Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi (http://sbe.gantep.edu.tr)
2011 10(4):1325 -1346 ISSN: 1303-0094

Öğretmen Adaylarının Grafikler Konusundaki Bilgi Düzeyleri

Prospective Teachers' Understanding of Graphs

İbrahim Bayazıt
Erciyes Üniversitesi

Özet

Bu çalışmada Fen Bilgisi ve Sınıf Öğretmenliği bölümlerinde okuyan öğretmen adaylarının grafikler konusundaki bilgi düzeyleri incelenmektedir. Bulgular öğretmen adaylarının değişkenler arasındaki ilişkileri grafiksel ortamda anlama ve yorumlamada ciddi sıkıntılar yaşadıklarını göstermektedir. Katılımcılar noktasal bağlamda grafik okuma veya cebirsel formüller yardımıyla işlemler yapma gibi nicel bilgiler gerektiren ve gerçek yaşamla alakalı durumları temsil eden grafikleri yorumlamada daha başarılı olmuşlardır. Ancak, 'bağımız değişkende yapılan değişimin grafiğin genel gelişimini nasıl etkileyeceğini anlama' ve 'verilen grafiklerin cebirsel/aritmetiksel işlemler yapmadan yorumlanması' gibi nitel algılar ve global yaklaşımlar gerektiren sorularda katılımcıların başarısız olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Öğretmen adayları, grafiksel gösterimler, görsel algı, nicel algı, nitel algı.

Abstract

This study examines prospective teachers' understanding of graphical representations. The research findings indicate that prospective teachers have difficulties in understanding the relationships between the variables in the graphical contexts. The participants were successful in dealing with the graphs that required quantitative approach, such as dealing with a graph point-by-point or making algebraic manipulations to tease out information embedded in the situation. They were also quite competent to deal with the graphs in a global way providing that the graphs represented real life situations. Nevertheless, very few participants were able to interpret graphs in a global way when the graphs required qualitative approaches, such as an understanding of how changes in the algebraic form of a function could affect the graph of that function.

Keywords: Prospective teachers, graphs, iconic interpretation, quantitative interpretation, qualitative interpretation.

I. GİRİŞ

Yapılandırmacı öğrenme kuramının takipçisi olan eğitimciler (Gray, v.d., 1999) insan aklının soyut matematiksel düşünceleri tutmasının zor olduğunu belirtmektedir. Bu eğitimcilere göre matematikte kullanılan temsiller (gösterimler) adeta bir konteynır gibi işlev görürler. Bireyler soyut matematiksel düşünceleri bu temsiller vasıtasıyla kodlayarak zihinlerine kaydederler, ihtiyaç duyduklarında da bu kodları çözerek bilgiye ulaşır ve problem çözümlerinde kullanırlar. Matematik öğretiminde harfler, semboller, simgeler ve cebirsel/aritmetiksel ifadeler gibi değişik temsillerden faydalanılmaktadır. İlköğretimden üniversiteye kadar her seviyedeki matematik programında sıkça kullanılan temsillerden bir tanesi de grafiklerdir. Grafikler, değişkenler arasındaki ilişkilerin izahında, istatistiksel bilgilerin sunumunda, denklem ve eşitsizlik konularında ve ileri düzey cebir konularının neredeyse tamamında yaygın olarak kullanılmaktadır. Soyut düşünceleri ve karmaşık bilgileri görselleştirerek sunması grafiklerin matematik öğretimindeki yerini ve önemini bir kat daha artırmaktadır. Grafikler problem çözme sürecinde sergilenen düşüncelerin kâğıda aktarılarak görsel bir boyut kazanmasına olanak sağlar. Bu sayede öğrenciler eldeki problem hakkında daha etkin düşünebilir, arkadaşlarıyla daha kolay iletişim kurup bilgi ve düşünce eksenli tartışmalar yapabilirler (Kaput, 1995). Grafiklerin etkin kullanımı öğrencilerin kavramsal bilgi edinmelerini kolaylaştırmanın yanı sıra uzamsal düşünebilme ve problem çözme yeteneklerinin gelişimine katkı sağladığı da bilinmektedir.

Grafiklerin disiplinler arası ve hatta disiplinler üstü bir işlevinin olduğu da muhakkaktır. Kimyasal bir reaksiyonun hızındaki değişimi temsil eden grafikler ve beklemeye bırakılmış bir bardak sudaki bakteri nüfusunun artışını gösteren grafikler fen bilimlerinde bu gösterimlerin nasıl kullanıldığının en tipik örnekleridir. İstatistik ve ekonominin yanı sıra sosyoloji ve siyaset bilimi gibi sosyal içerikli alanlarda da grafikler yoğun olarak kullanılmaktadır. Görsel ve yazılı basında sosyal ve ekonomik konulara ilişkin halkın eğilimlerini saptamak amacıyla yapılmış çalışmaların sonuçlarını analiz ederken araştırmacıların grafiklerden yararlandıklarını görmekteyiz. Dolayısıyla, bireylerin grafik okuma ve yorumlamadaki bilgi ve becerilerinin matematiğin yanı sıra fen bilimleri derslerindeki başarılarında da önemli bir etken olduğunu söyleyebiliriz. Bunun da ötesinde güncel hayatta karşılaştıkları grafikleri yorumlayıp doğru sonuçlara ulaşabilmeleri ve bilinçli birer toplum üyesi olarak yaşamlarını sürdürebilmeleri için bireylerin grafikler konusunda yeterli düzeyde bilgi sahibi olmaları bir zorunluluk haline gelmiştir.

Matematik eğitiminin grafikler konusunda öğrencilere yeterli bilgi ve becerileri kazandırmak konusunda özel bir amacının olduğu muhakkaktır. Bunun bilincinde olan program yapımcıları öğrencilerin matematiksel düşüncelerini ifade ederken grafiklerden etkin bir şekilde yararlanmalarının önemini vurgulamaktadır (MEB, 2005). Ortaöğretim Matematik Ders Programında (a.g.e.) öğrencilerin matematiksel kavramlar hakkında daha etkin düşünebilmelerini desteklemek için grafiklerin kullanıldığı görsel öğrenme/öğretme ortamlarının oluşturulması önerilmektedir. Ancak, yapılan çalışmalar ilkokuldan üniversiteye kadar her seviyedeki öğrencilerin grafik okuma ve yorumlamada ciddi sıkıntılar yaşadığını ve birtakım yanılgılar sergilediğini göstermektedir (Bell ve Janvier, 1981; Leinhardt vd., 1990; Dunham ve Osborne, 1991; Kieran, 1992; Even, 1998; Capraro v.d., 2005). Literatürü incelendiğimizde bu zorlukların ve yanılgıların üç temel alanla ilişkili olduğunu görmekteyiz:

- Grafik okuma ve yorumlama,
- Grafik oluşturma (çizme) ve
- Grafikler ile diğer gösterimler arasında var olan anlamsal ilişkiyi kavrama ve bu temsiller arasında ileri-geri geçişler yapabilme.

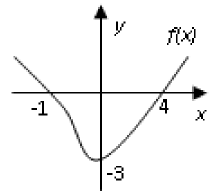
Shah ve Hoeffner (2002) grafik okuma ve yorumlamada öğrencilerin başarılarını etkileyen faktörleri belirlemek amacıyla yaş ve ders ayrımı gözetmeksizin genel bir literatür taraması yapmıştır. Araştırmacılar grafik okuma ve yorumlamada üç temel faktörün etkili olduğunu belirlemişlerdir. Bu faktörler: a) Grafiğin görsel özellikleri b) Öğrencilerin grafik okuma ve yorumlama konusundaki bilgi düzeyleri ve c) Öğrencilerin grafikteki verilerin içeriği hakkındaki bilgi düzeylerini içermektedir. Okuyucunun matematiksel bilgi düzeyinin de grafik okumadaki başarısını etkilediği bilinmektedir (Kieran, 1992; Friel, v.d., 2001; Capraro, v.d., 2005). Matematiksel bilgi eksikliğinin bir sonucu olarak öğrenciler sürekli bir veriyi noktasal olarak okuyup yorumlayabilmekte veya ayrık/kesikli bir verinin de sürekli bir grafikle temsil edileceğini düşünebilmektedir (Leinhardt, v.d., 1990; Kramarski, 2004). Bazı öğrenciler x ve y-eksenlerinin farklı şekillerde ölçeklendirilmesinden dolayı grafikleri yanlış yorumlarken kimileri de grafiğin ölçeğini dikkate almadan soruları yanıtlamaya çalıştıkları için hatalar yapmaktadır (Dunham ve Osborne, 1991).

