

## Fonksiyonel Değişimli Ortotropik Plakların Dinamik Tepkisine Kayma Deformasyonu ve Dönel Eylemsizlik Etkilerinin İncelenmesi

Abdullah AVEY\*<sup>1</sup>, Murat PINARLIK<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Süleyman Demirel Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 32260, Isparta

<sup>2</sup>Gazi Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 06500, Ankara

(Alınış / Received: 17.01.2016, Kabul / Accepted: 08.04.2016, Online Yayınlanma / Published Online: 16.05.2016)

### Anahtar Kelimeler

FD ortotropik plak  
Serbest titreşim  
Kayma deformasyonları  
Dönel eylemsizlikler  
Frekans parametresi

**Özet:** Sunulan çalışmada, kayma deformasyonları ve dönel eylemsizliklerin kombine etkileri dikkate alınarak fonksiyonel değişimli (FD) ortotropik malzemelerden oluşan plakların serbest titreşim problemi incelenmektedir. Ortotropik plağın malzeme özellikleri kalınlık koordinatına bağlı olarak üstel olarak değiştiği varsayılmaktadır. FD ortotropik plakların serbest titreşim denklemleri birinci mertebeden kayma deformasyon plak (KDPT) teorisi temel alınarak türetilmektedir. Elde edilen diferansiyel denklemler, Galerkin Yöntemi uygulanarak basit mesnetli sınır koşulları için altıncı derece cebirsel denkleme dönüştürülmekte ve sayısal olarak çözümlenerek frekansın minimum değeri bulunmaktadır. Bu denklemden, kayma deformasyonlarının etkisinin dikkate alındığı ve alınmadığı durumlar için FD ortotropik plağın frekansları KDPT ve klasik plak teorisi (KPT) çerçevesinde bulunmaktadır. Son olarak, FD ortotropik malzeme özellikleri ve plak boyutları değişiminin, kayma deformasyonları ve dönel eylemsizliklerin boyutsuz frekans parametresine etkileri sayısal olarak incelenmektedir. Yapılan analizler, kayma gerilme fonksiyonlarının dikdörtgen plakların boyutsuz frekans parametre değerlerine etkilerinin değişmesine rağmen bu etkilerinin değişik plak boyutları için çok önemli olduğunu ortaya koymuştur. Homojen olmama ve ortotropi etkilerinin çok belirgin olduğu ve göz ardı edilemeyeceğini ve dönel eylemsizliğin hesaplarda dikkate alınmasının daha gerçekçi sonuçlara ulaşılmasına olanak sağlayacağı sonucuna varılmıştır. Sunulan çalışmada elde edilen sonuçların geçerliliği için literatürde sunulan çözümlerle karşılaştırmalar yapılmaktadır.

## Investigation of the Influences of Shear Deformation and Rotary Inertia on the Dynamic Response of Functionally Graded Orthotropic Plates

### Keywords

FG orthotropic plate  
Free vibration  
Shear deformations  
Rotary inertia  
Frequency parameter

**Abstract:** In this study, the free vibration problem of plates composed of functional graded (FG) orthotropic materials, considering combined effects of shear deformations and rotary inertia is investigated. It is assumed that the materials properties of the orthotropic plate changes exponentially in the thickness direction. The basic equations for FG orthotropic plate are derived based on first order shear deformation plate theory (SDPT). By using Galerkin method, the resulting equations are reduced to a sixth order algebraic equation and solved numerically and found the values of the fundamental frequency. Then, ignoring the effects of forces of rotary inertia, the values of frequencies of FG orthotropic plate based on the SDPT and classical plate theory (CPT) are obtained. Finally, the influences of FG orthotropic material properties, variations of plate geometry parameters, shear deformations and rotary inertia on the non-dimensional frequency parameter are investigated numerically. According to the analysis, despite the change the effects of shear stresses functions on the values of dimensionless frequency parameters of rectangular plates, these effects are very significant for different sizes of plates. It is observed that the effect of

heterogeneity and orthotropy are very significant and can not be ignored and taking into account the effects of the rotary inertia provides more realistic results for the various sizes of plates. For the reliability of the results obtained in this thesis are compared with the solutions presented in the literature.

## 1. Giriş

Son yıllarda, fonksiyonel değişimli (FD) kompozit plakalar havacılık, denizcilik, inşaat vs. alanlarında yaygın şekilde kullanıldığından dolayı bu tür yapı elemanlarının titreşim davranışlarının incelenmesi önemli bir görev haline gelmiştir. Bazı durumlarda, kompozit plakaların titreşim ve stabilite problemlerinin çözümünde klasik plak teorisi (KPT) kullanılarak elde edilen sonuçlar gerçeği tümüyle yansıtamamaktadır. Geleneksel ve yeni nesil kompozitlerden oluşan plakaların titreşim problemlerinde kayma deformasyonlarının etkisi önemli bir rol oynar. Kayma deformasyonları etkisinin hesaba katılmaması, homojen kompozit plakaların frekans değerleri için %30 veya daha fazla hataya yol açabilir. Bu nedenle, kayma deformasyonlu plak teorisinin (KDPT) KPT'ye kıyasla daha gerçekçi olduğu kabul edilmektedir. KDPT'lerin oluşumu ve plak problemlerine uygulamaları yarım asır önceye dayanmakta ve günümüze kadar devam etmektedir [1-5]. KDPT'ler temel alınarak homojen ortotropik plakların titreşim problemlerinin çözümleri ile ilgili önemli yayınlar yapılmıştır [6-11]. Söz konusu çalışmalar, kayma deformasyonları veya dönel eylemsizlik etkilerinin kompozit plakların titreşim davranışlarında önemli bir rol oynadığını ortaya koymuştur.

