini seçeyim. 3 nokta ile kaç tane küre çizebildiğime bakmak için Geogebra'da 3 nokta belirledim ve bunlardan geçen bir çember çizdim. Çizdiğim bu çember bir kürenin merkezinden geçen arakesiti olabilir. O zaman bu çemberle aynı yarıçapa sahip küreyi çizmiş olurum. Aynı zamanda bu çember bir kürenin merkezinde olmayan bir arakesiti de olabilir. O zaman da yarıçapı daha büyük olan küre çizmiş olurum. Çizmek istediğim kürenin yarıçapını +∞'a kadar arttırabilirim. Yani arakesiti bu çember olan sonsuz tane küre çizebilirim. Üç noktadan sonsuz tane kürenin çizilmesi, sonsuz tane yüzeyin de çizilebildiğini ispatlamak için yeterlidir. Üç nokta ile sadece bir yüzey çeşidinden bile sonsuz tane çizebiliyor olmak, genel olarak sonsuz tane yüzey çizebileceğimizi gösterir."* sözlerinden de anlaşıldığı üzere Ö8 burada Öklid dışı geometriye ilişkin çıkarımlarda bulunmuştur.



Şekil 6. "Yüzey" Cevabına ilişkin Çizimler

Ö8'in yapmış olduğu çizimler şekil 6'da gösterilmektedir. Diğer öğretmen adaylarının aksine Ö8, sade ve basit çizimler üzerinden cevaplarını açıklamıştır.

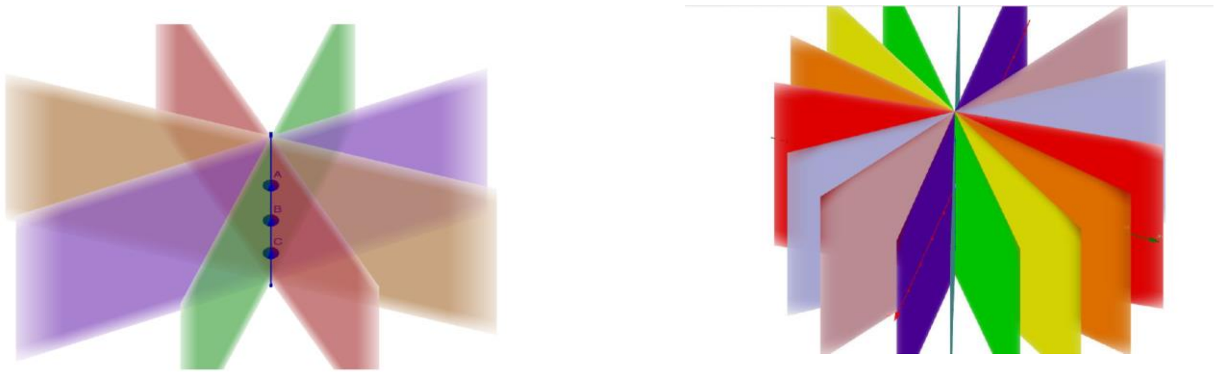
3.1.7. Verilen diğer cevaplar

Yukarıda belirtilenler dışında üç noktanın çakışık olması durumunda bu üç noktadan sonsuz sayıda doğru geçebileceğini ifade eden bir öğretmen adayı ile doğrusal olmayan üç noktadan yalnızca bir düzlem veya tek bir çember geçeceğini ifade eden öğretmen adaylarının da olduğu görülmektedir. Bu cevaplarını da Geogebra üzerinden yaptıkları basit çizimlerle göstermişlerdir.

Öte yandan, öğretmen adaylarından Geogebra'yı cevaplarını, iddialarını temellendirmek için bir çeşit ispat aracı olarak kullananların yanı sıra bazılarının da iddialarını cebirsel olarak kurdukları yapılar, denklemler üzerinden ispatlamaya çalıştıkları tespit edilmiştir. Bu süreçte vektörler, doğru ve düzlem denklemleri üzerinde yaptıkları birtakım işlemlerle iddialarını ispat yoluna gitmişlerdir.