Bundan sonraki kısımda güncel yaşam durumlarının ve matematiksel kavramların sunumunda kullanılan grafiklerin okunması ve yorumlanmasında karşılaşılan zorlukların ve yanılgıların kısa bir özeti sunulacaktır. Sütun ve pasta-dilim grafikleri gibi istatistiksel verilerin sunumunda kullanılan grafikler bu makalenin konusuyla alakalı olmadığı için kapsam dışı tutulmuştur.

Grafikler konusunda karşılaşılan zorlukların en başında ‘grafiği resim olarak algılama yanılgısı’ gelmektedir (Bell ve Janvier, 1981). Üniversite öğrencileri arasında dahi görülebilen bu yanılgı tanımlanan durumun analitik düzlemde resmini çizmeyi veya verilen resmin kendisini olduğu gibi analitik düzleme taşımayı içermektedir (Bell ve Janvier, 1981; Clement, 1989; Slavit, 1994). Bu yanılgıyı sergileyen öğrencilerin grafiğin görsel özeliklerinin ötesine geçip değişkenler arasındaki ilişkiyi anlayamadıkları açıktır.

Öğrenciler arasında sıkça rastlanan bir diğer yanılgı ise ‘nokta-aralık’ yanılgısıdır. Bu yanılgı, grafiği yorumlarken öğrencilerin belli aralıktaki noktalar kümesi yerine bu aralıktaki tek bir noktaya odaklanmasından kaynaklanmaktadır

(Bell ve Janvier, 1981; Leinhardt, v.d., 1990; Monk, 1992; Dugdale, 1993). Örneğin, bu tür kısıtlı algı sergileyen öğrencilere yandaki grafik verilse ve *f(x)*'i sıfırdan küçük yapan *x* değerlerini bulmaları istenilse sadece *x=0* için *f(x)* in negatif değer aldığını söyleyeceklerdir. Bu kısıtlı algının sebebi öğrencilerin grafiğin *x* ekseninin altında kalan parçasının tamamına değil sadece *y* eksenini kestiği -3 noktasına yoğunlaşmalarıdır. Hâlbuki grafiğe daha genel baktığımızda (-1, 4) aralığındaki tüm *x* değerlerine karşılık fonksiyonun negatif değerler aldığını görmekteyiz.



Grafikler konusunda öğrencilerin düştüğü bir diğer yanılgı ise 'yükseklik-eğim' yanılgısıdır. Bu yanılgı, öğrencilerin eğim ile ilgili bir soruyu çözerken, verilen grafiğin (doğrunun) eğimini analiz etmek yerine doğrunun yüksekliğine odaklanmalarından kaynaklanmaktadır (Bell ve Janvier,1981; Clement, 1989; Roth ve Bowen, 2001). Nokta-aralık yanılgısında olduğu gibi yükseklik-eğim yanılgısının sebebi de öğrencilerin grafiğin genel yapısına ve gelişimine bakmak yerine grafik ile noktasal veya yerel bağlamda ilgilenmelerinden kaynaklanmaktadır.

Grafik çizimleriyle ilgili yanılgıların en başında geleni öğrencilerin doğrusal grafikler çizmeye eğimli olmalarıdır (Leinhardt, v.d., 1990). Bazı öğrenciler her koşul altında grafiği artan bir eğri olarak çizerken kimileride ilgili verileri tek tek seçip her biri için ayrı grafikler oluşturmaktadır (Mevarech ve Kramarsky, 1997; Kramarski, 2004). Sergilenen bu zorluk ve yanılgıların temelinde öğrencilerin grafiğe manasını veren kavram ve bağıntıları tam olarak anlayamamaları yatmaktadır. Öğrencilerin girdi-süreç-çıktı üçlüsünü ayırt edememeleri ve özelliklede girdi-çıktı ikilisi arasındaki anlamsal ilişkiyi anlamadaki yetersizlikleri bu tür yanılgılara zemin hazırlamaktadır. Grafik çizerken öğrenciler grafikler konusunda sahip oldukları bilgilerini kullanarak uygulamalar yaparlar. Bu sebeple grafik çizme, grafik okuma ve yorumlamadan daha zor bir uğraş olarak kabul edilmektedir (Tairab ve Al-Naqbi, 2004).

Grafik okuma ve yorumlamada olduğu gibi grafik çizimleri de nicel veya nitel anlama gerektirebilir. Geleneksel eğitim anlayışının hâkim olduğu ders programları ve sınıf içi uygulamalarda öğrencilere daha çok nicel anlama gerektiren çizimlerin yaptırıldığı bilinmektedir (Leinhardt, v.d., 1990). Bu etkinlikler tablosal olarak sunulan veri ikililerinin analitik düzlemde işaretlenmesini ve daha sonra da bu noktaların bir doğru veya eğriyle birleştirilerek grafiğin elde edilmesini içermektedir. Cebirsel olarak tanımlanan bir bağıntının grafiğini çizerken de benzer bir yol izlenmektedir. Öncelikle sınırlı sayıda girdi için görüntüler elde edilmekte, elde edilen sayı ikilileri analitik düzlemde işaretlendikten sonra bir eğri veya doğruyla birleştirilerek istenilen grafiğin çizimi yapılmaktadır. Bu tür uygulamalar öğrencilerin değişkenler arasında var olan ilişkileri noktasal düzeyde anlamalarına yardımcı olmakla birlikte grafiğin genel yapısına ve gelişimine bakıp değişkenler arasındaki ilişkiyi daha global düzeyde anlayabilmeleri için gerekli zihinsel yetenekleri geliştirmelerinin önünde engel oluşturabilmektedir. Nicel anlama gerektiren çizim etkinliklerinin çok fazla yaptırılması kimi öğrencilerin grafiklerin sonsuz tane noktanın birleşiminden oluşan görsel yapılar olduğunu anlamalarını da zorlaştırabilmektedir (Dunham ve Osborne, 1991). Nitel anlama gerektiren çizim etkinlikleri ise noktasal yaklaşımlar göstermeden verilen bağıntıların grafiklerini çizebilmeyi öngörür. Örneğin, [0, 2π] aralığında *f(x)=sinx* fonksiyonunun grafiği verilip *g(x)=1+sinx* fonksiyonunun grafiğini çizmeleri istendiğinde öğrenciler '1 in *f(x)* fonksiyonunun görüntü kümesindeki değerlere eklendiği' düşüncesinden hareketle *f(x)* in grafiğini *y*-ekseni boyunca 1 birim öteleyerek *g(x)* in grafiğini elde edebiliyorlarsa nitel anlama gerektiren çizimleri yapabiliyorlar demektir.

Öğrencilerin en çok zorlandıkları konulardan bir tanesi de grafikler ile diğer gösterimler arasında ilişki kuramamaları ve bunlar arasında ileri-geri geçişler yapamamalarıdır (Leinhardt, v.d., 1990; Kieran, 1992; Even, 1998). Bu tür sıkıntıların yoğun olarak gözlemlendiği alanların başında fonksiyon grafikleri gelmektedir. Tabloyla sunulan verilen ve cebirsel olarak tanımlanan fonksiyonların grafiklerini çizerken öğrencilerin fazla zorlanmadıkları bilinmektedir; ancak grafiği verilen bir fonksiyonun cebirsel gösterimini elde etmede ciddi sıkıntılar yaşamaktadırlar. Markovits v.d. (1986)'nin çalışmasına katılan lise düzeyindeki öğrencilerin ancak üçte biri grafiği verilmiş olan doğrusal bir fonksiyonun – fonksiyon *x* ve *y* eksenlerini sırasıyla 2 ve -2 noktalarında kesen bir doğrudan oluşmaktadır – cebirsel formunu elde edebilmiştir. Verilen fonksiyon karmaşık bir yapıya büründükçe öğrencilerin her iki yöndeki geçişlerde de zorlandığı görülmüştür. Örneğin, aynı çalışmada katılımcı öğrencilerin ancak %25'i $h: IR \to IR, h(x) = \begin{cases} 4, x \neq 2, \\ 1, x = 2 \end{cases}$ parçalı fonksiyonunun grafiğini doğru olarak çizebilmiştir. Even (1998) matematik öğretmenliği bölümünde okuyan toplam 152 öğrenciye şu soruyu yöneltmiştir: " $f(x) = ax^2 + bx + c\,(a,b,c \in IR)$ fonksiyonu *x=1* için pozitif bir değer ve *x=6* için ise negatif bir değer ürettiğine göre $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kaç tane reel kökü vardır. Açıklayınız". Bu sorunun cebirsel yaklaşımlarla çözümü mümkün değildir. Verilen fonksiyonun grafiği üzerinden yorumlar yapılarak söz konusu denklemin iki tane reel kökünün olduğu anlaşılabilir ki katılımcıların sadece %14 lük bir kısmı bu ilişkiyi kurarak doğru yanıtı elde edebilmiştir. Bir fonksiyonun cebirsel gösterimi üzerinde yapılan değişikliklerin bu fonksiyonun grafiksel temsili üzerindeki yansımalarını hayal edebilmek ise öğrenciler için çok daha büyük zorluk teşkil etmektedir (Brasell ve Rowe, 1993; Dugdale, 1993; Connery, 2007).