Homojen olmayan veya FD elastik plaklar uzay araçlarının, modern füzelerin ve havacılık kanatlarının tasarımında uygulanmaktadır. Malzemeler ve yapısal bileşenler, tasarımla veya malzemelerdeki fiziksel kompozisyon ve kusurlar nedeniyle genellikle homojen değildir. Malzemenin homojen olmaması, kayma deformasyonu ve dönel eylemsizlik etkilerinin bir arada dikkate alınması kompozit plakların dinamik denklemlerini karmaşık hale getirir. Ayrıca, anizotrop özelliklere sahip kayma deformasyonlu FD plakların titreşim problemleri için kapalı çözümlerin elde edilmesi zordur. Dönel eylemsizliğin etkisinin dikkate alınması bu zorluğu biraz daha artırmaktadır. Fonksiyonel değişimli malzemeler (FDM'ler), homojen olmayan malzemeler sınıfının bir alt grubu olup malzeme özellikleri kalınlık koordinatına bağlı olarak değişmektedir. Üstün özellikleri sayesinde, mühendisliğin değişik alanlarında potansiyel uygulamalara sahip olmaları nedeniyle, FDM yapıların titreşim davranışlarının incelenmesi bilim insanları ve mühendislerin her geçen gün daha fazla dikkatini çekmektedir. Günümüz teknolojisinde, FDM plakların kullanımının önemli derecede artışı, FD yapıların titreşim davranışlarının incelenmesine ilgiyi daha da

artırmıştır. KDPT'ler kullanılarak FD izotrop plakların serbest titreşim hesabına yönelik çalışma sayısı çok olup günümüzde de devam etmektedir [12,13]. Homojen olmayan ortotropik plaklarla ilgili ilk çalışmalardan biri Pan [14] çalışmasıdır. Bu çalışmada, ortotropik malzemelerin homojen olmama fonksiyonunun üstel şeklini belirleyerek FD anizotrop kompozit tabakaların kesin çözümünü sunmuştur. Bu çalışmayı takiben FD ortotropik plak ve kabukların, mekanik-termal davranışları, titreşim ve stabilitesi ile ilgili birçok yayın ortaya çıkmıştır [15-17].

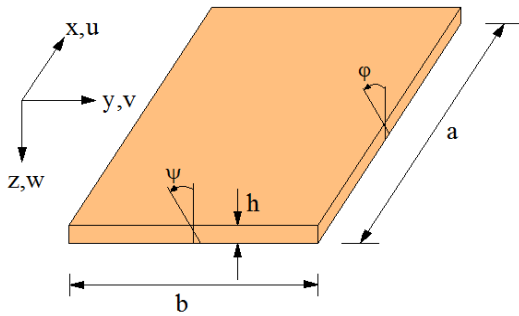
Yapılan literatür taraması kayma deformasyonları ve dönel eylemsizliğin kombine etkileri dikkate alınarak, FD ortotropik malzemelerden oluşan plakların titreşim probleminin henüz yeteri kadar çalışılmadığını ortaya koymaktadır. Sunulan çalışmada söz konusu problemin çözümü detaylı bir şekilde ele alınmaktadır [18].

## 2. Materyal ve Metot

Sunulan çalışmada, ortotrop plağın Young modülleri, kayma modülleri ve yoğunluğu kalınlık koordinatına bağlı olarak üstel olarak değiştiği varsayılmaktadır. Kayma deformasyonları ve dönel eylemsizlik kuvvetlerinin kombine etkileri bir arada dikkate alınarak, FD ortotrop plaklar için temel bağıntılar oluşturulmaktadır. FD ortotrop plakların serbest titreşim denklemleri birinci mertebeden kayma deformasyon plak teorisi (BMKDPT) temel alınarak türetilmektedir. Elde edilen diferansiyel denklemler, Galerkin Yöntemi uygulanarak, basit mesnetli sınır koşulları için altıncı mertebeye cebirsel denkleme dönüştürülmekte ve sayısal olarak çözülmektedir. Cebirsel denklemin altı tane çözümünün içinden en küçük pozitif olan frekansın minimum değerine karşı gelmektedir. Sayısal hesaplarda, MAPLE 14, EXCEL ve AutoCAD bilgisayar programları kullanılacaktır.

### 2.1. Temel Bağntı ve Denklemler

Şekil 1'de uzunluğu  $a$ , eni  $b$  ve kalınlığı  $h$  olan FD ortotropik malzemelerden oluşan bir dikdörtgen plak sunulmuştur. Koordinat sistemi plağın sol köşesinde ve referans yüzeyinde bulunmaktadır. Ayrıca,  $x$  ve  $y$  eksenleri ortotropi doğrultuları ile çakışmakta ve  $z$  eksenine ise onların bulunduğu düzleme normal doğrultudadır.



