Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi (http://sbe.gantep.edu.tr)
2010 9(3):697 -723 ISSN: 1303-0094

Öğretmenlerin Fonksiyon Kavramı ve Öğretimine İlişkin Pedagojik Görüşleri

Teachers' Pedagogical Indications about The Concept of Function and Its Teaching

İbrahim Bayazıt[*] ve Yılmaz Aksoy**
Erciyes Üniversitesi

Özet

Bu araştırmada öğretmenlerin fonksiyonlar konusunda sahip oldukları pedagojik alan bilgileri iki boyutu itibariyle incelenmektedir. Araştırmanın örneklem uzayı meslekte yeterli tecrübeye sahip iki öğretmenden oluşmaktadır. Veri toplama ve analiz aşamalarında, nitel araştırma yönteminin araçları kullanılmış ve çalışmaya teorik alt yapı oluşturmak üzere Shulman (1986) tarafından geliştirilmiş olan 'pedagojk alan bilgisi' düşüncesinden yararlanılmıştır. Çalışmanın bulguları öğretmenlerin, öğrencilerinin fonksiyon kavramını öğrenirken karşılaştıkları zorluklar ve geliştirdikleri kavram yanılgılarını teşhis etme ve bunların zihinsel sebeplerini anlamada oldukça benzer düşüncelere sahip olduklarını, ancak bu zorlukların ve yanılgıların giderilmesi için farklı öğretim yaklaşımları sergilediklerini göstermektedir.

Anahtar kelimeler: Pedagojik alan bilgisi, fonksiyon kavramı, sabit fonksiyon, ters fonksiyon, parçalı fonksiyon.

Abstract

This paper examines two aspects of teacher's pedagogical content knowledge within the function context. The participants were two experienced mathematics teachers. The research employed a qualitative case study using semi-structured interviews as the main source of data. Data was analysed using qualitative methods which included content and discourse analysis methods. The notion of 'pedagogical content knowledge' provided a theoretical framework for the study. The research findings indicated that there was no difference between the teachers in diagnosing their students' diffculties and misconceptions with the function concept and their sources; yet the teachers differed remarkably in proposing pedagogical treatments to help their students overcome these obstacles.

Key words: Pedagogical content knowledge, function concept, constant function, inverse functon, piecewise function.

** Yrd. Doç. Dr., Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi A.B.D.*
E-mail: ibayazit@erciyes.edu.tr
*** Yrd. Doç. Dr., Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Matematik Eğitimi A.B.D.*
E-mail: yaksoy@erciyes.edu.tr

I. GİRİŞ – LİTERATÜR TARAMASI

Fonksiyon kavramı matematik ders programlarının temelini teşkil etmekte ve matematik konuları arasında bütünlüğü sağlama gibi önemli bir işlev görmektedir (Yerushalmy ve Schwarz, 1993). Matematik ders programlarında öğrenciler iki farklı fonksiyon düşüncesiyle karşılaşırlar. Bunlardan birincisi fonksiyonu iki değişken arasındaki ilişki (bağımlılık) olarak kabul eden düşüncedir. Bu anlayış fonksiyonu x gibi bağımsız bir değişkendeki değişime (artma veya azalmaya) karşın y gibi bağımlı bir değişkende meydana gelen değişim olarak kabul etmektedir. İkinci düşünce tarzı ise fonksiyonu bir kümeden başka bir kümeye eleman eşleyen özel bir bağıntı olarak tanımlamaktadır. Bu yaklaşım, fonksiyonu tanım ve değer kümelerinden bağımsız tek bir matematiksel varlık olarak algılamakla birlikte tanım ve değer kümelerini fonksiyonun ayrılmaz parçaları olarak kabul etmektedir. Buna ilaveten, bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için iki temel özelliği sağlaması gerektiği şartını koşmaktadır. Bu özelliklerden birincisi (univalence condition) 'tanım kümesindeki **her elemanın**, değer kümesinde **bir ve yalnız bir elemana** eşlenmesi' şartını içermektedir (Malik, 1980). İkinci özellik (arbitrariness condition) ise 'bir fonksiyonun iki kümenin elemanları arasındaki eşlemeyi aritmetiksel veya cebirsel bir kural aracılığıyla yapmak zorunda olmadığı, bu eşlemeleri tamamen gelişigüzel bir şekilde yapabileceği' düşüncesini içermekte ve tanım ve değer kümelerinin elemanlarının da her türlü varlıklar olabileceği açılımını getirmektedir (a.g.e). Yukarıda bahsedilen iki farklı algılanış biçiminin yanısıra fonksiyon en geniş manasıyla, dönüştürme yapan dinamik bir mekanizma (girdileri çıktılara dönüştüren bir süreç) olarak düşünülebilir.

Öğrenciler gerek güncel yaşamlarında gerekse ilköğretim matematik programlarında yukarıda bahsedilen fonksiyon düşünceleriyle karşılaşmakta ve bu düşünceleri içeren çok sayıda uygulama ve problem çözümleri yapmaktadırlar. Öğrenciler, daha okula başlamadan her kişinin bir doğum gününün olabileceği, her ülkenin bir tane başkentinin olabileceği ve her insanın bir tek kan grubuna sahip olabileceği bilgilerini geliştirmektedirler ki bu bilgiler esas itibariyle eşleme mantığı üzerine inşa edilmiş olan fonksiyon düşüncesinin özünü teşkil etmektedir. Doğal sayılar kümesinde dört işlem konusunu öğrenen öğrencilerin farkında olmadan fonksiyon kavramıyla uygulamalar yaptıkları da söylenilebilir (Eisenberg, 1991); çünkü $2+3=5$ işlemini düşünecek olursak bu işlemdeki toplam operatörü (+) IR den iki elemanı almakta ve bu elemanları belli bir işlem sürecinden geçirdikten sonra 5 gibi yeni bir elemana dönüştürmektedir. Benzer şekilde birçok geometrik düşüncenin doğasında da fonksiyon düşüncesinin var olduğunu söyleyebiliriz. Simetri ekseni bir geometrik şekli bir bölgeden başka bir bölgeye yansıtmak (dönüştürmek) suretiyle bir fonksiyon işlevi görmektedir; dolayısıyla ilköğretim yıllarında simetri kavramını öğrenen öğrencilerin, eşzamanlı olarak fonksiyon düşüncesini de geliştirmeye başladıkları söylenilebilir.