3.2. Noktaların Doğrusal Olduğu Durumlara İlişkin Cevaplar

Öğretmen adaylarından 13'ünün (%39) üç noktanın doğrusal olduğu durumları temel alarak soruyu cevaplandırdıkları görülmektedir. Bu cevapların da "düzlem" ve "tek bir doğru" olarak verildikleri belirlenmiştir. "Tek bir doğru" cevabını 1 öğretmen adayı verirken düzlem yanıtını veren öğretmen adayı sayısı 12'dir. Öğretmen adaylarının, doğrusal üç noktadan sonsuz düzlem geçtiğini gösteren çizimleri şekil 7'de sunulmuştur. Buna göre, öğretmen adaylarının öncelikle doğrusal üç noktadan geçen bir doğru çizdikleri, sonrasında ise bu doğruyu arakesit kabul eden sonsuz tane düzlem çizdikleri görülmektedir.



Şekil 7. “Sonsuz düzlem” Cevabına ilişkin Çizimler

Ö6’nın sürece ilişkin açıklamaları şu şekildedir: *“Geogebra yardımı ile doğrusal üç nokta aldım. Ve bu üç noktadan geçen düzlemler çizdim. Çizdiğim bu düzlemlerin sonu gelmeyeceğini fark ettim ve buradan da eğer bu üç nokta doğrusal ise sonsuz düzlem geçer sonucuna ulaştım.”* Ö6’nın ve diğer öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerinde Geogebra’nın *3D penceresinden, doğru, düzlem, arakesit* gibi araçlarından yararlandıkları görülmektedir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Öğretmen adaylarının açık uçlu bir soru üzerindeki matematiksel düşünme süreçlerinin incelendiği bu çalışmada, öğretmen adaylarının mevcut kavramlara ilişkin akıl yürütmeleri ve bu süreçlere Geogebra yazılımının katkıları ortaya konulmak istenmiştir. Araştırma sonuçları göstermiştir ki, öğretmen adayları durumu geniş bir açıdan ele almaktadır. İki ve üç boyuta ilişkin, koniklerden, eğrilere, katı cisimlerden düzleme kadar oldukça çeşitlilik içeren cevapların olduğu tespit edilmiştir. Fakat öğretmen adaylarının sadece % 36sı hem iki boyutu hem de üç boyutu düşünerek farklı seçenekli cevaplar oluşturmuştur. Benzer şekilde, bunlardan sadece % 24’ü üç ve üstü farklı yanıt üretebilmiştir. Bu öğretmen adaylarının özellikle boyut kavramına ilişkin çok yönlü düşünebildikleri söylenebilir. Diğer taraftan çalışma grubunun yaklaşık yarısının ilgili soruya farklı seçenekler üretemeyerek tek bir cevap verdiği belirlenmiştir. Bu da öğretmen adaylarının geometride çok yönlü düşünme noktasında sıkıntı yaşadıklarını göstermektedir. Bu sonuçlar, öğretmen adaylarının matematiksel kavramları daha geniş bir perspektiften ele alabilmeleri için GeoGebra’nın öğretim süreçlerine eklenmesi gerektiğini ortaya koymaktadır. Çünkü yazılımın hem bir öğretim hem de bir öğrenme aracı olarak işlev görebilme özellikleri mevcuttur. Bir taraftan, öğrencilerin kendi kendilerine sıfırdan yapılar kurabilmesine fırsat verirken diğer taraftan da problem odaklı bir öğretimle matematiksel keşifleri teşvik etme imkânı sunmaktadır. Böylece öğrencilerin matematiksel modeller/ yapılar kurma, matematiksel ilişkileri dinamik olarak inceleme ve matematiksel problemleri çözme imkânına erişecekleri görülmektedir (Hohenwarter, Preiner ve Yi, 2007).