Şekil 1. FD ortotropik dikdörtgen plak ve koordinat sistemi

Placı oluşturan ortotropik malzemenin Young ve kayma modülleri ve yoğunluğu kalınlık koordinatının üstel fonksiyonları olup aşağıdaki şekilde ifade edilir [14,18]:

$$\begin{aligned} E_1(Z) &= E_{01}e^{\mu_1(Z+0.5)}, & E_2(Z) &= E_{02}e^{\mu_1(Z+0.5)}, \\ G_{12}(Z) &= G_{012}e^{\mu_1(Z+0.5)}, & G_{13}(Z) &= G_{013}e^{\mu_1(Z+0.5)}, \\ G_{23}(Z) &= G_{023}e^{\mu_1(Z+0.5)}, & \rho(Z) &= \rho_0e^{\mu_2(Z+0.5)}, & Z &= z/h \end{aligned} \quad (1)$$

Burada  $E_{01}$  ve  $E_{02}$  homojen ortotropik malzemenin sırasıyla x ve y ana doğrultularda Young modülleri,  $G_{012}, G_{013}, G_{023}$  kayma modülleri ve  $\rho_0$  homojen ortotropik malzemenin yoğunluğudur.  $\mu_1$  ve  $\mu_2$  üstel katsayıları olup z doğrultusunda sırasıyla Young ve kayma modülleri ve yoğunluğun değişim derecesini karakterize etmektedir ve  $-1 \leq (\mu_1, \mu_2) \leq 1$  koşulu sağlanmaktadır. Burada  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  homojen duruma,  $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$  Young ve kayma modüllerinin değiştiği ve yoğunluğun sabit olduğu duruma karşı gelmektedir. Kayma gerilmeleri içeren FD ortotropik plaklar için gerilme ve deformasyon bileşenleri arasındaki bağıntılar şu şekildedir [14,15,18]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}(Z) & B_{12}(Z) & 0 \\ B_{21}(Z) & B_{22}(Z) & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}(Z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{55}(Z) & 0 \\ 0 & B_{44}(Z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Burada,  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$  deformasyon bileşenleri olup şu tanımlar geçerlidir:

$$B_{11}(Z) = \frac{E_1(Z)}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; B_{22}(Z) = \frac{E_2(Z)}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad (3)$$

$$B_{12}(Z) = \frac{\nu_{21}E_1(Z)}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2(Z)}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = B_{21}(Z);$$

$$B_{66}(Z) = G_{12}(Z), \quad B_{44}(Z) = G_{23}(Z); \quad B_{55}(Z) = G_{13}(Z)$$

Burada  $\nu_{12}$  ve  $\nu_{21}$  Poisson oranları olup sabittirler. Ortotropik plaklar için enine kayma gerilmeleri kalınlık doğrultusunda değişmektedir.

Küçük yer değiştirmelerde, kayma deformasyon teorisi temel alınarak plâğın referans yüzeyinden z uzaklıktaki deformasyonlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir [18]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} + I_{01} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} + I_{02} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Burada,  $e_x, e_y, e_{xy}$  ortotropik plâğın referans yüzeyindeki deformasyonlar,  $w$  normal doğrultudaki çökme,  $\varphi(x, y)$  ve  $\psi(x, y)$  ise dönme açıları olup aşağıdaki tanımlar geçerlidir:

$$I_{01} = \int_0^z \frac{df(z)}{dz} \frac{1}{G_{13}(Z)} dz, \quad I_{02} = \int_0^z \frac{df(z)}{dz} \frac{1}{G_{23}(Z)} dz \quad (5)$$

Burada  $f(z)$ ,  $\sigma_{xz}$  ve  $\sigma_{yz}$  kayma gerilmelerini karakterize eden fonksiyonu olup plâğın kalınlık koordinatının fonksiyon olarak değişik şekillere sahiptir.

Plâğın kuvvet ve moment bileşenleri aşağıdaki integrallerden bulunur [3,8]:

$$[T_x, T_y, T_{xy}, Q_x, Q_y] = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}] dz \quad (6)$$

$$[M_x, M_y, M_{xy}] = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}] z dz \quad (7)$$

Burada,  $T_x, T_y, T_{xy}$  kuvvet bileşenleri,  $Q_x, Q_y$  kesme kuvvetleri,  $M_x, M_y, M_{xy}$  ise moment bileşenleridir.

Plakların hareket ve deformasyon uygunluk denklemleri aşağıdaki kısmi türevli diferansiyel denklemlerle ifade edilmektedir [3,5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_x &= -\rho_1 h^3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \rho_2 h^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= -\rho_1 h^3 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} + \rho_3 h^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= \rho_1 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Burada  $\rho_2 h^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$  ve  $\rho_3 h^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$  dönel eylemsizlikler olup şu tanımlar geçerlidir:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \int_{-1/2}^{1/2} Z^2 \rho(Z) dZ, \quad \rho_2 = \int_{-1/2}^{1/2} Z \rho(Z) I_{01} dZ, \\ \rho_3 &= \int_{-1/2}^{1/2} Z \rho(Z) I_{02} dZ, \quad \rho_t = \int_{-1/2}^{1/2} \rho(Z) dZ \end{aligned} \quad (9)$$

Kuvvet bileşenleri ve gerilme fonksiyonu arasındaki bağıntılar şu şekildedir:

$$[T_x, T_{xy}, T_y] = h \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] \quad (10)$$

(5) bağıntıları, (7) integrallerinde yerine yazıldığında, kuvvet ve moment bileşenleri için elde edilen ifadeler (10) ifadesi ile birlikte (8) denklemlerinde yerine yazıldığında, kısmi türevli denklemler sisteminin matris formu aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ w \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix} = 0 \quad (11)$$

Burada  $L_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$  diferansiyel operatörler olup katsayılar malzeme ve plak özelliklerine bağlıdır.