Kuramsal Çerçeve

Öğrencilerin grafikler konusunda yaşadıkları zorlukların zihinsel sebeplerini anlamak ve bu konuda sahip oldukları bilginin niteliği hakkında yorum yapabilmek için farklı teorik yaklaşımlardan yararlanılabilir. Ancak bu amaç için eğitimcilerinin üzerinde mutabık olduğu işlevsel bir kuramsal çerçevenin olmadığını da belirtmek isteriz. Dolayısıyla, eldeki çalışmada öğretmen adaylarının bilgilerini incelemek için ilgili literatürden (Bell ve Janvier, 1981; Leinhardt v.d., 1990; Kieran, 1992; Even, 1998; Connery, 2007) çıkarımlarda bulunulmuş ve veriler üç temel düşünce ışığında analiz edilmiştir: *görsel algı*, *nicel algı* ve *nitel (global) algı*.

Görsel algı düzeyindeki öğrenciler için verilen grafik resim olmanın ötesinde hiçbir mana ifade etmez (Bell ve Janvier, 1981). Görsel algıya sahip olan öğrenciler grafiğe manasını veren bağıntı ve matematiksel kavramlar hakkında fikir sahibi değildir. Tamamen grafiğin görsel özelliklerine odaklanarak eldeki problem hakkında düşünce yürütmeye çalışırlar. Nicel algı düzeyinde öğrenciler grafiklere manasını veren bağıntı ve matematiksel kavramların farkındadır. Ancak bu bağıntı ve kavramlar hakkında fikir yürütürken grafikle noktasal bağlamda (nokta-nokta) ilgilenme veya cebirsel-aritmetiksel işlemler yapma ihtiyacı duyarlar (Leinhardt, v.d., 1990). Grafiğin kritik noktaları (başlangıç noktası, kesişim noktası, büküm noktaları, orijine olan uzaklığı, yüksekliği, v.b.) gibi yerel özelliklerine yoğunlaşırlar ve bunlardan hareketle doğru yanıtı elde etmeye çalışırlar. Ancak, grafiğin genel gelişimini daha bütüncül yaklaşımlarla yorumlayabilecek zihinsel yeterliliğe sahip değillerdir. Örnek vermek gerekirse, nicel algı düzeyindeki bir öğrenci grafiği verilen bir fonksiyonun belli noktalardaki değerini bulabilir veya verilen bir fonksiyonda bağımsız değişkende yapılan değişikliğin fonksiyonun grafiğine nasıl yansıdığını cebirsel işlemeler yaparak anlayabilir. Nitel (global) algı düzeyinde ise öğrenciler noktasal veya cebirsel yaklaşımlar sergilemeden grafiğin genel gelişimi üzerinde düşünebilir, verilen bir fonksiyon grafiğini tek bir matematiksel obje gibi algılayıp yeni süreçlerde kullanabilirler. Cebirsel gösterimler üzerinde yapılan değişikliklerin grafiğe nasıl yansıdığını zihinlerinde canlandırabilirler. Örneğin, $f(x)=x^2$ fonksiyonunun grafiği verilip $g(x)=x^2+2$ ün grafiğini çizmeleri istendiğinde cebirsel işlem yapmadan ve 'her x girdisi için $f(x)$'in görüntü kümesindeki elemanların 2 birim büyüyeceği' düşüncesinden hareketle $f(x)$'in grafiğini y-ekseni boyunca 2 birim öteleyerek $g(x)$'in grafiğini çizebilirler.

II. YÖNTEM

Araştırma Metodu

Çalışma konusuyla alakalı gerçekçi ve zengin bilgilerin üretilmesi ve mevcut durumun daha bütüncül bir yaklaşımla incelenmesi amacıyla eldeki çalışmada nitel araştırma metotlarından örnek olay (Yin, 2003) yöntemi kullanılmıştır. Araştırmaya Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesinde öğrenim gören 20 si Sınıf Öğretmenliği (SÖB[1]) ve 20 si de Fen Bilgisi Öğretmenliği bölümünden (FBÖ) olmak üzere toplam 40 öğretmen adayı katılmıştır. Katılımcılar kendi istekleri ile çalışmada yer almışlardır. Araştırmanın yapıldığı tarih itibariyle katılımcılar dört yıllık lisans eğitimlerinin üçüncü sınıfında öğrenim görmekteydiler

[1] Sınıf Öğretmenliği Bölümü için **SÖB**, Fen Bilgisi Öğretmenliği Bölümü için **FBÖ** kısaltmaları kullanılacaktır.

ve dolayısıyla genel matematik dersini ve bu bağlamda denklem ve fonksiyonlar gibi grafiksel gösterimlerin yaygın olarak kullanıldığı konuları okumuş bulunmakta idiler. Veriler yazılı sınav tekniği ile toplanılmış ve sınavda öğrencilere toplam 8 tane açık uçlu soru yöneltilmiştir. Açık uçlu soruların kullanımıyla öğretmen adaylarının grafik okuma ve yorumlamada sahip oldukları bilgi düzeyleri hakkında nitel verilerin toplanılması amaçlanmıştır. Sınavın uygulanması esnasında zaman kısıtlamasına gidilmemiş ve öğrencilere ihtiyaç duydukları kadar süre tanınmıştır. Sınav araştırmacının kendisi tarafından yapılmış ve her iki bölümdeki öğrencilere aynı ders saatinde uygulanmıştır. Sorular hakkındaki gerçek bilgi ve düşüncelerini kâğıda yansıtmaları ve çözebiliyorlarsa cebirsel/aritmetiksel işlemler yapmadan soruları çözmeleri konusunda katılımcılar cesaretlendirilmiştir.

Bir önceki bölümde detaylı olarak açıklandığı üzere grafikler konusundaki öğrenci zorlukları ve yanılgıları 'grafiklerin resim olarak algılanması', 'ölçeklendirmeden kaynaklanan yanılgılar', 'nokta-aralık yanılgısı', 'yükseklik-eğim yanılgısı', 'grafik çizmede yaşanan zorluklar' ve 'grafikler ile diğer gösterimler arasındaki ilişkilerin anlaşılmaması ve bu temsiller arasındaki geçişlerde yaşanan zorluklar' alanlarında yoğunlaşmaktadır. Eldeki çalışmada bu alanların her birine ilişkin sorular kullanmak yerine daha genel bir yaklaşım sergilenmiş ve öğrencilerin grafik okuma ve yorumlamada *görsel, nicel* ve *nitel* bilgi türlerinden hangisine sahip olduklarını ortaya çıkarmayı amaçlayan sorular kullanılmıştır. Soruların 4 tanesi literatürden direkt olarak alınmış, 4 tanesi ise araştırmacı tarafından geliştirilmiştir.

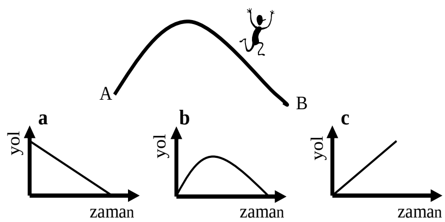
Veri Analizi

Toplanılan verilerin analizinde içerik (content) analizi metodu kullanılmıştır (Miles ve Huberman, 1994; Stake, 1995). Öğrencilerin sınav kâğıtları fotokopi edilerek çoğaltılmış ve analiz işlemleri bu dokümanlar üzerinden yürütülmüştür. Sübjektif yargı ve değerlendirmelerin önüne geçmek için analiz işlemleri birisi araştırmacının kendisi olmak üzere iki matematik eğitimcisi tarafından eşzamanlı olarak yapılmıştır. Öğrencilerin yanıtları bir önceki kısımda açıklanan üç temel düşünce çerçevesinde değerlendirilmiş ve verilerin analizi yapılırken kodlama tekniği kullanılmıştır. Analizciler her bir soruya ilişkin öğrenci yanıtlarını satır satır incelemiş ve çıkarımda bulundukları manaları kısa kodlarla ifade etmişlerdir. Bu kodlardan bazıları şunlardır: Noktasal Yaklaşım (NK), Cebir Kullanımı (CK), Grafiklerin Kesişim Noktasına Yoğunlaşma (GKNY), Tablo Kullanımı (TK), Aritmetik Değerlerin Kullanımı(ADK). Analizciler sık sık bir araya gelerek yaptıkları kodlamaları karşılaştırmışlar ve öğretmen adaylarının sahip oldukları algı türüne ilişkin ortak saptamalarda bulunmuşlardır. Bu süreç neticesinde her bir soruya verilen cevapların doğruluğu ve yanlışlığı da göz önünde bulundurularak üretilmiş olan kodlar bir bütün olarak değerlendirilmiş ve içeriksel açıdan aynı temaya sahip olanlar daha genel kategoriler altında toplanmıştır. Bu kategoriler şunları içermektedir: Yanlış Görsel Algı, Doğru Nicel Algı, Yanlış Nicel Algı, Doğru Nitel Algı, Yanlış Nitel Algı.