İki boyut düşünülerek verilen cevaplar içerisinde en fazla koniklerin olduğu görülmüştür. Burada Geogebra’nın özellikle dinamik yapısı öğretmen adaylarına hem düşünme süreçlerinde yardımcı olmuş hem de ispatlarını kolayca göstermelerini sağlamıştır. Üç boyut kapsamında verilen cevaplarda da benzer şekilde, Geogebra 3D özelliğinin sağladığı görsel imkânlarla öğretmen adaylarına iddialarını kanıtlama noktasında yardımcı olduğu görülmektedir. Bu sonuçlar Jones’un (2000, s. 55), *“Öğrencilerin bu tür yazılımlarla deneyim yoluyla tümdengelimli akıl yürütmeden kazandıkları anlamların, yalnızca üstesinden geldikleri görevlerle, öğretmenleriyle ve diğer öğrencilerle olan etkileşimleriyle değil, aynı zamanda yazılım ortamının özellikleriyle de şekillenmesi muhtemeldir.”* ifadelerini teyit eder niteliktedir. Bu sebeple, Geogebra’nın sahip olduğu nitelikler sayesinde zaman zaman bir ispat aracı işlevi gördüğü söylenebilir. Öte yandan ulaşılan bu sonuçlar, Baltacı ve Yıldız (2015) ile Baltacı, Yıldız ve Kösa (2015) bulgularıyla da benzerlik göstermektedir. Öyle ki, bu çalışmalarda Geogebra’nın matematiksel düşünmeyi kolaylaştırdığı, kişiyi matematiksel bir keşif sürecine yönelttiği, matematiksel yapıları hem cebirsel hem de analitik olarak yorumlama imkânı verdiği ve Geogebra ile matematiksel genelleme yapabilmenin mümkün olduğu vurgulanmaktadır. Bu bakımdan Geogebra’nın bir görselleştirme aracının ötesinde kişilerin bilgilerini yapılandırmalarına fırsat veren yapısının ön plana çıkarılması gerekmektedir. Bunun için Hangül ve Çeziktürk’ün (2020) belirttiği gibi cevapları kolay ve hızlı bir şekilde bulunamayacak tarzda açık uçlu soruların Geogebra ile çözümünü ya da geometrik teoremlerin/ aksiyomların vb. Geogebra ile ispatını içeren öğrenme ortamlarının oluşturulması önem arz etmektedir.

Bu çalışma kapsamında her ne kadar Van Hiele geometrik düşünme düzeylerini (bkz. Van Hiele, 1986) içeren bir uygulama yapılmamış olsa da sadece bir öğretmen adayının küresel yüzeylerden bahsetmesi diğer öğretmen adaylarının Öklid dışı geometriye ilişkin bilgi ve farkındalıklarının zayıf olabileceğini göstermektedir. Öklid dışı geometrileri anlayabilmenin Van Hiele modelindeki en üst basamak olan sistemik düşünce düzeyinde gerçekleştiği bilinmektedir. Bu çalışmada görülenin aksine lisans ve lisansüstü öğrencilerinin Van Hiele geometrik düşünme düzeylerinden sistematik düşünce de olması beklenmektedir (Koparan, 2019). Bu bakımdan lisans seviyesinde, Öklid-dışı geometri kapsamında sorgulama ve ispat temelli bir geometri dersinin, öğrencilerin geometrik kavramları anlamlandırmalarına ve ispat becerilerini geliştirmelerine destek olabileceği düşünülmektedir (Koparan, 2019). Fakat araştırmaların çoğu bu düzeye erişimin birçok öğrenci için çok mümkün olmadığını ortaya koymaktadır.