Öğrencilerin güncel hayattan ve ilköğretim matematik programlarından edindikleri bu bilgiler lise matematik programları kapsamında okutulan formal fonksiyon kavramının temelini oluşturmaktadır. Aslında, Lise-I düzeyinde okutulan matematik programlarında öğrenciler geçmişten getirdikleri fonksiyon bilgilerine formal bir boyut kazandırmakta ve ileriki yıllarda da bu kavramı çok daha detaylı bir şekilde öğrenmeye devam etmektedirler. Üniversite düzeyinde ise matematik, fizik ve mühendislik gibi farklı alanlarda eğitim gören öğrenciler lise yıllarında edinmiş oldukları fonksiyon bilgilerini geliştirerek kullanmaya devam etmektedirler.

Güncel hayatta ve matematik ders programlarında geniş bir yer tutan fonksiyon kavramı özü itibariyle basit bir matematiksel düşüncedir. Ancak fonksiyonlar konusunu anlamada öğrencilerin oldukça zorlandıkları ve bu düşünceye ilişkin çok sayıda kavram yanılgısı geliştirdikleri bilinmektedir (Vinner, 1983; Dubinsky ve Harel, 1992). Fonksiyonlar konusunun sabit fonksiyon, ters fonksiyon ve parçalı fonksiyon gibi alt kavramları içeriyor olması ve fonksiyon kavramının sunumunda cebirsel ifadeler, grafikler, liste biçiminde yazılımlar, Venn-şemaları ve tablolar gibi farklı temsillerin kullanılıyor olması bu basit düşünceyi zorlaştıran temel faktörler olarak kabul edilmektedir (Eisenberg, 1991).

Fonksiyonlar konusunda öğrenci zorluklarını ve kavram yanılgılarını inceleyen çok sayıda çalışma bulunmaktadır (Vinner, 1983; Markovits, v.d., 1986; Breidenbach v.d., 1992; DeMarois ve Tall, 1996; Bayazit ve Gray, 2004). Bu çalışmalar incelendiğinde öğrencilerin asıl zorluğu fonksiyon kavramının sunumunda kullanılan temsillerin görsel özelliklerini aşıp bu temsillerin arkasında var olan fonksiyon düşüncesine ulaşmada ve bu soyut düşünceyi anlamada yaşadıkları görülmektedir. Manadan daha ziyade temsillerin görsel ve biçimsel özelliklerine yoğunlaşan öğrenciler fonksiyon kavramına ilişkin eksik ve yanlış bilgiler geliştirmektedirler. İlerleyen zamanlardada edindikleri bu eksik ve yanlış bilgilerin doğru olduğu gibisinden çok güçlü kanaatler ve düşünceler geliştirmektedirler. Epistemolojisi ve doğası itibariyle yanlış veya eksik olan ancak öğrenciler tarafından doğru kabul edilen bu düşünce ve algılar ise kavram yanılgıları olarak adlandırılmaktadır. Birçok öğrenci fonksiyonlar konusunu öğrenirken fonksiyonun tanımında vurgulanan manayı değil, bu kapsamda kullanılan örnekler, temsiller ve cebirsel kurallar arasından kendi düşünce yapılarıyla uyuşan prototipleri zihinlerine kodlamaktadırlar. Fonksiyonlarla ilgili problem çözümleri yaparken de fonksiyonun tanımıyla (kavram tanımı) değil de zihinlerine kaydetmiş oldukları prototipler – ki bu prototipler bir tür kavram imajlarıdır – ile hareket etme eğilimi göstermektedirler (Vinner, 1983); bunun sonucu olarak da başarısızlık yaşamaktadırlar.

Birçok öğrenci fonksiyonu içerisinde x ve y gibi değişkenler bulunan cebirsel ifadeler olarak düşünmektedir. Bu tür yanılgılar her şeyden önce öğrencilerin fonksiyon kavramının en temel iki özelliğinden biri olan 'bir fonksiyonun gelişigüzel eşleme yapabileceği (arbitrariness condition) ve dolayısıyla fonksiyonun cebirsel veya aritmetiksel bir kuralla tanımlanmak zorunda olmadığı' düşüncesini anlamamış olduklarını gösterir. Fonksiyonu içerisinde x ve y ler bulunan cebirsel bir formül olarak düşünen öğrenciler sabit fonksiyonların cebirsel formlarını, örneğin $y=3$, ya reddetmekte ya da ortamda gizli bir şekilde bulunan ve tanım kümesindeki tüm elemanları değer kümesinde aynı elamana dönüştüren fonksiyon sürecini anlamada büyük güçlükler yaşamaktadırlar (Tall ve Bakar, 1992).

Bir fonksiyon grafiğinin düzgün ve sürekli bir eğri veya doğru olması gerektiği düşüncesi öğrenciler arasında oldukça sık rastlanılan bir başka kavram yanılgısıdır (Vinner, 1983). Bu tür kavram yanılgısına sahip olan öğrenciler ayrık noktalardan veya eğri parçalarından oluşan parçalı fonksiyon grafiklerini genellikle reddetmektedirler (Breidenbach v.d., 1992). Cebirsel yazılımlarındaki benzerlikten dolayı bazı öğrencilerin fonksiyon ve denklemi aynı şeyler olarak düşündükleri ve bu kavramlar arasında var olan mana farkını anlamada hayli zorlandıkları da bilinmektedir (Even, 1988). Bir kısım öğrenciler ise ters fonksiyon kavramının mantığını *ters işlem kuralına* (cebirsel veya aritmetiksel işlemler zincirinin sondan başa doğru çözümlenmesi) indirgemektedirler. Bu bu kısıtlı algının sonucu olarak da daha karmaşık sorularla karşılaştıklarında (örneğin, grafiksel olarak verilen bir fonksiyonun ters fonksiyonunun grafiğini çizmeleri istenildiğinde) başarısız olmaktadırlar (Eisenberg, 1991; Even, 1992).