III. BULGULAR

Bulgular katılımcıların büyük çoğunluğunun grafikler konusunda nicel bilgilere sahip olduğunu göstermektedir. Öğretmen adaylarının fonksiyon ve denklem grafiklerine kıyasla güncel yaşam durumlarını temsil eden grafikleri yorumlamada daha başarılı olduğu görülmektedir. Fonksiyon ve denklem grafiklerini anlamada çok az sayıda katılımcı nitel algılar sergilerken güncel yaşam durumlarını temsil eden grafikleri yorumlamada her iki gruptaki öğrencilerin neredeyse tamamına yakını nitel yaklaşımlar sergilemiştir. Bu kısımda öğretmen adaylarının bilgi düzeyleri beş soru üzerinden incelenecektir. Araştırmada kullanılan diğer üç soru burada sunulacak bulgularla aynı içerikte bilgiler ürettiği için bu sorulara eldeki makalede yer verilmemiştir. İlk soru katılımcılar arasında 'grafik-resim' yanılgısına sahip öğrencilerin olup olmadığını tespit etmeyi hedeflemiştir.

S1. Yandaki grafiklerden hangisi A noktasından B noktasına sabit hızla yürüyen kişin zamana karşı aldığı yolu gösterir. Cevabınızı sebepleriyle birlikte yazınız (Bell ve Janvier, 1981 den alınmıştır).



Katılımcı yanıtları ile sorunun çözümünde kullandıkları yaklaşımların sınıflara göre dağılımı aşağıdaki tabloda görülmektedir.

Tablo 1: Grafik-Resim Yanılgısına İlişkin Soruya Verilen Öğrenci Yanıtları

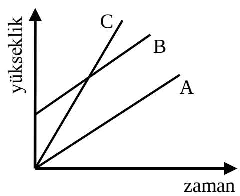
	Sınıf Öğrt.		**Fen Bil. Öğrt.**	
	Frekans	**Yüzde**	**Frekans**	**Yüzde**
Yanlış (Görsel Algı – B şıkkı)	1	5.0	1	5.0
Yanlış (Nicel Algı – A şıkkı)	3	15.0	0	0.0
Yanıt Yok	0	0.0	1	5.0
Doğru (Nitel Algı – C şıkkı)	16	80.0	18	90.0
Toplam	**20**	**100**	**20**	**100**

Tabloya baktığımızda her iki sınıftan birer öğrencinin grafik-resim yanılgısı sergilediğini görmekteyiz. Bu öğrenciler A noktasından B noktasına seyahat eden kişinin izlediği parabolik yörüngenin kendisini analitik düzleme taşıyarak görsel algının tipik bir örneğini sergilemiştir. Bu öğrencilerin yolculuğun temel parametreleri olan yol-zaman değişkenleri arasındaki doğrusal ilişkiyi grafiksel ortamda anlayamadıkları açıktır. Sınıf Öğretmenliği Bölümü öğrencilerinin %15'nin (A şıkkındaki grafiği seçen öğrenciler) yol-zaman değişkenleri arasında bir ilişkinin var olduğunu sezinledikleri ancak zamana karşı alınan yoldaki artışı grafiksel ortamda yorumlayamadıkları anlaşılmaktadır. Geri kalan öğrenciler zaman ile alınan yol arasında doğrusal bir ilişkinin olduğu düşüncesini vurgulamışlar ve bu ilişkinin en iyi C şıkkındaki grafik ile temsil edilebileceğini belirtmiştir. Verdikleri yanıtlarından bu öğrencilerin grafiğin genel gelişimi üzerinden yorumlar yaptıkları ve yol-zaman ilişkisini kurmada nitel yaklaşımlar sergiledikleri anlaşılmaktadır. Bu bilgi düzeyini yansıtan örnek bir yanıt şu şekildedir:

> *Çünkü sabit hızla hareket eden kişi zamanla aynı orantıda, [yani zamanla] doğru orantılı olarak yol alacaktır. ... (FBÖ 7[2]).*

Aşağıdaki soru öğrencilerin yükseklik-eğim yanılgısına sahip olup olmadıklarını tespit etmek ve bu yanılgıya sebep olabilecek bir grafiği yorumlarken nicel veya nitel yaklaşımlardan hangisini sergilediklerini araştırmak için kullanılmıştır. Bir önceki soruda olduğu gibi bu grafiğin de güncel yaşamla yakından alakalı olduğu açıktır.

S2. Yandaki grafikte verilen A doğrusu geniş tabanlı silindir şeklindeki bir şişeye konulan suyun zamana karşı yükselişini belirtmektedir. B ve C doğrularından hangisi silindir şeklindeki ve daha dar tabanlı bir şişeye konulan suyun zamana karşı yükselişini belirtir? Cevabınızı sebepleriyle birlikte yazınız (Bell ve Janvier, 1981 den alınmıştır).



Tablo 2 de görüldüğü üzere Sınıf Öğretmenliği Bölümünden üç öğrenci yükseklik-eğim yanılgısı sergilemiştir. Aşağıdaki örnek yanıt bu öğrencilerin grafiklerin eğimi yerine yüksekliklerine odaklandıklarını göstermektedir:

> *Cevap B grafiğidir; çünkü A ile C aynı anda ve aynı noktadan başlamıştır. B grafiği ise daha yukardan başlıyor ki buda [dar tabanlı] silindirin daha hızlı dolduğu manasına gelir (SÖB 14).*

Tablo 2: Yükseklik-Eğim Yanılgısına İlişkin Soruya Verilen Öğrenci Yanıtları

	Sınıf Öğret.		**Fen Bil. Öğrt.**	
	Frekans	**Yüzde**	**Frekans**	**Yüzde**
Yanlış (Nicel Algı, Yük.-eğim yanılgısı)	3	15.0	0	0.0
Yanıt Yok	1	5.0	0	0.0
Doğru (Nitel Algı)	17	80.0	20	100.0
Toplam	**20**	**100**	**20**	**100**

Geri kalanların ise (SÖB: 16, FBÖ: 20) istenilen bilgiye grafiklerin genel gelişimlerini yorumlayarak ulaştıkları görülmektedir. Aşağıdaki alıntıda görüldüğü üzere bu öğretmen adayları dar tabanlı silindir şeklindeki bir şişeye konulan suyun daha hızlı yükseleceğini ve bunun da orijinden başlayan daha dik bir grafikle temsil edilmesi gerektiği düşüncesini vurgulamışlardır:

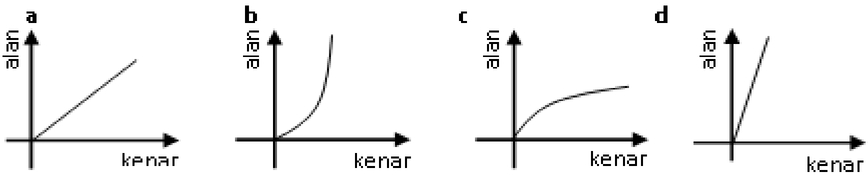
> *... B olamaz; çünkü başlangıçta içinde belli bir miktar su vardır. Ayrıca B ile A paralel gibi gözüküyor; bu da her iki şişenin aynı taban yarıçapında olduğu*

[2] **FBÖ 7:** Fen Bilgisi Öğretmenliği Bölümünden 7 numaralı öğrenciyi belirtmektedir.

manasına gelebilir. Bana göre cevap C grafiğidir; çünkü az zamanda daha çabuk yükselmiştir… (FBÖ 5).

Buraya kadar sunulan bulgulardan öğretmen adaylarının güncel yaşam durumlarını temsil eden grafikleri yorumlarken nitel yaklaşımlar sergilediği anlaşılmaktadır. Ancak, güncel yaşamla yakından alakalı olmayan, daha çok formal matematiksel düşünceler içeren grafikleri yorumlarken büyük çoğunluğun nicel yaklaşımlar sergilediği görülmüştür. Aşağıdaki soruda öğrencilerden bir karenin alanı ile kenarı arasındaki ilişkiyi temsil eden grafiği tespit etmeleri istenmiştir.