Öğretmen adaylarından Geogebra'yı cevaplarını, iddialarını temellendirmek için bir çeşit ispat aracı olarak kullananların yanı sıra bazılarının da iddialarını cebirsel olarak kurdukları yapılar veya denklemler üzerinden ispatlamaya çalıştıkları görülmüştür. Bu öğretmen adayları vektörler, doğru ve düzlem denklemleri üzerinde yaptıkları birtakım işlemlerle, günlük hayattan somut örnekler vererek ya da Geogebra'yı olabilecek en basit düzeyde kullanarak iddialarını ispatlamaya çalışmışlardır. Ne var ki bu söylenilenlerden, her öğretmen adayının matematiksel düşünme süreçlerine her zaman teknolojiyi entegre etmesi gerektiği sonucu çıkarılmamalıdır. Teknolojinin tek başına matematiksel bir kazanımı etkileyemeyeceği aşikârdır. Bunun nasıl kullanıldığı, kazanımı potansiyel olarak nasıl etkileyebileceğini anlamak için kritik öneme sahiptir (Spencer-Smith ve Hardman, 2014). Fakat genelde teknolojinin özelde Geogebra yazılımının matematiksel düşünme sürecine katkısını ortaya koyan çalışmalardan (Jones, 2001; Baltacı, Yıldız ve Kösa, 2015; Atasoy ve Konyalıhatipoğlu, 2019) hareketle, öğretmen adaylarının dinamik matematik yazılımlarını ihtiyaç duyduklarında kullanabilecek yetkinliğe sahip olmaları gerektiği anlaşılmaktadır. Özellikle Geogebra cebir ve 2D-3D grafik pencerelerini bir arada sunarak farklı temsiller arasında bağlantı kurulabilmesine imkân tanımakta, bunun da cebir ve geometrinin birleşimi olarak ifade edilen analitik geometri derslerinde kullanılmasının avantaj oluşturacağı düşünülmektedir.

Çalışmanın sonuçları göstermiştir ki, okul matematiği olarak geçen ilköğretim ve ortaöğretim kademesindeki ve lisans düzeyindeki geometri derslerinde teoremlerin, önermelerin ispatları, iddiaların kanıtlanması, bunların farklı biçimlerde gösterimleri vb. gibi hususların üzerinde durulması gerekmektedir. Baki'nin (2019, s. 639), *"Farklı ispatlar; farklı akıl yürütmeleri ve ilişkilendirmeleri destekler. Önermelerin ispatlarının veya problemlerin çözümlerinin bu şekilde farklı gösterimlerle öğrenciye sunulması, başlangıçta birbirinden farklı ve bağımsız olarak düşünülen matematiksel kavramların bir problem çözümü sırasında nasıl iç içe olabildiklerini öğrenciye göstermek bakımından önemlidir. Çünkü öğrenci artık matematiği birbirinden bağımsız ilişkiler ve kurallar koleksiyonu yerine onu birbirine bağlı ilişkiler ve kavramlar ağı olarak görmeye başlayacaktır."* ifadelerinden de anlaşıldığı üzere her seviyeden öğrencinin bu kazanımları elde edebilmesi matematikte ve özellikle geometride çok yönlü düşünebilmeleri açısından kritik bir öneme sahiptir.

Tüm bu söylenilenler ışığında, eğitim fakültelerinin matematik öğretmenliği programlarında teknolojinin öğretim sürecine entegrasyonu bağlamında verilen Öğretim teknolojileri, Matematik öğretiminde bilgi ve iletişim teknolojileri, Bilgisayar destekli matematik öğretimi gibi derslerin içeriklerinin gerek öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini geliştirme gerekse onların matematiksel kavramlara ilişkin kavramsal öğrenmelerini destekleyecek biçimde hazırlanmasının gerekliliği anlaşılmaktadır. Ayrıca bu derslerin içeriklerinin Analitik geometri, Analiz, Geometri, Lineer cebir vb. gibi matematik alan dersleriyle uyumlu olması ve devamlı güncellenmesi gerekmektedir. Son olarak, Analitik geometri derslerinde Geogebra yazılımına ek olarak daha farklı dinamik geometri yazılımlarının kullanıldığı, farklı bağlamlarda (örneğin, Öklid dışı geometriler, çevrim içi veya yüzyüze ortamlar vb.), farklı araştırma yöntemleriyle çalışmaların yapılması önerilmektedir.

5. KAYNAKÇA

Aktümen, M., Yıldız, A., Horzum, T., & Ceylan, T. (2011). İlköğretim matematik öğretmenlerinin Geogebra yazılımının derslerde uygulanabilirliği hakkındaki görüşleri. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 2*(2), 103-120.