Yukarda kısa bir özeti sunulan zorlukların ve kavram yanılgılarının üstesinden gelmeleri ve içeriksel açıdan doğru ve zengin fonksiyon bilgileri edinmeleri için öğrencilere ilk elden yardımcı olacak olanlar ise öğretmenlerdir. Öğretmenler, öğrencilerine bu yardım ve rehberliği farklı şekillerde sağlayabilirler. Bu bağlamda yapılandırmacı yaklaşımın felsefesiyle uyum arz eden öğretim modellerinin kullanımı ve sınıf içi öğretimlerin materyal ve teknoloji kullanımlarıyla desteklenmesi öğrencilerde hedeflenen düşünce değişimininin oluşumuna katkı sağladığı bilinmektedir. DeMarois ve Tall’un (1999) yapmış olduğu deneysel çalışma yapılandırmacı öğrenme teorisini esas alan öğretim modellerinin öğrencilerin fonksiyon kavramını derinlemesine anlamalarını ve fonksiyonların temsilleri arasındaki ilişkileri görmeleri için gerekli olan düşünce esnekliğini kazanmalarını kolaylaştırdığını göstermiştir. Smart’ın (1995) çalışması ise hesap makinası (graphic calculator) kullanımının öğrencilerin fonksiyon grafiklerini kafalarında canlandırabilme yeteneklerini (visual ability) geliştirdiğini, grafiksel ve cebirsel temsiller arasında ileri-geri geçişler yapmalarını kolaylaştırdığını ve öğrencilerin fonksiyon problemlerinin çözümlerinde görsel (visual) stratejileri adapte ederek kullanmaları noktasında ciddi katkılar sağladığını göstermektedir. Schwingendorf v.d. (1992) tarafından yapılan çalışmada bilgisayar-destekli öğrenim gören öğrenciler, kontrol grubu öğrencilerine kıyasla, fonksiyonu dönüştürme yapan bir süreç olarak algılama noktasında çok daha başarılı olmuşlar ve fonksiyon kavramına ilişkin birçok yanılgının (sınırlı sayıda ayrık noktadan oluşan grafik fonksiyon belirtemez, fonksiyon 1-1 eşleme yapmalıdır, v.s.) üstesinden gelmişlerdir.

Ancak yapılandırmacı yaklaşımın felsefesiyle uyum arz eden öğretim yaklaşımlarını etkili bir şekilde uygulayabilmek için öğretmenlerin belli bilgi türlerine sahip olmaları gerekmektedir ki bunların en başında geleni ise *Pedagojik Alan Bilgisidir*. Bundan sonraki kısımda pedagojik alan bilgisi ve matematik öğretimindeki yeri ve önemi üzerinde durulacaktır. Söz konusu bilgi, alan ve genel pedagoji bilgilerinin alaşımından oluştuğu için öncelikli olarak bu iki bilgi türü kısaca açıklanacaktır.

1. Pedagojik Alan Bilgisi ve Matematik Öğretimindeki Yeri ve Önemi

Kişi bilmediği şeyi öğretemez gerçeğinden hareketle öğretmenlerin her şeyden önce okuttukları alan ve bu alan kapsamındaki konulara ilişkin yeterli düzeyde bilgi sahibi olmaları gerekmektedir. Kısaca 'alan bilgisi' olarak adlandırabileceğimiz bu bilgi türü öğretmenlerin matematiksel konuların epistemolojisi, bu konuların öğretiminde kullanılan tanımlar, aksiyomlar, tanımsız kavramlar, ispat yöntemleri, bağıntı, kural ve formüllere ilişkin anlayışlarının ve algılarının tamamını içermektedir (Ball, 1991). Shulman'a (1986) göre alan bilgisinin iki temel özelliği vardır. Bunlardan birincisi bir matematiksel kavramın 'ne olduğunu' bilmek ve ikincisi de o matematiksel kavramın 'neden ve niçin' öyle olduğunu bilmektir. Ball (1991) 'matematik bilmek ve matematik yapmak ne demektir?' ve 'matematik eğitimcileri arasında matematiksel bilginin doğası ve matematiğin felsefesine ait süregiden teorik tartışmalar nelerdir?' sorularına ilişkin öğretmenlerin sahip oldukları görüş ve düşüncelerini de alan bilgisi kapsamında değerlendirmektedir.

Öğretmenlerin pratikte ihtiyaç duyacakları bir başka bilgi türü ise 'genel pedagoji' bilgisi veya kısaca pedagoji bilgisidir. Eğitim bilimleri alanındaki bilginin gelişimine paralel olarak pedagoji bilgisi farklı şekillerde tanımlanmıştır. Wilson v.d. (1987)'ne göre pedagoji bilgisi öğretmenlerin temel öğrenme-öğretme teorilerini anlama biçimlerini, öğrencileri hakkında sahip oldukları bilgilerini ve etkili sınıf yönetimi konusundaki tecrübe ve becerilerini içerir. Watkins ve Mortimore (1999) pedagoji bilgisini bireylerin bilgi edinmelerini kolaylaştırmak için yürütülen bilinçli ve amaçlı etkinlikler bütünü olarak tanımlamakta ve literatürde bu bilgi türünü farklı şekillerde algılayan üç temel geleneğin varlığından bahsetmektedir. Birinci gelenek, pedagoji bilgisini öğretmenlerin karekterleriyle ilişkilendirerek otoriter ve demokratik öğretmen stillerinden bahsetmekte ve bu kişisel özelliklerin, öğrencilerin bilgi gelişimleri üzerindeki etkilerini araştırmaktadır. İkinci geleneğe göre öğretmenlerin sınıf yönetimi, öğrenme ortamlarının organizasyonu, öğrenme-öğretme aktivitelerinin ahenkli bir şekilde yürütülmesi, ders anlatımı esnasında oluşabilecek belirsiz durumların kontrolü ve uygun öğretim metod ve stratejilerinin seçilip uygulanması alanlarındaki bilgi ve tecrübeleri öğretmenlerin pedagoji bilgilerini oluşturmaktadır. Üçüncü gelenek ise daha çok öğrenme ve öğretme psikolojileri ile bu kavramlara ilişkin temel kuramlar hakkındaki öğretmenlerin sahip oldukları bilgi ve düşüncelerini pedagoji bilgisi kapsamında ele almaktadır.