## 2.2. Temel Denklemlerin Çözümü

FD ortotropik plağın tüm kenarları basit mesnetli olduğu için (19) kısmi diferansiyel denklemler sisteminin çözümü aşağıdaki gibi aranır [2,5]:

$$\begin{aligned} \Phi &= C_\phi \sin(\beta_1 x) \sin(\beta_2 y) \cos(\omega t), \\ w &= C_f \sin(\beta_1 x) \sin(\beta_2 y) \cos(\omega t), \\ \varphi &= C_\varphi \cos(\beta_1 x) \sin(\beta_2 y) \cos(\omega t), \\ \psi &= C_\psi \sin(\beta_1 x) \cos(\beta_2 y) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (12)$$

Burada  $\beta_1 = m\pi/a$ ,  $\beta_2 = n\pi/b$  olup,  $m$ , boyuna doğrultudaki yarım dalga sayısı,  $n$  enine doğrultudaki dalga sayısı,  $\omega$  titreşim frekansı (birimi rad/sn) ve  $C_\phi, C_f, C_\varphi, C_\psi$  bilinmeyen katsayılardır. (12) ifadeleri (11) denklemlerinde yerine yazılıp Galerkin yöntemi uygulandığında aşağıdaki matris denklem elde edilir:

$$\begin{bmatrix} U_{11} & -U_{12} + U_{120}\omega^2 & U_{13} - U_{130}\omega^2 & U_{14} \\ U_{21} & -U_{22} + U_{220}\omega^2 & U_{23} & U_{24} - U_{240}\omega^2 \\ U_{31} & -U_{32} & U_{33} & U_{34} \\ U_{41} & -U_{42}\omega^2 & U_{43} & U_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\phi \\ C_f \\ C_\varphi \\ C_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Burada şu tanımlar geçerlidir:

$$\begin{aligned} U_{11} &= [c_{11} - c_{31})\beta_1^2 \beta_2^2 + c_{12}\beta_1^4] h, \\ U_{12} &= (c_{14} + c_{32})\beta_1^2 \beta_2^2 + c_{13}\beta_1^4, \quad U_{120} = \rho_1 h^3 \beta_1^2, \\ U_{13} &= c_{15}\beta_1^3 + c_{35}\beta_1 \beta_2^2 + I_5 \beta_1, \quad U_{130} = \rho_2 h^3 \beta_1, \\ U_{14} &= (c_{18} + c_{38})\beta_2 \beta_1^2, \quad U_{21} = [c_{21}\beta_2^4 + (c_{22} - c_{31})\beta_1^2 \beta_2^2] h, \\ U_{22} &= (c_{32} + c_{23})\beta_1^2 \beta_2^2 + c_{24}\beta_2^4, \quad U_{220} = \rho_1 h^3 \beta_2^2, \\ U_{23} &= (c_{25} + c_{35})\beta_1 \beta_2^2, \\ U_{24} &= c_{28}\beta_2^3 + c_{38}\beta_1^2 \beta_2 + I_6 \beta_2, \quad U_{240} = \rho_3 h^3 \beta_2, \\ U_{31} &= [b_{22}\beta_1^4 + (b_{12} + b_{21} + b_{31})\beta_1^2 \beta_2^2 + b_{11}\beta_2^4] h, \\ U_{33} &= b_{25}\beta_1^3 + (b_{15} + b_{35})\beta_1 \beta_2^2, \\ U_{32} &= b_{23}\beta_1^4 + (b_{24} + b_{13} - b_{32})\beta_1^2 \beta_2^2 + b_{14}\beta_2^4, \\ U_{34} &= (b_{28} + b_{38})\beta_1^2 \beta_2 + b_{18}\beta_2^3, \quad U_{41} = 0, \\ U_{42} &= \rho_1 h, \quad U_{43} = I_5 \beta_1, \quad U_{44} = I_6 \beta_2. \end{aligned} \quad (14)$$

(14) denklemler sisteminin sıfırdan farklı çözümün olması için katsayılardan oluşan determinant sıfıra eşitlenir ve aşağıdaki altıncı mertebeden cebirsel denklem elde edilir:

$$\omega^6 + F_1\omega^4 + F_2\omega^2 + F_3 = 0 \quad (15)$$

Burada  $F_i$  ( $i=1,2,3$ ) FD ortotropik malzeme özellikleri ve plak karakteristiklerine bağlı katsayılarıdır. Kayma deformasyonları ve dönel eylemsizlik etkileri bir arada dikkate alındığında FD ortotropik plağın boyutsuz frekans parametresinin değerleri aşağıdaki ifadeden bulunur:

$$\omega_{1KDPT}^{Donel} = \omega_{KDPT}^{Donel} (a^2/h) \sqrt{(1-\nu_{12}^2)\rho_0/E_{02}} \quad (16)$$

(15) denkleminde dönel eylemsizlik etkileri göz ardı edildiğinde, FD ortotropik plağın boyutsuz frekans parametresi KDT kapsamında, söz konusu etkilerin yanı sıra enine kayma gerilmeleri de yok edildiğinde frekans parametresi KPT kapsamında elde edilir.