Arini, F. Y., & Dewi, N. R. (2019). GeoGebra as a tool to enhance student ability in calculus. Paper presented in *UNNES International Conference on Research Innovation and Commercialization 2018,* KnE Social Sciences, 205–212. doi: 10.18502/kss.v3i18.4714.

Aslaner, R. (2015). *Analitik geometri*. Ankara: Nobel Yayınevi

Atasoy, E., & Konyalıhatipoğlu, M. E. (2019). Investigation of students' holistic and analytical thinking styles in learning environments assisted with dynamic geometry software, *Education and Science*, *44*(199), 49-74. doi: 10.15390/EB.2019.8003.

Baki, A. (2019). *Matematiği öğretme bilgisi*. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Baltaci, S., & Yıldız, A. (2015). Matematik öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımı yardımıyla analitik geometrideki bir konuyu öğrenme süreçleri. *Ahi Evran University Journal of Kırsehir Education Faculty (KEFAD), 16*(3), 295-312.

Baltacı, S. Yıldız, A., & Kösa, T. (2015). Analitik geometri öğretiminde geogebra yazılımının potansiyeli: Öğretmen adaylarının görüşleri; *Turkish journal of computer and mathematics education (TURCOMAT), 6*(3), 483-505. doi: 10.16949/turcomat.32803

Baydaş, Ö., Göktaş, Y., & Tatar, E. (2013). Farklı bakış açılarıyla matematik öğretiminde geogebra kullanımı. *Çukurova University Faculty of Education Journal*, *42*(2), 36-50.

Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde matematik öğretimi 6-8. sınıflar*. Ankara: Pegem Akademi.

Bayraktar, B., Broutin, M. S. T., & Güneş, H. (2018). Cabri 3D kullanımının öğretmen adaylarının analitik geometri başarılarına etkisinin incelenmesi. *Academy Journal of Educational Sciences, 2*(2), 172-192.

Dikovic, L. (2009). Applications geogebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems, 6*(2), 191–203. doi: 10.2298/CSIS0902191D.

Edwards, J. A., & Jones, K. (2006). Linking geometry and algebra with GeoGebra. *Mathematics Teaching, 194*, 28-30.

Forsythe, S. (2007). Learning geometry through dynamic geometry software. *Mathematics teaching incorporating micromath*, 202, 31-35.

Güneş, H. (2016). *Analitik geometri öğretiminde Cabri 3D kullanımının öğretmen adaylarının akademik başarılarına etkisi ve görüşlerinin değerlendirilmesi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Uludağ Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Hangül, T., & Cezikturk, O. (2020). A practice for using Geogebra of pre-service mathematics teachers' mathematical thinking process. *New Trends and Issues Proceedings on Humanities and Social Sciences*, *7*(1), 102-116.

Hohenwarter, M., Preiner, J., & Yi, T. (2007). Incorporating GeoGebra into teaching mathematics at the college level. Paper presented at *Proceedings of the International Conference for Technology in Collegiate Mathematics.* Boston, USA: ICTCM

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2009). Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: The case of GeoGebra. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, *28*(2), 135-146.

Ismail, Z., & Rahman, S. N. A. (2017). Learning 2-dimensional and 3-dimensional geometry with Geogebra: Which would students do better?. *International Journal on Emerging Mathematics Education, 1*(2), 121-134.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1), 55-85.

Jones, K. (2001), Learning geometrical concepts using dynamic geometry software. In: Kay Irwin (Ed), *Mathematics Education Research: A catalyst for change* (pp. 50-58) Auckland: University of Auckland.

Karakaş, B., & Baydaş, Ş. (2008). *Analitik geometri*. Ankara: Palme Yayınevi.

Karakaş, H. İ. (1983). *A first course in analytic geometry*. Ankara: ODTU Yayınları.

Khalil, M., Farooq, R., Çakıroğlu, E., Khalil, U., & Khan, D. (2018). The development of mathematical achievement in analytic geometry of grade-12 students through GeoGebra activities. *Eurasia Journal of Mathematıcs Science and Technology Education, 14*(4). doi: 10.29333/ejmste/83681

Kösa, T. (2016). Effects of using dynamic mathematics software on preservice mathematics teachers' spatial visualization skills: the case of spatial analytic geometry. *Educational Research and Reviews, 11*(7), 449-458.