S3. Bir karenin alanı ile kenarı arasındaki ilişkiyi temsil eden grafik aşağıdakilerden hangisidir? Cevabınızı sebepleriyle birlikte yazınız.



Her iki grubun %40 lık kesimi bu soruya doğru yanıt vermiştir (bakınız, Tablo 3). FBÖ bölümü öğrencilerinin %55'i (11 öğrenci) D şıkkını işaretlemiş ve bir öğrencide soruyu boş bırakmıştır. SÖB öğrencilerinin %30'u (6 öğrenci) D şıkkındaki grafiği seçmiş ve geri kalanlar ise A ve C şıkları arasında eşit olarak dağılmıştır. Kayda değer sayıda katılımcının D şıkkındaki grafiği seçmiş olması aslında bu öğrencilerin karenin kenarı arttıkça alanının daha fazla artacağı düşüncesinin farkında olduklarını göstermektedir. Ancak, bu artışın doğrusal değil parabolik bir artış olduğu ve dolayısıyla alan-kenar ilişkisinin parabolik bir eğriyle temsil edilmesi gerektiği düşüncesini anlamada yetersiz kalmışlardır.

Tablo 3: Karenin Alanı İle Kenarı Arasındaki İlişkiyi Temsil Eden Grafiği Yorumlamada Öğrencilerin Kullandıkları Yaklaşımlar

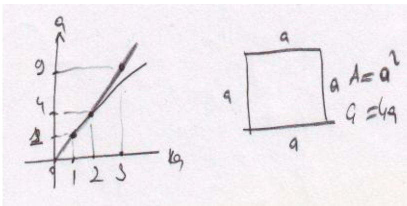
	Sınıf Öğrt.		**Fen Bil. Öğrt.**	
	Frekans	**Yüzde**	**Frekans**	**Yüzde**
Yanıt yok	0	0.0	1	5.0
Yanlış (Nicel Algı)	4	20.0	3	15.0
Yanlış (Nitel Algı)	8	40.0	8	40.0
Doğru (Nicel Algı)	3	15.0	2	10.0
Doğru (Nitel Algı)	5	25.0	6	30.0
Toplam	**20**	**100**	**20**	**100**

Nitel algı sergileyenler cebirsel veya aritmetiksel işlemler yapmadan grafiklerin genel gelişimini yorumlayarak doğru grafiği tespit etmiştir. Bu öğrenciler kenardaki artışa karşın alandaki artışın daha fazla olacağı düşüncesini açıkça vurgulamıştır. Ancak sınıflar düzeyinde nitel algı sergileyenlerin %50 den az bir kısmı bu değişimin parabolik bir grafikle temsil edilmesi gerektiği düşüncesini yakalayabilmiştir. Çoğunluk ise bu ilişkinin D şıkkındaki grafikle temsil edileceğini ifade etmişlerdir. Değişimin parabolik bir grafikle temsil edilmesi gerektiğini belirten gruba ait örnek bir yanıt şu şekildedir:

> *Çünkü alan a^2, kenar ise a birimdir. Kenar arttıkça alan daha çok artacak ve grafik böyle [b şıkkında] olduğu gibi parabolik olarak büyüyecektir (FBÖ 18).*

Nicel algı sergileyenlerin bir kısmı alan-kenar ilişkisini $A=a^2$ bağıntısıyla ile ifade edip işlemler yaparken bazıları da direkt aritmetiksel işlemlerle doğru yanıtı bulmaya çalışmıştır. Buna rağmen bu gruptaki öğrencilerin çoğunluğu yine de doğru grafiği tespit edememiştir. Öğrenci yanıtlarından bunun en temel sebebinin ölçeklendirme hatasından kaynaklandığı anlaşılmaktadır. Bu yanılgıyı içeren örnek bir yanıt Şekil 1 de görülmektedir:

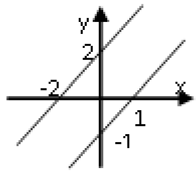
Şekil 1: SÖB1 Numaralı Öğrencinin Karenin Alanı İle Kenarı Arasındaki İlişkiyi İfade Etmek İçin Çizmiş Olduğu Grafik.



Alan-kenar ilişkisini sayısal olarak doğru ifade etmesine karşın öğrencinin eksenleri ölçeklendirirken hata yaptığı ve bu sebeple de A şıkkında verilen birinci açıortay doğrusuna benzer bir grafik çizdiği anlaşılmaktadır.

Denklemler ve fonksiyonlar gibi çok daha formal matematiksel bilgiler içeren grafikleri anlamada öğrenci gruplarının başarısında dramatik düşüşler gözlenmiştir. Aşağıdaki şekilde grafiklerle verilmiş olan birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümünü SÖB den 2 ve FBÖ bölümünden ise 4 olmak üzere toplam 6 öğrenci doğru olarak yanıtlayabilmiştir (bakınız, Tablo 4). Bunlardan ise sadece bir tanesi nitel yaklaşım sergilemiş ve doğrular paralel olduğu için karşılık gelen denklem sisteminin çözüm kümesinin boş küme olacağını belirtmiştir.

S4. Yan taraftaki doğru grafikleriyle temsil verilmiş olan denklem sisteminin çözüm kümesi hakkında ne söylersiniz? Cevabınızı sebepleriyle birlikte yazınız.



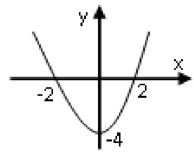
Tablo 4: Grafiklerle Tanımlanmış Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sisteminin Çözümüne İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Sınıflara Göre Dağılımı

	Sınıf Öğrt.		**Fen Bil. Öğrt.**	
	Frekans	**Yüzde**	**Frekans**	**Yüzde**
Yanıt Yok	9	45.0	3	15.0
Yanlış (Nicel Algı)	9	45.0	13	65.0
Doğru (Nicel Algı)	2	10.0	3	15.0
Doğru (Nitel Algı)	0	0.0	1	5.0
Toplam	**20**	**100**	**20**	**100**

Nicel yaklaşım sergileyenlerden bir kişi grafiklerin eksenleri kestiği noktaları – Ç={(-2,2), (-1,1)} – denklem sisteminin çözüm kümesi olarak yazmıştır. Diğerleri ise grafiklerin cebirsel formlarını bularak bunlarla işlem yapmaya çalışmıştır. Bunlar arasından da sadece 5 kişi başarılı olabilmiştir. Geri kalanlar ise grafikten cebire geçerken yaptıkları yanlışlar veya elde ettikleri denklem sistemini çözerken yaptıkları işlem hatalarından dolayı doğru sonuca ulaşamamıştır.

Fonksiyon grafiklerinin yorumlanması konusunda FBÖ bölümü öğrencilerinin SÖB öğrencilerine kıyasla daha başarılı olduğu görülmüştür. Aşağıdaki soru bu amaç için kullanılmıştır. Tablo 5 de görüldüğü üzere her iki grubun da büyük çoğunluğu soruyu çözmede başarısız olmuştur.

S5. $f(x)=x^2-4$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre $f(2x)$ fonksiyonun grafiğini (çizebiliyorsanız işlem yapmadan direkt olarak) çiziniz ve $f(x)$ e kıyasla $f(2x)$ in grafiği nasıl bir şekil alır, yorumlayınız.