### 3. Bulgular

Çizelge 1' de, dönel eylemsizlik etkileri dikkate alındığı ve alınmadığı durumlarda KDPT ve KPT kullanılarak  $a/b=0.5$  ve  $a/h=100$  için homojen ortotropik dikdörtgen plakların boyutsuz frekans parametre değerleri Thai ve Kim [10] sonuçları ile mukayese edilmektedir. Thai ve Kim [10] çalışmasında Levy tip çözüm elde edilmiş ve karşılaştırmalarda aşağıdaki malzeme özellikleri kullanılmıştır:

$$E_{01}/E_{02} = 10, 25;$$

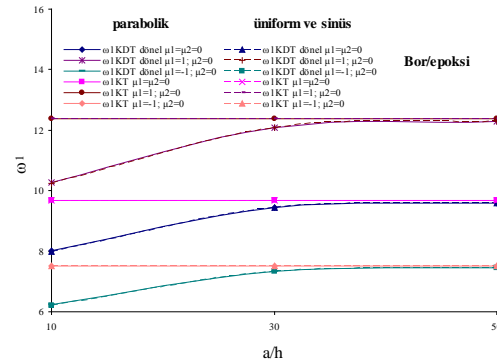
$$G_{012} = G_{013} = 0.5E_{02}, G_{023} = 0.2E_{02}, \nu_{12} = 0.25,$$

$\rho_0 = 1kg/m^3$ . Çizelge 1'de (\*) işareti dönel eylemsizlik etkilerinin dikkate alınmadığı duruma karşı gelmektedir. Sunulan çalışmada elde edilen değerlerin Thai ve Kim [10] çalışmasında elde edilen değerlerle uyum içinde olduğu görülmektedir.

**Tablo 1.** Frekans parametre değerlerinin Thai ve Kim [10] sonuçları ile karşılaştırılması

	$\omega_1 = \omega a^2/h\sqrt{\rho_0/E_{02}}$			
	Thai ve Kim [10]	Bizim çalışma	Thai ve Kim [10]	Bizim çalışma
$E_{01}/E_{02}$	10		25	
KPT	9.3421	9.3421	14.4578	14.4578
KDPT	9.3326 (9.3331)*	9.3300 (9.3304)*	14.4238 (14.4245)*	14.4126 (14.4133)*

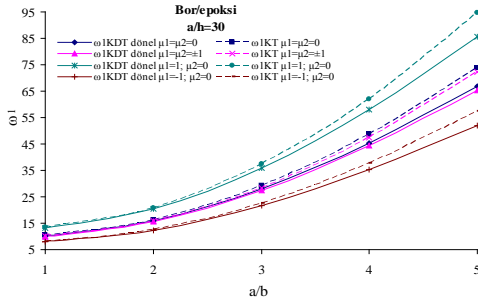
Kayma deformasyonları ve dönel eylemsizliğin etkileri bir arada dikkate alındığında ve KPT temelinde değişik FD ve H bor/epoksi dikdörtgen plakların boyutsuz frekans parametre değerlerinin değişik kayma fonksiyonları için  $a/h$  oranına bağlı dağılımları Şekil 3'de sunulmaktadır. Şekillerin daha belirgin olması için bu bölümde KDPT yerine KDT ve KPT yerine KT kısaltmaları kullanılmıştır. Şekil 2'de kayma gerilmesinin değişim kuralını karakterize eden fonksiyonlar  $f(z) = z(1-4z^2/3h^2)$ ;  $f(z) = z$  ve  $f(z) = (h/\pi)\sin(\pi z/h)$  olarak sunulmaktadır. Diğer şekillerde kayma gerilmesi için  $f(z) = z(1-4z^2/3h^2)$  fonksiyonu kullanılmaktadır. Tüm hesaplarda dalga sayıları bire eşit olduğu için çizelgelerde dikkate alınmamıştır. Kullanılan homojen malzeme bor/epoksi olup özellikleri şu şekildedir:  $E_{01} = 206.844 \times 10^9 Pa$ ,  $E_{02} = 18.6159 \times 10^9 Pa$ ,  $G_{012} = G_{013} = 4.48162 \times 10^9 Pa$ ,  $G_{023} = 2.55107 \times 10^9 Pa$ ,  $\nu_{12} = 0.21$ ,  $\rho_0 = 1kg/m^3$  ve  $a/b=0.5$  [3, 18]. Görüldüğü gibi her üç kayma fonksiyonu için frekans parametreleri değerleri hemen-hemen aynı olup  $a/h$  arttığında aynı seyir izlemektedir. Ayrıca,  $a/h$  arttığında kayma deformasyonları ve dönel eylemsizliğin bir arada boyutsuz frekans parametre değerlerine etkileri azalmaktadır. Örneğin;  $a/h=10; 30; 50$  olduğunda, boyutsuz frekans parametre değerlerine söz konusu etkiler sırasıyla %17.5; %2.4; %0.92 olmaktadır.