Koparan T. (2019). Üniversite öğrencilerinin öklid-dışı geometrilere yönelik algılarının ve tasarlanan öğrenme ortamlarından yansımaların incelenmesi. *Yükseköğretim ve Bilim Dergisi/Journal of Higher Education and Science, 9*(1), 180-191. doi: 10.5961/jhes.2019.320

Kutluca, T., & Zengin, Y. (2011). Matematik öğretiminde GeoGebra kullanımı hakkında öğrenci görüşlerinin değerlendirilmesi. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi, 17*(2011), 160-172.

Madrazo, A. L., & Dio, R. V. (2020). Contextualized learning modules in bridging students' learning gaps in calculus with analytic geometry through ındependent learning. *Journal on Mathematics Education*, 11(3), 457-476. doi: 10.22342/jme.11.3.12456.457-476.

Miles, M, B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook*. (2nd ed). Thousand Oaks, CA: Sage.

Pari Condori, A. et al. (2020). *GeoGebra as a technological tool in the process of teaching and learning geometry, Cham*. Springer International Publishing. p. 258-271.

Pazarbaşı, B. N., & Es, H. (2015). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının analitik geometri alan dilini kullanma becerileri ve tutumlarının incelenmesi. *Uluslararası Eğitim Bilimleri Dergisi*, *2*(5), 529-535.

Sekulić T., & Takači, D. (2013). Mathematical modelling computers and GeoGebra in university and college mathematics education, *36th International Convention on Information and Communication Technology Electronics and Microelectronics (MIPRO)*, p. 625-630.

Spencer-Smith, G., & Hardman, J. (2014). The impact of computer and mathematics software usage on performance of school leavers in the Western Cape Province of South Africa: a comparative analysis. *International Journal of Education and Development using ICT, 10*(1),. Open Campus, The University of the West Indies, West Indies. Retrieved January 13, 2022 from https://www.learntechlib.org/p/147448/.

Straesser, R. (2002). Cabri-géomètre: Does dynamic geometry software (DGS) change geometry and its teaching and learning?. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 6, 319–333. doi: 10.1023/A:1013361712895

Sugandi, A. I., & Bernard, M. (2020). Application of geogebra software to improve problem-solving skills in analytic geometry in prospective teachers students. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1657, No. 1, p. 012077). IOP Publishing.

Şengün, K. Ç., & Kabaca, T. (2016). Dinamik geometri ortamında üçgen inşa sürecinde akıl yürütme çabaları. In Ö. Demirel & S. Dinçer (Eds.), *Eğitim bilimlerinde yenilikler ve nitelik arayışı* (ss. 1100-1107). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Tamam, B., & Dasari, D. (2021). The use of geogebra software in teaching mathematics. *Journal of Physics: Conference Series. 1882*(1), 012042.

Tatar, E., Kağızmanlı, T. B., & Akkaya, A. (2014). Dinamik bir yazılımın çemberin analitik incelenmesinde başarıya etkisi ve matematik öğretmeni adaylarının görüşleri. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *8*(1), 153-177.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight*. New York: Academic Press

Wijaya, T.T., Ying, Z., & Suan, L. (2020). Using geogebra in teaching plane vector. *JIML*, *3*(1), 15-23.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri (8. tıpkı basım).* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yüksek Öğretim Kurumu, (2018). Matematik öğretmenliği lisans programı. 12.01.2022 tarihinde https://www.yok.gov.tr/Documents/Kurumsal/egitim_ogretim_dairesi/Yeni-Ogretmen-Yetistirme-Lisans-Programlari/Matematik_Ogretmenligi_Lisans_Programi.pdf adresinden indirilmiştir.

Yudianto, E., Sugiarti, T., & Trapsilasiwi, D. (2018). The identification of van Hiele level students on the topic of space analytic geometry. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 983, No. 1, p. 012078). IOP Publishing.