Yukarıda sunulan bilgilerden anlaşılacağı üzere pedagoji bilgisi, öğrenme-öğretme teorileri, öğretim yöntem ve teknikleri, ölçme değerlendirme, sınıf yönetimi-organizasyonu ve öğretmen-öğrenci ilişkilerinin nasıl olması gerektiği gibi farklı konularda genel prensip ve ilkeler ortaya koyar. Ancak bu prensip ve ilkelerin matematik, fizik ve tarih gibi farklı displinlerin öğretiminde nasıl uygulanabileceğine dair öneriler getirmez. Alan bilgisi ise öğretmenlerin uzmanı oldukları alana ilişkin kendi düşünce ve algılarını içermektedir, dolayısıyla öğretmenin kendisine aittir. Öğretmenlerin sahip oldukları alan bilgilerini öğrencilerine direk olarak aktarabilmelerine olanak tanıyan bir mekanizma ise yoktur.

Öyleyse etkili sınıf içi öğretimleri yapabilmek ve uygun öğrenme ortamları oluşturabilmek için öğretmenlerin alan ve pedagoji bilgilerinin alaşımından oluşan ve kısaca 'pedagojik alan bilgisi' (Shulman, 1986) olarak tanımlayabileceğimiz yeni bir bilgi türüne sahip olmaları gerekmektedir. Pedagojik alan bilgisi matematiğin ne olduğundan daha çok matematiksel konuların nasıl öğretilebileceğine ilişkin bilgi ve düşünceleri içerir. Pedagojik alan bilgisinin kapsamı çok geniş olup öğretmenlerin, öğrencilerinin düşünce yolları hakkındaki bilgileri, matematiksel konuların karekterine uygun sunuş şekillerinin (grafikler, tablolar, v.s.) seçimi ve kullanımı, öğrencilerin geçmişten ne tür bilgiler getirdikleri ve bunların yeni konuların öğretiminde nasıl kullanılabileceği, yeni konunun öğrenimi esnasında öğrencilerin karşılaşabilecekleri zorluklar ve geliştirebilecekleri kavram yanılgılarının neler olduğu gibi çok değişik alanlardaki öğretmenlerin bilgi ve düşüncelerini içerir (Wilson v.d., 1987; Bromme, 1995). Bunlara ilave olarak, matematiksel konuların güncel hayatla ilişkilendirilmesi, matematiksel kavramların uygun analojiler kullanılarak öğrencilere iletilmesi, içeriksel açıdan zengin problemlerin seçimi ve kullanımı, interaktif öğrenme ortamları oluşturarak öğrencilerin amaçlı bir şekilde tartıştırılması ve matematik öğretiminde teknolojinin etkili kullanımı konularında sahip olunan bilgilerde pedagojik alan bilgisinin bileşenleri olarak kabul edilebilir. Kısaca, alan bilgilerinin pedagojik kuramlar, teoriler ve prensipler ışığında yeniden organize edilerek öğrencilerin anlayabileceği formata dökülmesi sürecinde bir öğretmenin ihtiyaç duyacağı bütün bilgiler pedagojik alan bilgisi kapsamında değerlendirilebilir (Shulman, 1986).

Öğretmenler gerek alan ve gerekse pedagojik kuram ve teorilere ilişkin bilgileri yazılı kaynaklardan ve konunun uzmanlarından edinebilirler; ancak pedagojik alan bilgilerini benzer kaynaklardan edinebilmeleri oldukça güçtür. Çünkü pedagojik alan bilgisi öğrencilerin psiko-sosyal ve bilişsel açılardan hazır bulunuşluluk düzeylerini gözardı etmeden ve bilginin doğasından ödün vermeden konunun mantığını öğrencilerin anlayış düzeyine uyarlamak için gerekli olan bilgi türüdür (Shulman, 1986). Pedagojik alan bilgisinin en temel özelliği farklı seviyelerdeki öğrenci gruplarının ihtiyaçlarına cevap verebilecek tarzda esnek ve adapte edilebilir olmasıdır. Öğretmenler bu nitelikteki bir bilgi sistemini en güzel şekilde kendi mesleki uygulamaları sürecinde geliştirebilirler. Çünkü sınıf içi öğretim aktiviteleri esnasında karşılaşılan özel öğrenme-öğretme durumları sahip olunan teorik bilgilerin karşılaşılan durum ve şartlara göre yeniden yorumlanmasını gerekli kılar. Teorik bilgilerin öğretim amaçlı yeniden yorumlanması ise ancak yoğun pedagojiksel düşünceler yürütülerek yapılabilir ki bu da pedagojik alan bilgisi geliştirmenin en etkili yoludur (Bromme, 1995).

İyi yapılandırılmış pedagojik alan bilgisine sahip olmanın sınıf içi matematik öğretimlerinde etkili olabilmek için bir gereklilik olduğu hususunda matematik eğitimcileri hemfikirdirler (Tirosh, 1998; Escudero ve Sanchez, 2002; Özmantar ve Bingölbali, 2010; Yeşildere ve Akkoç, 2010). Yerli ve yabancı araştırmacılar tarafından öğretmenlerin farklı matematiksel konular bağlamında pedagojik alan bilgilerini inceleyen birçok çalışma bulunmaktadır. Örneğin, Yeşildere ve Akkoç (2010) ilköğretim matematik öğretmenleriyle yaptıkları çalışma neticesinde katılımcı öğretmenlerin örüntüler konusunda strateji kullanımları, temsiller ile modeller arasında geçişlerde güçlükler yaşadıklarını ve söz konusu matematiksel düşünceyle ilgili literatürde bahsedilen birçok yanılgıya öğretmenlerin kendilerinin sahip olduklarını gözlemlemiştir. Özmantar ve Bingölbali'nin (2010) yapmış olduğu çalışma ise birçok sınıf öğretmeninin kesirler konusunda öğrenci zorluklarını ve bunların zihinsel sepeplerini tespit etmede yetersiz kaldıklarını ve hatta çalışmada yer alan sınıf öğretmenlerinin 22% lik bir kısmının kendilerinin kesirler konusunda farklı yanılgılar sergilediklerini göstermektedir.

Öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerinin sınıf içi öğretimlerinin yanı sıra dersin planlanması ve değerlendirilmesi aşamalarındaki yaklaşımlarınıda etkiledi bilinmektedir (Lloyd ve Wilson, 1998; Escudero ve Sanchez, 2002). Örneğin, Tirosh v.d. (1998) harfli ifadelerle işlemler konusu özelinde öğrenci zorlukları ve yanılgılarına ilişkin öğretmen görüşlerini araştırmışlar ve elde ettikleri bulguları öğretmenlerin sınıf içi uygulamalarıyla ilişkilendirerek tartışmışlardır. Çalışmanın sonucu, cebirsel ifadeleri sadeleştirirken öğrencilerin yanılgıya düşebileceği noktaların (örneğin, *3x+5 ifadesinin 8x* veya 8 olarak sadeleştirilmesi) bilincinde olan öğretmenlerin bu yanılgıların oluşumunu önlemek için önlemler aldığını ve bu bağlamda *benzer ve benzer olmayan terimlerin izahı*, *işlem sıralaması* ve *geriye doğru çözümleme stratejisi* gibi değişik stratejilerden yararlandıklarını göstermektedir. Lloyd ve Wilson (1998) ise fonksiyon kavramının sunumunda grafiksel gösterimlerin görsel gücünün farkında olan öğretmenlerin sınıf içi öğretimlerinde cebirsel gösterimlerde göreceli olarak daha gizli kalan manaları açığa kavuşturmak için sık sık grafiksel gösterimlerden faydalandıklarını ve bununda konunun anlaşılmasını kolaylaştırdığını belirtmektedir. Escudor ve Sanchez (2002) ise öğrencilerin oran-orantı konusundaki bilgilerinin Tales teoreminin öğreniminde etkili olduğunun farkında olan öğretmenlerin öncelikli olarak oran-orantı konusundaki öğrencilerin bilgi eksikliklerini tamamladıklarını, daha sonrada sayısal ve grafiksel gösterimleri ilişkilendirerek Tales teoremini anlattıklarını ve bu yaklaşımında yine konunun anlaşılmasını kolaylaştırdığını belirtmektedir. Özetle, öğrencilerin düşünme sistematikleri ve öğrenme stilleri, farklı matematiksel konuların öğreniminde yaşayabilecekleri zorluklar, geliştirebilecekleri yanılgılar ve kısıtlı algılar, ve hedef konunun öğrenimi için ihtiyaç duyulan ön bilgiler hakkındaki öğretmenlerin sahip oldukları bilgi ve düşüncelerin uygun öğrenme-öğretme ortamlarının oluşturlabilmesi için oldukça önemli olduğu söylenilebilir.

Bu çalışmanın amacı öğretmenlerin fonksiyonlar konusundaki '*pedagojik alan bilgilerini*' iki boyutu itibariyle incelemektir. Bu bilgi boyutlarından birincisi öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamadaki zorlukları, bu düşünceye ilişkin geliştirdikleri kavram yanılgıları ve bunların zihinsel (cognitive) sebeplerine ilişkin öğretmenlerin görüş ve düşüncelerini içermektedir. İkincisi ise bahsedilen zorlukların giderilmesi için uygun öğretim yaklaşımlarının neler olabileceği konusundaki öğretmenlerin görüş ve düşüncelerini içermektedir.

II. YÖNTEM

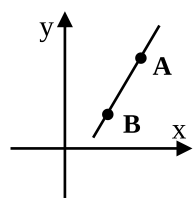
1. Veri Toplama Yöntemi

Bu çalışmada nitel araştıma yöntemlerinden özel olay (vakıa) (Yin, 2003) çalışma modeli kullanılmıştır. Bu makalede sunulan veriler meslekte tecrübeli iki matematik öğretmeniyle yapılan yarı-yapılandırılmış mülakatlardan elde edilmiştir. Mülakatta toplam beş soru kullanılmıştır (içerik olarak burada sunulan verilerle aynı tür bilgiler ürettiği için mülakatta kullanılan beşinci soruya bu makalede yer verilmemiştir). Veri toplama yöntemi ve mülakatta kullanılan soruların güvenilirlik ve geçerliliğini sağlamak için farklı yöntemlere başvurulmuştur. Bu yöntemler soruların literatürden adapte edilerek geliştirilmesi, soruların amaca hizmet edip etmediğinin matematik eğitimcileriyle tartışılması ve ana çalışmadan önce pilot çalışmaların yapılmasını içermektedir. Mülakat esnasında sorular öğretmenlere teker teker yöneltilmiş ve konuyla ilgili düşüncelerini açıklamaları istenilmiştir. Klinik mülakat (Gingsburg, 1981) yönteminin öngörülerinden faydalanılarak verdikleri yanıtlara göre yeni sorularla öğretmenlerin gerçek bilgi ve düşüncelerine ulaşılmaya çalışılmıştır.

2. Veri Toplama Araçları

Araştırmada kullanılan sorular en temelde fonksiyon kavramının öğrenim sürecinde öğrencilerin karşılaştıkları zorluklar ve geliştirdikleri yanılgılar ile bu zorlukların üstesinden gelmeleri için uygulanabilecek öğretim yaklaşımları konularındaki öğretmenlerin görüş ve düşüncelerini ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Birinci soru öğrenciler arasında sıkça karşılaşılan '*iki noktadan geçen tek bir fonksiyon grafiği vardır*' (Leinhardt et al, 1990) yanılgısı ile bu yanılgının sebeplerine ilişkin öğretmenlerin düşüncelerini ortaya çıkarmak için kullanılmıştır.

S1. 'Düzlemde A ve B gibi iki noktadan geçen kaç tane fonksiyon grafiği çizilebilir?' sorusunu yönelttiğinizi ve öğrencilerinizden bir tanesinin 'bu noktalardan geçen tek bir fonksiyon grafiği vardır deyip' yan taraftaki gibi bir grafik çizdiğini varsayalım.



a) Size göre öğrencinin yanıtı doğrumudur?
b) Öğrencinin yanılgısnın sebebi nedir?

Fonksiyonun *x* ve *y* değişkenleri içeren cebirsel ifadeler olduğu türünden yanlış algıya öğrenciler arasında sıkça rastlanılmakta ve bunun sonucu olarakta birçok öğrenci sabit fonksiyonun cebirsel yazılımlarını reddetmektedirler (Tall ve Bakar, 1992). Bu sebeple araştırmada kullanılan ikinci soru cebirsel ortamda sabit fonksiyon kavramının anlaşılması noktasında öğrencilerin yaşadıkları zorluklar, geliştirdikleri yanılgılar, bunların sebepleri ve düzeltilmesi için uygulanabilecek öğretim yaklaşımları alanlarındaki öğretmenlerin düşüncelerini araştırmak için kullanılmıştır.