**Şekil 2.** FD ve H bor/epoksi dikdörtgen plakların boyutsuz frekans parametrelerinin değişik kayma fonksiyonları için  $a/h$  oranına bağlı dağılımları

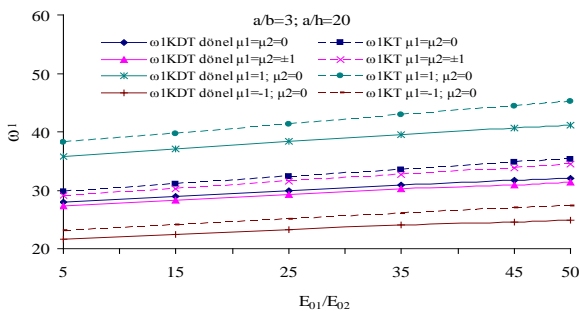
FD ve H bor/epoksi dikdörtgen plakların KDPT ve dönel eylemsizlik etkileri bir arada dikkate alındığında ve KPT temelinde boyutsuz frekans parametre değerlerinin parabolik kayma fonksiyonu için  $a/b$  oranına bağlı dağılımı Şekil 3'de sunulmaktadır. Dikdörtgen plağın geometrik ölçüleri şekil üzerinde sunulmaktadır.  $a/b$  oranı arttığında, FD ve H bor/epoksi dikdörtgen plakların boyutsuz frekans parametre değerlerinin artış hızının arttığı gözlenmiştir. KDPT kullanıldığında  $a/b$  oranı artışına bağlı olarak FD profilin etkisinin çok az arttığı, KPT kullanıldığında ise söz konusu etkinin  $a/b$  oranından

bağımsız olduğu tespit edilmiştir. FD profillerin boyutsuz frekans parametresine etkileri  $\mu_1 = -1; \mu_2 = 0$  ve  $\mu_1 = 1; \mu_2 = 0$  durumları için daha etkili olduğu gözlenmiştir. Örneğin  $a/b$  oranı arttığında;  $\mu_1 = \pm 1; \mu_2 = 0$ , kayma gerilmesi ve dönel eylemsizliğin bir arada boyutsuz frekans parametre değerlerine etkisi %17.18'den %42.08'e artmaktadır.  $\omega_{1KDT}^{donel}$  ile  $\omega_{1KDT}$  arasındaki fark  $a/b$  oranı arttığında önemli olur. Kayma gerilmesi ve dönel eylemsizliğin boyutsuz frekans parametre değerlerine homojen durumda daha belirgin olduğu görülmüştür.



**Şekil 3.** FD ve H ortotropik plakların  $\omega_{1KDT}^{donel}$  ve  $\omega_{1KPT}$  değerlerinin  $a/b$ 'ye bağlı dağılımı

Şekil 4'de FD ve H ortotropik dikdörtgen plakların KDPT ve dönel eylemsizlik etkileri bir arada ve KPT temelinde boyutsuz frekans parametrelerinin  $E_{01}/E_{02}$  oranına bağlı dağılımları sunulmaktadır.  $E_{01}/E_{02}$  oranı arttığında ortotropik dikdörtgen plakların KDPT ve dönel eylemsizlik bir arada ve KPT temelinde boyutsuz frekans parametrelerinin değerleri artmaktadır.  $E_{01}/E_{02}$  oranı arttığında ortotropik dikdörtgen plakların KDPT ve dönel eylemsizlik ve KPT çerçevesinde boyutsuz frekans parametrelerinin değerleri  $\mu_1 = -1$  ve  $\mu_2 = 0$  için daha yavaş ve  $\mu_1 = 1$  ve  $\mu_2 = 0$  için daha hızlı şekilde artmaktadır.  $E_{01}/E_{02}$  oranı arttığında ortotropik dikdörtgen plakların KDPT ve dönel eylemsizlik ve KPT için boyutsuz frekans parametrelerinin değerlerine FD etkisi değişmez. Tüm  $E_{01}/E_{02}$  oranı için  $\mu_1 = -1$  ve  $\mu_2 = 0$  olduğunda ortotropik dikdörtgen plakların KDPT ve dönel eylemsizlik bir arada etkideğinde ve KPT için boyutsuz frekans parametrelerinin değerleri diğer profillerden daha küçük olmaktadır.



**Şekil 4.** FD ve H ortotropik dikdörtgen plakların KDPT ve dönel eylemsizlik bir arada ve KPT için boyutsuz frekans parametrelerinin  $E_{01}/E_{02}$  oranına bağlı dağılımları

#### 4. Tartışma ve Sonuç

Sunulan çalışmada, kayma deformasyonları ve dönel eylemsizliklerinin kombine etkileri dikkate alınarak FD ortotropik plakların serbest titreşim denklemleri BMKDPT temel alınarak türetilmektedir. Elde edilen diferansiyel denklemler, Galerkin Yöntemi uygulanarak, basit mesnetli sınır koşulları için altıncı mertebe cebirsel denkleme dönüştürülüp sayısal olarak çözülmekte ve altı tane çözümün içinden en küçük pozitif olan frekansın minimum değerine karşı gelmektedir. Sonra, dönel eylemsizlik kuvvetleri göz ardı edilerek sadece kayma deformasyonlarının etkisi dikkate alındığı durumda, FD ortotropik plağın frekansı için kapalı çözüm elde edilir. Son olarak, FD ortotropik malzeme özellikleri ve plak boyutları değişiminin, kayma deformasyonları ve dönel eylemsizliklerin boyutsuz frekans parametresine etkileri sayısal olarak incelenmektedir. Sunulan çalışmada elde edilen sonuçların geçerliliği için literatürde sunulan çözümlerle karşılaştırmalar yapılmaktadır.