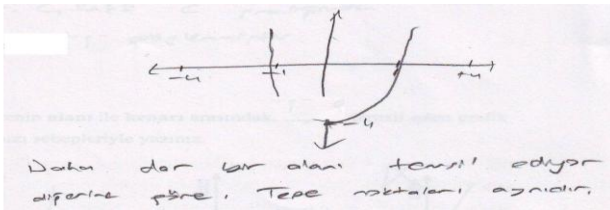


Tablo 5: İkinci Dereceden Bir Fonksiyon Grafiğine İlişkin Öğrenci Yanıtlarının Ve Sorunun Çözümünde Kullandıkları Yaklaşımların Sınıflara Göre Dağılımı

	Sınıf Öğrt.		**Fen Bil. Öğrt.**	
	Frekans	**Yüzde**	**Frekans**	**Yüzde**
Yanıt yok	15	75.0	9	45.0
Yanlış (Nicel Algı)	3	15.0	1	5.0
Yanlış (Nitel Algı)	0	0.0	3	15.0
Doğru (Nicel Algı)	2	10.0	5	25.0
Doğru (Nitel Algı)	0	0.0	2	10.0
Toplam	**20**	**100**	**20**	**100**

Doğru yanıtların çoğu nicel yaklaşımları içermektedir (SÖB: %10, FBÖ: %25). Bu öğrencilerin tamamı $f(x)=x^2-4$ fonksiyonunda x yerine $2x$ yazıp $f(2x)=4x^2-4$ fonksiyonunu elde etmişler, daha sonrada tepe noktasını ve x eksenini kestiği noktaları bularak fonksiyonun grafiğini çizmişlerdir. FBÖ bölümünden sadece 2 öğrenci nitel yaklaşım sergilemiş, hiçbir cebirsel veya aritmetiksel işlem yapmadan *f(2x)* in grafiğini çizmiştir. Yazılı yanıtlarından bu öğrencilerin ‘girdi iki katına çıktığı için *f(2x)* fonksiyonunun *f(x)*’e kıyasla daha büyük değerler üreteceği dolayısıyla da tepe noktası aynı kalmak şartıyla *f(2x)* in grafiğinin *y* eksenine daha yakınlaşacağı düşüncesine hâkim oldukları’ anlaşılmaktadır. Grafik çiziminde nitel algının nasıl kullanıldığına dair örnek bir yanıt aşağıda verilmiştir:

Şekil 2: *f(2x)* Fonksiyonunun Grafiğini Çizerken FBÖ 8 Numaralı Öğrenci Tarafından Kullanılan Nitel Yaklaşım Örneği



TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada öğretmen adaylarının güncel yaşam durumları ile fonksiyon ve denklem gibi formal matematiksel kavramların temsilinde kullanılan grafikleri anlama düzeyleri *görsel algı*, *nicel algı* ve *nitel algı* düşünceleri ışığında incelenmiştir. Kişinin bir konuda bilgi sahibi olması o konuyu çok güzel öğreteceği manasına gelmez; ancak kişinin bilmediği veya bilgi eksikliği yaşadığı bir konunun öğretiminde etkin olamayacağı da bir gerçektir. Bu sebeple öğretmen adaylarının öğretecekleri konularda ileri düzey bilgi sahibi olmaları gerekir. Grafikler konusunda ileri düzey bilgi sahibi olmanın göstergesi ise bu tür gösterimleri global düzeyde anlayabilmektir. Nitel bilgi olarak adlandırdığımız bu bilgi türü resmin ötesine geçip grafiğe manasını veren kavram ve bağıntıların ve bunların analitik düzlemdeki gelişimlerinin daha genel ve bütüncül bir yaklaşımla anlaşılmasını içerir. Uzamsal düşünce (spatial thinking) içeren bu bilgiyi edinmiş bireyler için grafikler temsil ettikleri manalarla birlikte artık tek bir matematiksel obje haline gelmiştir (Sfard, 1992). Bu objeler üzerinde istedikleri gibi işlemler yapabilir ve bunları yeni süreçlerde rahatlıkla kullanabilirler (a.g.e). Nitel bilginin bir diğer önemli bileşeni ise grafikler ile cebirsel gösterimler arasındaki anlamsal ilişkileri görebilmek ve bunlardan biri üzerinde yapılacak değişikliklerin diğerindeki yansımalarını zihinde canlandırabilmeyi içerir.

Genel olarak, eldeki çalışmanın sonuçları öğretmen adaylarının grafikleri anlama ve yorumlamada görsel algı düzeyinin ötesine geçmiş olduklarını ve büyük çoğunluğun bu konuda nicel bilgilere sahip olduğunu göstermektedir. Nicel bilgiler edinmiş olanların ise sahip oldukları bilginin kalitesi noktasında sıkıntılar yaşadıkları görülmektedir. Bu sıkıntılar temelde cebirsel ve grafiksel gösterimler arasındaki geçişler ile ölçeklendirmeden kaynaklanan zorlukları içermektedir. Az sayıda da olsa bazı öğrencilerin yükseklik-eğim yanılgısına düştükleri de görülmüştür.

Çalışmanın en çarpıcı sonucu öğretmen adaylarının çok büyük bir kısmının denklem ve fonksiyon grafikleri konusunda nitel bilgilerden yoksun oldukları gerçeğidir. Örneğin, 40 öğrenciden sadece 1 tanesi 'paralel doğrularla temsil edilen bir denklem sisteminin çözüm kümesinin boş küme olduğu' bilgisine verilen grafiğin genel yapısını yorumlayarak ulaşabilmiştir (bakınız Tablo 4). Benzer şekilde, FBÖ bölümünden sadece 2 öğrenci $f(x)=x^2-4$ ün grafiğinden hareketle $f(2x)$ in grafiğini nitel yaklaşımla çizebilmiştir (bakınız Tablo 5). Bu durumun öğretmen adaylarının almış oldukları eğitim ile alakalı olduğunu düşünmekteyiz. Öğretmenlik tecrübesi olanların bileceği gibi İlköğretim ve Lise düzeyindeki okullarda hala yaygın olarak kullanılan geleneksel öğretim yaklaşımları öğrencilerin nicel bilgiler geliştirmelerini amaçlamaktadır. Bu öğretim yaklaşımları grafiklerle noktasal bağlamda ilgilenmeyi gerektiren (verilen grafik üzerinden değer okuma etkinlikleri, vb.) veya cebirsel olarak verilen denklem ve bağıntıların yine noktasal yaklaşımlarla grafiklerini çizmeyi öngören etkinlikleri ön plana çıkarmakta ve bunlara vurgu yapmaktadır. Son yıllarda lise müfredatında (MEB, 2005) ve ders kitaplarında nitel yaklaşımlar gerektiren sorulara yer verilse de uygulama sürecinde olayın bu yönü göz ardı edilmekte, mekaniksel bilgi ve yaklaşımlarla sorular çözülmektedir. Örneğin, '$f(x)=ax^2$ nin grafiği y ekseni boyunca b birim ötelenerek $f(x)=ax^2+b$ nin grafiği elde edilir' bilgisi bir kural olarak aktarılmaktadır. Ancak, $f(x)$'e eklenilen b değerinin bu fonksiyonda ne tür bir değişikliğe sebep olacağı ve neden $f(x)=ax^2$ nin grafiğinin y ekseni boyunca b birim ötelenmesi gerektiği noktalarına açıklık getirilmemekte ve nitel algının gelişimi için gerekli olan bilgiler üzerinde öğrenciler düşünmeye zorlanmamaktadır. Denklemler konusu da daha çok cebir bağlamında ele alınmaktadır. 'Denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme ise bu denklemleri temsil eden doğrular paraleldir' gibisinden teorik bilgiler bir kural olarak aktarılmaktadır; ancak öğrencilerin bu bilgileri grafiksel ortamda tecrübe etmelerine fırsat tanınmamaktadır. Bu noktada eldeki çalışmanın örneklem uzayının öğretmen adaylarından oluştuğunu ve bu öğrencilerin Temel Matematik ve Genel Matematik dersleri kapsamında her iki konuyu detaylı bir şekilde okuduklarını belirtmek isteriz. Bu gerçeğe rağmen katılımcıların büyük bir kısmının denklem ve fonksiyon grafikleri konusunda nitel bilgiler geliştiremedikleri görülmektedir. Bu ise bizleri lisans düzeyinde verilen matematik eğitiminin içerik açıdan liselerde verilen eğitimden çokta farklı olmadığı sonucuna götürmektedir.

Çalışmanın bir diğer önemli sonucu ise öğrencilerin güncel yaşamla ilişkili grafikleri yorumlamadaki başarılarıdır. Her iki gruptaki öğrencilerin neredeyse tamamına yakını resim-grafik yanılgısı ve eğim-yükseklik yanılgısı içeren grafikleri yorumlamada nitel yaklaşımlar sergilemiştir (bakınız, Tablo 1 & Tablo 2). Bu grafiklerin her ikisi de esas itibariyle birer fonksiyon grafiğidir. Birinci grafikte yol, zaman değişkeninin fonksiyonu iken ikinci grafikte dar tabanlı silindir şeklindeki kaba konulan suyun yükselişi yine zaman değişkeninin bir fonksiyonudur. Öyleyse, formal bilgiler içeren fonksiyon grafiklerine kıyasla güncel yaşam durumlarını temsil eden fonksiyon grafiklerini yorumlamada öğrencilerin nitel yaklaşımları başarıyla sergilemelerinin sebebi nedir? Bu sorunun cevabının Roth ve Bowen'ın (2001, s. 189) "bağlamsal boyut" diye ifade ettiği ve 'kişinin temsil edilen olay ve gösterimsel araç ile yoğun etkileşim içerisinde bulunması' diye açıklayabileceğimiz kontekst olgusuyla yakından alakalı olduğunu söyleyebiliriz. Öğrenciler söz konusu grafiklerin temsil ettiği olay ve durumlarla güncel yaşamlarında sıkça karşılaşmakta ve bunları tecrübe etme olanağı bulmaktadırlar. Bu durum öğrencilerin verilen grafikleri daha global düzeyde anlamalarını kolaylaştırmış olabilir. Yol-zaman ve yükseklik-eğim yanılgılarını içeren grafikleri yorumlamada FBÖ bölümü öğrencilerinin SÖB öğrencilerine kıyasla az farkla da olsa daha başarılı olduklarını görmekteyiz (bakınız, Tablo 1 & Tablo 2). Bu durumda yine kontekst gerçeğinin önemine işaret etmektedir; çünkü FBÖ bölümü öğrencileri Fizik, Kimya ve Biyoloji gibi derslerde güncel yaşam durumlarının grafiksel gösterimlerine ilişkin daha çok bilgi ve deneyim edinme olanağı bulmaktadır.