6. EXTENDED ABSTRACT

During the Pandemic, some courses were required to be given online due to their over crowdedness. However, in some terms, all courses were online. Analytic Geometry II course has been given to secondary preservice mathematics teachers as 2 hours a week after the 2018 curriculum. Online courses are a different type of topic to discuss but here since we obtained the data online, we need to talk about online education. There are pitfalls and beneficiaries of an online course as one can expect. They are helpful especially for reaching online sources, for using related computer applications and education that is much more individual is an option. However, no group work can be done easily. Students and teachers may feel isolated and not social enough. Teacher is not that close to ask many questions. In addition, if there are technical problems due to wifi, computer ineficiency etc, it is hard to keep pace of the course work as needed. In that term, we had the similar problems besides the real health problem due to pandemic. Hence, it is a good idea to think of the pandemic data as a separate data than other terms.

Analytic Geometry II course has the mathematical topics as conics, equations, surfaces, cylinder, sphere, cones, torus, and common sections between different and special surfaces. As can be seen all are in 3 dimension. After a good initiation with the 2 dimension in the Analytic I course, geometric concepts are related with each other in this second term. Analytic Geometry course is a course after fundamentals of mathematics but before all other pure mathematics courses.

In the spring term of 2020-2021, data was collected from Analytic II course final exam through the university interface Perculus. University interface is user-friendly, understandable and these students were using earlier versions of the program since many years. They were given two weeks' time and they were required to answer a question by using Geogebra software. The question was; "There are infinite number of lines going through a point. Infinite number of curves can be drawn joining any two points. So, infinite number of … can be drawn joining any three points." They were supposed to fill the gap but they were also supposed to support their answer by reasoning and some proper visuals. Some part of the above question could be thought as a Euclidean space and in that manner, students were hoped to unite what they know from Analytic Geometry courses I and II. Hence, it is a very difficult question without understanding point, line and plane concepts as much as space concept.

We designed this study according to the phenomenology pattern, which is one of the qualitative research methods. We aimed to interpret the current situation of pre-service mathematics teachers regarding the synthesis of basic mathematical concepts, about which we do not have a very deep understanding. Analytic Geometry instruction in teacher education. The study group of the research consists of 33 pre-service teachers enrolled in the Analytical geometry II course carried out in the mathematics teaching program of a university in the 2020-2021 academic year. The data collected were the Geogebra documents and writing papers produced by pre-service teachers. Data was analyzed by content analysis.

Results showed that pre-service teachers could give answers ranging from two-dimensional space (2D) to three-dimensional space (3D). Some pre-service teachers answered without giving any visuals just by qualitatively. Some students answered as 3D objects as cube, prisms, pyramids, and even spheres. Some were trapped in the 2D since they were introducing curve families as ellipse, or some did the same with circles. Moreover, especially concentric circles. However, unfortunately, they did not realize that the question was asking the 3 points to be on the mathematical objects and mathematical concepts not inside. Some answered as polygon families. In 3D most of them could say that the answers should be planes which are intersecting on a line. There were very little who could say that the answer should be surface. Most students used Geogebra as a visualizer. Their visuals were not unrelated. However, there were some students who neglected any visuals, and these students may have some problems with Analytic Geometry understanding or with Geogebra. However, some students passed and reasoned well using Geogebra visuals but still did have some problems of thinking abstractly without visuals.

In short, students could use Geogebra mostly to indicate their thinking with Analytic Geometry concepts; points, lines and planes. Nevertheless, they were having problems with coordinating parts to big whole. There were students who were having some problems with Geogebra as well. Even though, most example graphs are shared via Geogebra application inside the online classroom each week, and even though they were having a course named Educational Technology where they were learning how to use Geogebra in mathematics education. We propose using Geogebra software for not only visualization but also with problems like this where students needed to carry some reasoning with Analytic Geometry concepts especially points, lines, and planes as Euclidean Geometry suggests. Because, they try but there seems to be still a way to go achieve some saturation in this. High level questions as especially formative evaluation questions is a must to incorporate in to the pure mathematics classrooms to make students understand what they are not familiar with.