Sayısal analizlerin sonuçları aşağıdaki genelleştirmeleri ortaya koymaktadır:

- FD ve H ortotropik dikdörtgen plakların boyutsuz frekans parametre değerleri değişik kayma fonksiyonları için  $a/h$  ve  $a/b$  oranlarının artışına bağlı olarak artmaktadır.
- Kayma gerilme veya deformasyon fonksiyonu parabolik değiştiğinde bor/epoksi dikdörtgen plakların boyutsuz frekans parametre değerleri sinüs ve üniform fonksiyonları dikkate alındığı durumlardaki uygun değerlerden biraz daha büyük olmaktadır.
- FD bor/epoksi dikdörtgen plakların boyutsuz frekans parametre değerleri, homojen bor/epoksi dikdörtgen plakların boyutsuz frekans parametre değerleri ile mukayese edildiğinde, FD profili etkisinin  $\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$  düşük olduğu,  $\mu_1 = -1; \mu_2 = 0$  için önemli olduğu ve  $\mu_1 = 1; \mu_2 = 0$  çok daha etkin olduğu gözlenmektedir.
- FD bor/epoksi dikdörtgen plakların boyutsuz frekans parametre değerlerine KDT kullanıldığında, FD profilin etkisi  $a/h$  ve  $a/b$  oranları arttığında çok az artmaktadır ve KPT kullanıldığında ise söz konusu etki sabit kalmaktadır.
- FD bor/epoksi dikdörtgen plaklar için,  $a/h$  oranı arttığında kayma gerilmesi ve dönel eylemsizliğin bir arada ve sadece kayma gerilmesinin boyutsuz frekans parametre değerlerine etkisi önemli derecede azalmaktadır.

- f.) FD bor/epoksi dikdörtgen plaklar için FD profillerin etkisi kayma gerilme ve dönel eylemsizliğin etkilerini biraz daha azaltmaktadır.
- g.) FD bor/epoksi dikdörtgen plaklar için, kayma gerilmeleri ve dönel eylemsizliklerin bir arada ve sadece kayma gerilmelerinin boyutsuz frekans parametre değerlerine etkisi çok önemli olup  $a/b$  oranı arttığında artmaktadır.
- h.)  $E_{01}/E_{02}$  oranı arttığında, FD ortotropik dikdörtgen plakların KDT ve dönel eylemsizlik, KDT ve KT için boyutsuz frekans parametrelerinin değerleri artmaktadır.
- i.) FD ortotropik dikdörtgen plakların KDT için boyutsuz frekans parametrelerinin  $E_{01}/E_{02}$  oranına bağlı değerleri KT için uygun değerlerden küçük olduğu görülmektedir.

### Teşekkür

Yazarlar 113M399 No'lu projeye desteği için TÜBİTAK'a ve 3814-YL1-13 No'lu projeye desteği için SDÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkürlerini sunar.

### Kaynakça

- [1] Mindlin, R.D. 1951. Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18(1951), A31-8.
- [2] Ambartsumian, S.A. 1964. *Theory of Anisotropic Plates; Strength, Stability, Vibration*. Technomic Publishing Company, 396s.
- [3] Reddy, J.N. 2004. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis (Second Edition)*. Florida: CRC Press, 831.
- [4] Shimpi, R.P., Pateli, H.G. 2006. A Two Variable Refined Plate Theory for Orthotropic Plate Analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 43(2006), 6783-6799.
- [5] Aydogdu, M., 2009. A New Shear Deformation Theory for Laminated Composite Plates. *Composite Structures*, 89(2009), 94-101.
- [6] Hull, P.V., Buchanan, G.R. 2003. Vibration of Moderately Thick Square Orthotropic Stepped Thickness Plates. *Applied Acoustics*, 64(2003), 753-763.
- [7] Liew, K.M., Wang, J., Ng, T.Y., Tan, M.J. 2004. Free Vibration and Buckling Analyses of Shear-Deformable Plates Based on FSDT Meshfree Method. *Journal of Sound and Vibration*, 276(2004), 997-1017.
- [8] Civalek, O. 2008. Free Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Composite Plates with First-Order Shear Deformation Theory (FSDT) by Discrete Singular Convolution Method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44(2008), 725-731.
- [9] Ferreira, A.J.M., Fasshauer, G.E., Batra, R.C., 2009. Natural Frequencies of Thick Plates Made of Orthotropic, Monoclinic, and Hexagonal Materials by a Meshless Method. *Journal of Sound and Vibration*, 319(2009), 984-992.
- [10] Thai, H.-T., Kim, S.-E., 2012. Levy-Type Solution for Free Vibration Analysis of Orthotropic Plates Based on Two Variable Refined Plate Theory. *Applied Mathematical Modelling*, 36(2012), 3870-3882.
- [11] Somireddy, M., Rajagopal, A., 2014. Meshless Natural Neighbor Galerkin Method for the Bending and Vibration Analysis of Composite Plates. *Composite Structures*, 111(2014), 138-146.
- [12] Thai, H.T., Vo, T.P., Bui, T.Q., 2014. A Quasi-3D Hyperbolic Shear Deformation Theory for Functionally Graded Plates, *Acta Mechanica*, 225(2014), 951-965.
- [13] Jin, G., Su, Z., Shi, S., Ye, T., Gao, S., 2014. Three-Dimensional Exact Solution for the Free Vibration of Arbitrarily Thick Functionally Graded Rectangular Plates with General Boundary Conditions. *Composite Structures*, 108(2014), 565-577.
- [14] Pan, E., 2003. Exact Solution for Functionally Graded Anisotropic Composite Laminates. *Journal of Composite Materials*, 37(2003), 1903-1920.
- [15] Ootao, Y., Tanigawa, Y., 2007. Three-Dimensional Solution for Transient Thermal Stresses of an Orthotropic Functionally Graded Rectangular Plate. *Composite Structures*, 80(2007), 10-20.
- [16] Mansouri, M.H., Shariyat, M., 2014. Thermal Buckling Predictions of Three Types of High-Order Theories for the Heterogeneous Orthotropic Plates, Using the New Version of DQM. *Composite Structures*, 113(2014), 40-55.
- [17] Sofiyev, A.H., Kuruoglu, N., 2014. Buckling and Vibration of Shear Deformable Functionally Graded Orthotropic Cylindrical Shells under External Pressures. *Thin-Walled Structures*, 78(2014), 121-130.
- [18] Pınarlık, M. 2014. Fonksiyonel değişimli ortotrop plakların dinamik tepkisine kayma deformasyonu ve dönel eylemsizlik etkilerinin incelenmesi. Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 117s, Isparta