Matematiksel bilgi eksikliğinin grafik okuma ve yorumlamada başarısızlıklara sebep olduğu bilinmektedir (Kieran, 1992; Capraro, v.d., 2005). Eldeki çalışmada öğrencilerin matematiksel bilgi eksikliği yaşamadıkları konularla alakalı grafikleri yorumlarken de zorlandıkları görülmektedir. Üniversite öğrencilerinin karenin alanı ile kenarı arasındaki ilişkiyi bilmemeleri mümkün değildir; nitekim bizim bulgularımızda bunu göstermektedir. Fakat her gruptaki öğrencilerin sadece %40 lık bir kesimi bu ilişkiyi temsil eden grafiği doğru olarak bulabilmiştir (bakınız, Tablo 3). Bu oran sorunun çözümünde kullanılan nicel ve nitel yaklaşımların toplamını içermektedir. Ayrıca nicel yaklaşım sergileyenlerin büyük bir kısmı da soruyu çözmede başarısız olmuştur. Bu sonuçlar öğretmen adaylarının matematiksel bilgiden daha çok grafiğin görsel özelliklerini anlama ve bunlar ile temsil ettikleri manaları ilişkilendirmede sıkıntı yaşadıklarına işaret etmektedir ki SÖB1 numaralı öğrencinin çizmiş olduğu ve ölçeklendirme hatası içeren grafik bunun tipik bir göstergesidir (bakınız, Figür 1).

Netice olarak, öğretmen adaylarının fonksiyon ve denklem grafikleri konusunda nitel bilgilerden yoksun olduğunu göstermektedir. Bu eksikliğin giderilmesi için grafikte değer okumak ve cebirsel olarak verilen denklem veya bağıntıların grafiklerini noktasal yaklaşımlarla çizmek gibi nicel bilgi ve becerilerin gelişimini hedefleyen etkinliklerin yeterli olmayacağını vurgulamak isteriz. Özellikle üniversite düzeyindeki öğrencilerin nitel bilgiler geliştirebilmeleri için grafiklerin genel yapısını ve gelişimini anlamayı ve temsil ettikleri fonksiyonel ilişkileri global düzeyde yorumlamayı gerektiren etkinlikler üzerinde çalıştırılması önem arz etmektedir. Bir veri dizisi verilip veya değişkenler tanımlanıp öğrencilerden bunlar arasındaki ilişkiyi temsil eden grafiğin genel özellikleri ve analitik düzlemdeki gelişiminin nasıl olabileceği konusunda yorumlar yapmaları istenilebilir. Bu tür uygulamalar yapılırken grafiklerin bir bağlam etrafında sunulmasının ve güncel yaşamdan aşina oldukları durumların seçilmesinin öğrencilerdeki nitel bilginin gelişimini kolaylaştıracağı unutulmamalıdır (Dugdale, 1993). Ayrıca, bu amaç için grafik hesap makineleri (graphic calculator) ve etkileşimli bilgisayar programları gibi öğretim teknolojilerinden de yararlanılabilir.

Bu tür teknolojilerin yapılandırmacı öğretim yaklaşımları çerçevesinde etkin kullanımının öğrencilerin grafiklerin genel yapısını ve gelişimini anlamalarının yanı sıra grafikler ile diğer gösterimler arasındaki anlamsal ilişkileri global düzeyde kavramalarını da kolaylaştırdığı bilinmektedir (Kieran, 1992; Smart, 1995; Schwarz ve Dreyfus, 1995; Keller ve Hirsch, 1998).

Son olarak, eldeki çalışmanın Fen Bilgisi ve Sınıf Öğretmenliği bölümlerinde okuyan sınırlı sayıda öğretmen adayı üzerinde yapıldığını hatırlatmak isteriz. Katılımcı sayısının az olması bulguların genellenebilirliğini azaltmaktadır. Farklı üniversitelerde öğrenim gören daha geniş bir örneklem üzerinde mevcut çalışmanın bir benzeri tekrarlanabilir. Veri toplama tekniği olarak yazılı sınavın yanı sıra yarı-yapılandırılmış veya klinik mülakatlar kullanılabilir ve istatistiksel verilerin sunumunda kullanılan grafiklerde çalışma kapsamına dâhil edilebilir. Yapılacak böyle bir çalışmanın öğretmen adaylarının grafikler konusundaki bilgi düzeylerine ilişkin daha zengin bilgi ve bulgular üreteceğini belirtmek isteriz.

Kaynakça

Bell, A., & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics, 2(1),* 34-42.

Brasell, H. M., & Rowe, M. B. (1993). Graphing skills among high school physics students. *School Science and Mathematics,* 93(2), 63-70.

Capraro, M. M., Kulm, G., & Capraro, R. M. (2005). Middle grades: Misconceptions in statistical thinking. *School Science and Mathematics, 105(4),* 165-174.

Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(2),* 77-87.

Connery, K. F. (2007). Graphing predictions. *Science Teacher, 74(2),* 42-46.

Dugdale, S. (1993). Functions and graphs: Perspectives on students thinking. In T. A. Romberg, E. Fennema, and T. P. Carpenter (Eds.) *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions* (pp. 101-130). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dunham, P. H., & Osborne, A. (1991). Learning how to see: Students' graphing difficulties. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 13(4),* 35-49.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavior, 17(1),* 105-121.

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32,* 124–158.

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *38(1),* 111-133.

Kaput, J. J. (1995). Creating cybernetic and psychological ramps from the concrete to the abstract: Examples from multiplicative structures. In D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West, & M. S. Wiske (Eds.), *Software Goes to School: Teaching for Understanding with New Technologies* (pp. 130-154). New York: Oxford University Press.

Keller, B. A., & Hirsch, C. R. (1998). Student preferences of representations of functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 29(1),* 1-17.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

Kramarski, B. (2004). Making sense of graphs: Does metacognitive instruction make a difference on students' mathematical conceptions and alternative conceptions? *Learning and Instruction, 14,* 593-619.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, 60(1),* 1-64.

Markovits, R., Eylon, B. S., & Brukheimer, M. (1986). Function's today and yesterday. *For the Learning of Mathematics, 29(1),* 18-28.

MEB (2005). *Orta öğretim matematik (9,10,11 ve 12. sınıflar) dersi öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

Mevarech, Z. R., & Kramarsky., B. (1997). From verbal descriptions to graphic representations: Stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 229-263.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis (An Expanded Sourcebook)*. London: Stage Publication.

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 175-194). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Roth, W. M., & Bowen, G. M. (2001). Professionals read graphs: A semiotic analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 32(2)*, 159-194.

Schwarz, B., & Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. *Educational studies in mathematics, 29(3),* 259-291.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and quandary of reification – The case of function. In G. Harel & Ed. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 59-85). United States of America: Mathematical Association of America.

Shah, P., & Hoeffner, J. (2002). Review of graph comprehension research: Implications for instruction. *Educational Psychology Review, 14(1),* 47-69.

Slavit, D. (1994). The effect of graphing calculators on students' conceptions of function. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 374 811).

Smart, T. (1995). Visualising quadratic functions: A study of thirteen years old girls studying mathematics with graphic calculators. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceeding of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (*v. 2*, pp. 272-279). Brazil: Atual Editors Ltd.

Stake, R. E. (1995). *The Art of Case Study Research*. London: Stage Publication.

Tairab, H. H. & Al-Naqbi, A. K. (2004). How do secondary school science students interpret and construct scientific graphs? *Journal of Biology Education, 38(3),* 127- 132.

Yin, R. K. (2003). *Case Study research: Design and methods*. United Kingdom: Sage Publications Ltd.