S2. Varsayalım ki öğrencilerinizden bir tanesi $y=5$ ifadesininin bir fonksiyon olmadığını iddia etmektedir.

a. Size göre öğrenci $y=5$ ifadesini neden bir fonksiyon olarak kabul etmiyor olabilir? Hangi sebepten dolayı öğrenci böyle bir yanılgıya düşüyor olabilir?
b. Bu ifadenin ($y=5$) bir fonskiyon olduğuna öğrencinizi ikna etmek için ne tür açıklamalar yaparsınız?

Kimi öğrencilerin 'her fonksiyonun tersi vardır ve cebirsel olarak verilmiş olan bir fonksiyonun tersi, ters işlem kuralı uygulanarak ve fonksiyon sürecindeki işlemsel zincir sondan başa doğru çözümlenerek elde edilebilir' türünden yanlış ve kısıtlı anlayışlara sahip olduğu bilinmektedir (Even, 1992). Dolayısıyla, mülakatta kullanılan üçüncü soru ters fonksiyon kavramıyla ilgili öğrenci yanılgılarının sebepleriyle birlikte tespiti ve yanılgıların giderilmesi için sunulabilecek etkin öğretim yaklaşımları konularındaki öğretmenlerin görüş ve düşüncelerini araştırmak için kullanılmıştır.

S3. '$f(x)=x^2$ fonksiyonunun tersi var mıdır?' sorusunu öğrencilerinize yönelttiğimizi varsayalım. Öğrencilerinizden bir tanesi bu soruya 'evet vardır' diyor ve ters fonksiyonun kuralınında $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ olduğunu iddia ediyor.

a) Size göre öğrencinin yanılgısının sebebi nedir?
b) Öğrencinin hatasını düzeltmek için ne tür bir açıklama yaparsınız?

Cebirsel yazılımlarındaki benzerlikten dolayı öğrenciler *denklem* ve *fonksiyon* kavramlarını karıştırabilmekte ve bunların aynı matematiksel düşünce oldu gibisinden yanlış bir algı geliştirebilmektedirler (Even, 1988; Dede v.d., 2010). Araştırmada kullanılan dördüncü soru bu kavramlar arasındaki farkın izahı için öğretmenlerin sergiledikleri pedagojiksel yaklaşımları araştırmak için kullanılmıştır.

S4. Öğrencilerinizden bir tanesinin size 'denklem ve fonksiyon kavramları arasında bir farkın olup olmadığını' sorduğunu varsayalım. Öğrencinize nasıl bir açıklama yaparsınız?

3. Örneklem

Çalışmanın örneklem uzayı Anadolu Liselerinde görev yapan iki öğretmenden (Ahmet[1]: 25 yıllık öğretmen, Burak: 24 yıllık öğretmen) oluşmaktadır.

---

[1] Etik sebeplerden dolayı öğretmenlerin asıl isimleri kullanılmamıştır.

Katılımcıların belirlenmesinde '*amaçlı örneklem seçimi*' yöntemi kullanılmış ve bu çalışmanın örneklemini oluşturan öğretmenler 4 farklı okulda görev yapan toplam 12 öğretmen arasından informal mülakatlar yapılarak tespit edilmiştir. İnformal mülakatlarla matematik alanındaki eğitimleri ve meslekteki tecrübeleri açısından denk fakat farklı öğretim yaklaşımlarını benimseyen öğretmenlerin çalışmada içerilmesi hedeflenmiştir. İnformal mülakatlar genelde matematik ve özelde de fonksiyonlar konusunun öğrenim ve öğretimine ilişkin öğretmenlerin görüş ve düşünceleri hakkında bilgi edinmeyi amaçlayan sohbetlerden oluşmaktadır. Yapılan informal mülakatlar neticesinde öğretmenlerin büyük bir kısmının, öğretmenden öğrenciye tek yönlü bilgi akışını hedefleyen geleneksel yaklaşımları benimsedikleri ve üniversite yerleştirme sınavı gibi ulusal ölçme-değerlendirme sistemlerinin de etkisiyle daha çok pratik kural ve anlamlandırılmamış bilgi (factual knowledge) aktarımını önemsedikleri anlaşılmıştır. Netice olarak, çalıştıkları okul türü, mesleki tecrübeleri ve matematik alanındaki eğitim düzeyleri arasındaki **benzerlikler** ve matematik öğretimine ilişkin düşünce ve yaklaşımlarındaki **farklılıklar** dikkate alınarak iki öğretmenin ana çalışmada yer alması kararlaştırılmıştır. Bulgular kısmında detaylı olarak sunulduğu üzere bu öğretmenler arasındaki temel fark Ahmetin kavram eksenli Burakın ise işlem eksenli öğretim yaklaşımını benimsemiş olmasıdır. İnformal mülakatlar sürecinde Ahmet öğrencilerin kendi bilgilerini kendilerinin geliştirebileceği yapılandırmacı öğrenme-öğretme ortamları oluşturmayı önemsediğine ilişkin görüşler belirtirken Burak ilişkilendirilmemiş çok sayıda kural ve bilgiyi davranışçı bir yaklaşımla aktarmakla hedefe daha çabuk ulaşılacağı türünden bir anlayış sergilemiş ve fonksiyonlar konusunun öğretiminde analoji kullanımının etkinliğine olan inancını açıkça vurgulamıştır.