**Semboller**

$a$  Dikdörtgen plağın uzunluğu  
 $b$  Dikdörtgen plağın eni  
 $B_{ij}(Z), (i, j = 1, 2, \dots, 6)$  FD ortotrop malzeme sabitlerini içeren semboller  
 $b_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 8)$  Plak ve FD ortotrop malzeme sabitlerini içeren semboller  
 $c_{ij} (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, 8)$  Plak ve FD ortotrop malzeme sabitlerini içeren semboller  
 $C_\phi, C_f, C_\varphi, C_\psi$  Bilinmeyen fonksiyonlar  
 $e_x, e_y, e_{xy}$  Plağın referans yüzeyindeki deformasyonlar  
 $E_{01}, E_{02}$  Homojen ortotrop malzemenin x ve y doğrultulardaki Young modülleri  
 $f(z)$  Kayma gerilmelerini karakterize eden fonksiyon  
 $F_j (i = 1, 2, 3)$  Plak boyutları ve FD ortotrop malzeme özelliklerine bağlı olan katsayılar  
 $G_{012}, G_{013}, G_{023}$  Homojen ortotrop malzemenin kayma modülleri  
 $h$  Dikdörtgen plağın kalınlığı  
 $I_{01}, I_{02}$  Kayma deformasyonlarına bağlı parametreler  
 $L_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, 6)$  Diferansiyel operatörler  
 $m$  Plağın boyuna doğrultudaki yarım dalga sayısı  
 $M_x, M_y, M_{xy}$  Moment bileşenleri  
 $n$  Plağın enine doğrultudaki dalga sayısı  
 $Oxyz$  Plağın referans yüzeyindeki koordinat sistemi  
 $Q_x, Q_y$  Kesme kuvvetleri  
 $T_x, T_y, T_{xy}$  Plağın birim alanına ait iç tanjant kuvvet bileşenleri  
 $U_{ij} (i = 1, 2, \dots, 4, j = 1, 2, \dots, 8)$  Plak boyutları ve FD ortotrop malzeme özelliklerini karakterize eden katsayılar  
 $u, v, w$  Yer değiştirmeler  
 $x, y$  Ortotropi doğrultular ile çakışan eksenler  
 $z$  Plağın referans yüzeyine normal yöndeki eksen  
 $Z$  Boyutsuz kalınlık koordinatı  
 $\beta_1, \beta_2$  Plak boyutlarına ve dalga sayılarına bağlı parametreler  
 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  Plağın her hangi bir noktasının x ve y doğrultularında deformasyon bileşenleri  
 $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$   $Oxy, Oxz$  ve  $Oyz$  düzlemlerinde kayma deformasyonları  
 $\Lambda_{ij}^{k_1} (k_1=0,1,2)$  Malzeme ve plak boyutlarına bağlı katsayılar  
 $\mu_1$  Young ve kayma modüllerinin z doğrultusunda derecesini karakterize eden üstel katsayı  
 $\mu_2$  Yoğunluğun derecesini z doğrultusunda karakterize eden üstel katsayı

$\nu_{12}, \nu_{21}$  Homojen ortotrop malzemenin Poisson oranları  
 $\rho_0$  Homojen izotrop veya ortotrop malzemenin yoğunluğu  
 $\rho_2 h^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \rho_3 h^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$  Dönel eylemsizlik kuvvetleri  
 $\sigma_x, \sigma_y$  Plağın herhangi bir noktasının x ve y doğrultularındaki normal gerilmeler  
 $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  sırasıyla  $Oxy, Oxz$  ve  $Oyz$  düzlemlerinde kayma gerilmeleri  
 $\varphi(x, y), \psi(x, y)$  Dönme açıları  
 $\Phi$  Airy gerilme fonksiyonu  
 $\omega$  Titreşim frekansı  
 $\omega_{KDPT}^{Donel}$  KDPT ve dönel eylemsizlik dikkate alındığında, FDM ortotrop plağın boyutsuz serbest titreşim frekansı  
 $\omega_{1KDPT}^{Donel}$  KDPT ve dönel eylemsizlik dikkate alındığında, FDM ortotrop plağın boyutsuz serbest titreşim frekansı  
 $\omega_{KDPT}$  KDPT için FDM ortotrop plağın serbest titreşim frekansı  
 $\omega_{1KDPT}$  KDPT için FDM ortotrop plağın boyutsuz serbest titreşim frekansı  
 $\omega_{KPT}$  KPT kullanıldığında, FDM ortotrop plağın serbest titreşiminin doğal frekansı  
 $\omega_{1KPT}$  KDPT kullanıldığında, FDM ortotrop plağın

Pa Paskal  
 m metre  
 kg kilogram  
 % Yüzde