Prospective Teachers' Understanding of Graphs

I. Introduction

A substantial body of research has been conducted to examine students' understanding of Cartesian graphs (Bell & Janvier, 1981; Leinhardt et al, 1990; Kieran, 1992; Mevarech & Kramarsky, 1997; Even, 1998; Friel, et al., 2001; Kramarski, 2004), and these studies indicated that students from elementary school to undergraduate level have serious difficulties in understanding graphical representations of mathematical notions. Several students possess an *iconic interpretation* in that they construe a graph of a situation as a literal picture of that situation (Bell & Janvier, 1981; Clement, 1989; Slavit, 1994). Some students reveal *interval-point confusion* (Bell & Janvier, 1981; Leinhardt, et al, 1990; Monk, 1992; Dugdale, 1993) because they focus upon a certain point(s) when a range of points (an interval) needs to be considered to solve the problem at hand. Some others display *slope-height confusion* (Bell & Janvier, 1981; Clement, 1989; Roth & Bowen, 2001) since they concentrate upon maxima or minima of a graph instead of its gradient, or they do the reverse. Many students show *scale misconception* in that they lack the ability to think of inclination and shape of a graph in relation to the scales of the axes on which the graph is constructed. This causes students' failure at reading and sketching graphs of mathematical relations (Dunham & Osborne, 1991). Another area of difficulty includes connections between graphs and other representations including algebraic expressions (Brasell & Rowe, 1993). Transfer from algebra to graph is easier than the reverse way if the situation is familiar to the students. If the situation is sophisticated students have difficulty moving either way. For instance, the study of Even (1998) indicated that only 14% of 152 prospective teachers were able to shift from an algebraic to a graphical form of a quadratic function so that they could work out the number of solutions that the corresponding equation had. This study aims to investigate prospective teachers' understanding of Cartesian graphs related to real life situations and mathematical concepts.

II. Research Method

The research employed a qualitative inquiry (Stake, 1995). It was carried out with 40 prospective teachers from ESED[3] (20 students) and PTED (20 students). Data were collected through written exam which included 8 open-ended questions in total. The method of content analysis (Miles & Huberman, 1994; Stake, 1995) was used to analyze the students' written responses. Students' exams papers were photocopied and the analysis was carried out on these documents. Derived from the literature (Bell & Janvier, 1981; Leinhardt et al, 1990; Kieran, 1992; Even, 1998; Connery, 2007) three notions were used as a theoretical framework for the data analysis and these include: *iconic interpretation, quantitative interpretation, and qualitative interpretation*. An *iconic interpretation* refers to a conception of a

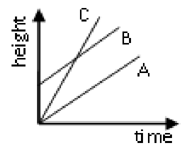
[3] **ESED:** Elementary Science Education Department, **PTED:** Primary Teacher Education Department.

graph simply as a as a picture. Students possessing an *iconic interpretation* have no understanding of the meaning behind the graph at all. *Quantitative interpretation* enables students to deal with a graph point by point. They can read values of a graph at a certain point(s) or make manipulation, algebraic or otherwise, to tease out the meaning in the situation. *Qualitative interpretation* entails an understanding of a graph in a global way. With this quality of understanding students could tease out the meaning from the development and general features of a graph. Guided by these notions the first stage of analysis included attributing codes (brief descriptions) to the students' responses. These codes included, for instance: Making Arithmetical Operations, Using Tables, and Making Algebraic Operations. Repeated on different copies of the students' exam papers this process led to creation of five major categories which are presented in the following section.

III. Research Findings

The results indicated that prospective teachers' understanding of graphs fluctuated in accord with the situations. They displayed qualitative interpretation when graphs are related to real life situations, yet they revealed quantitative interpretation when they represented mathematical concepts including functions and equations. Responding to the following question 3 students from PTED revealed slope-height misconception and 1 from the same class gave no answer.

Q1. The graph A represents a jar being filled with water. Which of the graphs B and C represent a narrower jar being filled with water? Give your answer with the underlying reason (Derived from Bell & Janvier, 1981).

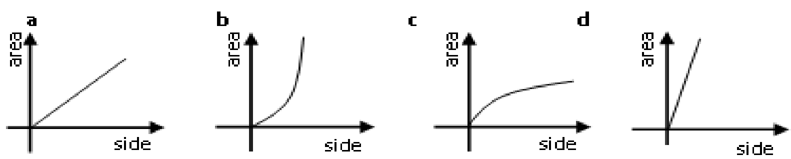


80% of PTED and 100% of ESED obtained the correct answer by interpreting the development and the general features of the graphs. The following indicates the quality of understanding that the students in this group displayed:

> *It is not B, because it contains some water at the beginning… I believe that the correct answer is graph C, because it rises faster than [than graph A]…(ESED 5[4]).*

Almost all the students were aware of the relation that *area of a square is a function of its side*; nevertheless, only 40% of each group gave correct answer to the question:

Q2. Which of the following graphs represent the relationship between the area and a side of a square? Give your answer with the underlying reason.



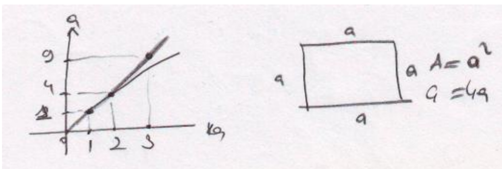
[4] **ESED 5** indicates 5th student from Elementary Science Education Department.

25% of PTED and 30% of ESED displayed qualitative interpretation. These students were able to think of the relationship between *area and a side of a square* in association with the development of the graph in Item b. For instance, one student said:

> *... The area of a square increases more compared to increase in its side; thus the graph should take a parabolic shape like this one [Item b]... (ESED 18).*

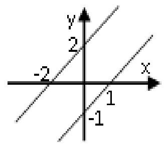
30% of PSTED and 55% of ESED displayed quantitative approach and chose Item-d. These students expressed that '*there is a direct proportion between the area of a square and the square of its side*', yet they were unable to see that this relation could be best represented with a parabola, not with a straight line. Possession of *scale-misconception* was also among the reasons that caused some students to produce incorrect answer (see Figure 1).

Figure 1: Written responses of PTED 1



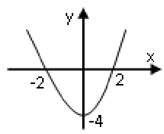
Students' success declined further when they were asked to deal with the graphs of equations and functions. Three students from each group obtained correct answer for the following question:

> **Q3.** The graphs on the right side represent an equation system. What do you think about the solution of this system? Give reason to your answer.



Of them, one student from ESED indicated a qualitative interpretation and stated that since the graphs are parallel to each other the equation system has no solution. Five students employed quantitative approach in that they worked out algebraic forms of the equations and, then, made manipulations to get the answer. Rest of the students gave incorrect answer. Only two students from ESED displayed qualitative interpretation when they were asked:

> **Q4.** Given the graph of $f(x)=x^2-4$ on the right side sketch the graph of *f(2x)*. What would you say about general features and the development of the graph of *f(2x)* comparing to that of *f(x)*.



Seven students (PTED: 2, ESED: 5) resolved the problem through quantitative approach by working out, first, the algebraic form of *f(2x)* and then sketching its graphical form. The remaining gave no response (PTED: 90%, ESED: 65%) or produced incorrect answer.

IV. Discussion and Conclusion

This study indicated that the majority of the prospective teachers did not have a proper understanding of Cartesian graphs. Their conceptions fluctuated in accord with the contexts that the graphs are related to. They revealed qualitative interpretation when a graph is associated with a real life situation. Most of them were unable to tease out information from general feature and the development of a graph when the graph represented mathematical concepts including equations and functions. Students' lack of mathematical knowledge has been cited as a crucial factor that has negative impacts on their understanding of the graphs (Kieran, 1992; Friel et al, 2001; Capraro et al, 2005). In this study only 40% of each group was able to identify the graph of a relation between the area and the side of a square. This suggests that students might have difficulties at interpreting a graph even though they have a strong understanding of a mathematical notion that the graph represents. It is suggested, therefore, possession of a mathematical knowledge is essential but not sufficient to interpret graphs of mathematical notions. Students need to have knowledge concerning technical aspects of a graph, such as visual properties and general features of graphs. More importantly, they need to develop relational understanding to establish connections between a mathematical notion and the visual properties of its graphical form.

In closing, prospective teachers' lack of understanding of Cartesian graphs might have relations with the quality of education that they received. Thus, it is suggested that educators should enforce the development of students' qualitative interpretations through conceptually focused and cognitively challenging tasks. Starting with the graphs of real life situations might be a good strategy to achieve this goal (Dugdale, 1993). Inclusion of instructional technologies could also help students not only to understand development and general features of a graph but also to construe interrelations between graphs and other representations including algebraic expressions (Kieran, 1992; Smart, 1995; Schwarz & Dreyfus, 1995; Keller & Hirsch, 1998).