4. Veri Analizi

Toplanılan verilerin analizinde kuramsal çerçeve olarak Shulman'ın (1986) *pedagojik alan bilgisi* düşüncesi kullanılmıştır. Kısaca hatırlatmak gerekirse pedagojik alan bilgisi alan ve pedagoji bilgilerinin alaşımından oluşan özel bir bilgi türü olup öğretmenlerin müfredatla alakalı bilgileri, ölçme-değerlendirme konusundaki bilgileri, belli matematiksel kavramların öğrenimi için ihtiyaç duyulan ön bilgiler, ve matematiksel kavramların izahında kullanılabilecek uygun temsiller ve analojilerin neler olduğu hususundaki düşünceleri gibi birçok bileşenden oluşmaktadır. Eldeki çalışmada öğretmenlerin pedagojik alan bilgileri iki boyutu itibariyle incelenmiştir. Bunlardan birincisi öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamadaki zorlukları, geliştirdikleri kavram yanılgıları ve bunların zihinsel (cognitive) sebeplerine ilişkin öğretmenlerin görüş ve düşüncelerini içermektedir. İkincisi ise bahsedilen zorlukların giderilmesi için uygulanabilecek etkin öğretim yaklaşımlarına ilişkin öğretmenlerin görüş ve düşüncelerini içermektedir. Bunun yanı sıra, verilerin analizinde Tall ve Vinner (1981) tarafından geliştirilmiş olan 'kavram imajı' ve 'kavram tanımı' fikirlerinden de yararlanılmıştır. Kavram imajı bir matematiksel düşünceye ilişkin bireyin belleğine kodlamış olduğu zihinsel yapılar olarak tanımlanabilir ki bunlar resimler, grafikler, matematiksel semboller, işlemler, sözel ifadeler ve hatta güncel hayattan bazı örnekler olabilir. Örneğin, bir öğrencinin fonksiyon düşüncesine ait kavram imajı, düzgün artan veya azalan bir eğri olabileceği gibi tanım kümesinin alt aralıklarında farklı kurallarla tanımlanmış parçalı bir fonksiyon da olabilir. Kavram tanımı ise bir matmatiksel kavramın esasını ve özelliklerini açıklayan kısa ve öz ifadelerdir (a.g.e). Kavram tanımlarının matematik öğretiminde etkin kullanımının öğrencilerin kavramsal bilgiler (Heibert ve Lefevre, 1986) geliştirmelerini kolaylaştıracağını söyleyebiliriz.

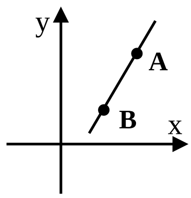
Mülakatlardan elde edilen veriler nitel yöntemler kullanılarak analiz edilmiştir (Miles ve Huberman, 1994). Teyp kasetlerine kaydedilmiş olan veriler çözümlenerek yazıya dökülmüş ve analiz işlemleri bu yazılı dökümanlar üzerinden yürütülmüştür. Öğretmenlerin yazılı ve sözlü yanıtlarındaki manalara ulaşılması amacıyla içerik ve discur (discourse) yöntemleri kullanılmıştır (Philips ve Hardy, 2002). Analiz işlemlerinin birinci aşamasında öğretmenlerin yanıtları dikkatli bir şekilde okunmuş ve öne çıkan ana temaların kısa özetleri yazılmıştır. İkinci aşamada öğretmenlerin yanıtlarındaki manaların incelenmesine devam edilmiş ve yazılan özetler kısa kodlarla ifade edilmiştir. Analizin son aşamasında ise üretilmiş olan kodlar bir bütün olarak değerlendirilmiş ve içeriksel açıdan aynı temalara sahip fikirler daha genel kategoriler altında sınıflandırılmıştır. Verilerin analizi sürecinde araştırmacıdan kaynaklanması muhtemel sınırlılıkların giderilmesi için üye kontrolü metodundan (Miles ve Huberman, 1994) yararlanılmış ve yazılan özetler, üretilen kodlar ve kategoriler konunun uzmanı eğitimcilerle tartışılmıştır.

III. BULGULAR

Çalışmanın bulguları öğrencilerin fonksiyonlar konusunu öğrenirken karşılaştıkları zorluklar, geliştirdikleri kavram yanılgıları ve bunların zihinsel sebeplerini teşhis etmede katılımcı öğretmenler arasında bilgi ve düşünce farkının olmadığını göstermektedir. Ancak, bahsedilen zorlukların ve yanılgıların üstesinden gelmeleri için öğrencilere yapılabilecek açıklamalar ve uygulanabilecek etkin öğretim modelleri konularında öğretmenler oldukça farklı yaklaşımlar sergilemişlerdir. Ahmet kavramlar arası ilişkilendirmeler yapmayı ve fonksiyonların temsillerini bütünleşik olarak kullanmayı tercih ederken, Burak teorik bilgilerin verilen sorular üzerinden sözel ifadelerle açıklanması gibi çok daha rutin ve kılasik bir yol izlemiştir. Genel olarak Ahmet yapılandırmacı yaklaşımın felsefesiyle uyum arzeden buluş yoluyla öğretim modelini kullanırken Burak tipik bir davranışçı öğretim yaklaşımı sergilemiştir.

Bu kısımda öğretmenlerin pedagojik alan bilgileri dört soru üzerinden incelenecektir; içerik olarak burada sunulan verilerle aynı tür bilgiler ürettiği için mülakatta kullanılan beşinci soruya burada yer verilmemiştir. İlk soru öğrenciler arasında sıkça rastlanılan '*iki noktadan geçen tek bir fonksiyon grafiği vardır*' yanlış algısının sebeplerine ilişkin öğretmenlerin düşüncelerini araştırmayı hedeflemiştir.

S1. ‘Düzlemde A ve B gibi iki noktadan geçen kaç tane fonksiyon grafiği çizilebilir?’ sorusunu yönelttiğinizi ve öğrencilerinizden bir tanesinin ‘bu noktalardan geçen tek bir fonksiyon grafiği vardır deyip’ yan taraftaki gibi bir grafik çizdiğini varsayalım.



a) Size göre öğrencinin yanıtı doğrumudur?
b) Öğrencinin yanılgısnın sebebi nedir?

Her iki öğretmen de öğrencinin yanıtının yanlış olduğunu ve iki noktadan geçen sonsuz tane fonksiyon grafiği çizilebileceğini belirtmişlerdir. İkisi de öğrencinin ilköğretim yıllarından getirmiş olduğu ‘*iki noktadan bir tane doğru geçer*’ düşüncesinden hareketle böyle bir yanılgı sergilediği görüşünü dile getirmiştir (bakınız Tablo 1).

Tablo 1: ‘*İki noktadan geçen tek bir fonksiyon grafiği vardır*’ yanlış algısına ilişkin öğretmenlerin görüş ve düşünceleri.

Ahmet	***Burak***
Ortaokul yıllarında öğrenciler doğru grafiklerini öğrenirler... Orada iki noktadan yalnız bir tane doğru geçer fikrini edinirler. Geçmişten getirdikleri böyle bir düşüncenin etkisiyle bu hatayı yapmaktadır. ... Aslında bu iki noktadan geçen sonsuz tane fonksiyon grafiği çizilebilir…	*Öğrencilere geçmiş yıllarda sürekli iki noktadan bir tane doğru geçer denilmiştir… Onun için böyle bir soru verildiğinde öğrenci de direk olarak tek bir doğru grafiği çiziyor... Bu noktalardan geçen sonsuz tane fonksiyon grafiği çizilebileceğini ise ya gözardı ediyor ya da anlayamıyor... Benim görüşüme göre öğrencilerin geçmiş yıllarda almış oldukları eğitimin bu yanıtı vermesinde çok büyük bir etkisi vardır...*

İkinci soru sabit fonksiyon kavramının öğrenim ve öğretimine ilişkin öğretmenlerin görüş ve düşüncelerini araştırmayı amaçlamıştır.

S2. Varsayalım ki öğrencilerinizden bir tanesi *y=5* ifadesininin bir fonksiyon olmadığını iddia etmektedir.

a) Size göre öğrenci *y=5* ifadesini neden bir fonksiyon olarak kabul etmiyor olabilir? Hangi sebepten dolayı öğrenci böyle bir yanılgıya düşüyor olabilir?

Bu soruya ilişkin öğretmen yanıtlarının özeti Tablo 2 sunulmuştur.

Tablo 2: Sabit fonksiyon kavramının öğrenimine ilişkin öğretmenlerin görüş ve düşünceleri.

Ahmet	***Burak***
Bana göre bu öğrenci sabit fonksiyonun tanımını anlamamıştır. Şayet…tanım kümesindeki bütün elemanların…değer kümesindeki tek bir elemana eşlendiğini görebilse böyle bir hata yapmaz… Bu öğrenci verilen fonksiyonun grafiksel formunu da hayal edememektedir. …sırasıyla x ve y eksenlerini tanım ve değer kümesi olarak düşünebilse ve x eksenindeki bütün elemanların y ekseni üzerindeki tek bir elemana (5) eşlendiğini düşünebilse, bu düşünce öğrencinin cebirsel ortamda hata yapmasını önler… Bir de, malum sabit fonksiyonlarda x gibi bir değişken bulunmaz…bu da öğrenciyi yanıltıyor olabilir.	*Bu öğrenci sabit fonksiyon düşüncesini anlamamamış bulunmaktadır. Bu fonksiyonun IR deki bütün elemanları 5'e eşlediğini göremiyor. Görüntü (y=5) ile bu görüntünün arkasındaki manayı ayırt edememektedir. Bana göre bu öğrenci sadece görüntüye (y=5) odaklanıyor ve ortamda da x gibi bir değişkenin olmadığını görünce bu ifadenin bir fonksiyon olamayacağını iddia ediyor. …*

Bu açıklamalardan anlaşılacağı üzere her iki öğretmen de öğrencinin verilen cebirsel ifadenin arkasındaki fonksiyon düşüncesine (IR deki bütün elemanları 5 gibi tek bir elemana eşleyen fonksiyon sürecine) ulaşmakta zorlandığının altını çizmekte ve bu zorluğun sebebi olarak da $y=5$ ifadesinde x değişkeninin olmayışını göstermektedir. Burak'tan farklı olarak Ahmet öğrencinin cebirsel ve grafiksel temsiller arasında ilişkilendirmeler yapamadığı ve verilen fonksiyonun grafiksel formunu zihninde canlandıramadığı için bu hataya düştüğünü vurgulamaktadır. Ahmetin vurguladığı bu son nokta sorunun çözümü için önerilen pedagojiksel yaklaşımlar arasındaki farkın da temelini oluşturmaktadır. Aşağıda verilen sorunun ikinci kısmı bu farklılıkları araştırmak için kullanılmıştır.

b) Bu ifadenin ($y=5$) bir fonskiyon olduğuna öğrencinizi ikna etmek için ne tür açıklamalar yaparsınız?

Tablo 3 te görüldüğü üzere Burak verilen ifade üzerinden sözlü açıklamalar yapmanın ve bu açıklamaları da analojilerle (benzetim yoluyla öğretim) desteklemenin öğrencilerin $y=5$ ifadesinin arkasındaki fonksiyon sürecini ve bu sürecin yapmış olduğu dönüştürmeleri anlamalarını kolaylaştıracağını belirtmiştir. Ahmet ise fonksiyonun temsilleri arasında ilişkilendirmeler yapmanın durumu izah etmek için çok daha etkili bir yöntem olduğunu belirtmiştir.

Tablo 3: Sabit fonksiyon kavramının öğretimine ilişkin öğretmenlerin görüş ve düşünceleri.

Ahmet	***Burak***
... Basitçe bir Venn-şeması çizerim ve kümeler içerisine elemanlar koyarım. Tanım kümesindeki tüm elemanları değer kümesindeki aynı elemana, 5, eşlerim… Bunun öğrencilerin y=5 fonksiyonun yapmış olduğu eşlemeleri anlamalarını kolaylaştırmak için oldukça etkili bir yol olduğunu düşünüyorum. ... Daha sonra, y=5 fonksiyonunun grafiğini çizerim… y=5 fonksiyonunun bütün girdilere karşılık tek bir çıktı (görüntü) ürettiğini, ve bu sebepten dolayı bu fonksiyonun grafiğinin x-eksenine parallel bir doğru olduğunu açıklarım. ... Bu durumun (tanım kümesindeki tüm elemanların değer kümesinde tek bir elememana eşlenmesi) fonksiyonun tanımıyla uyum arzettiğini de ayrıca vurgularım….	*Öğrenciye bu ifadenin bütün reel sayıları 5'e eşlediğini söylerim… Evet, bu şekilde izah ederim. ... Birde öğrenciye sabit fonksiyonu 'sabit fikirli bir adam' olarak düşünmesini tavsiye ederim… Sabit fikirli adama ne söylersen söyle fikrini kesinlikle değiştirmez…bütün önerileri reddeder. ... Sabit fonksiyon da benzer şeydir. Evet, öğrenciye sabit fonksiyonu, sabit fikirli bir adam olarak düşünmesini öneririm…*

Verilen açıklamalar dikkatlice incelendiğinde görülecektir ki Ahmet sadece temsiller arasında ilişkilendirmeler yapmakla kalmıyor aynı zamanda sabit fonksiyon fikrinin fonksiyonun tanımında belirtilen şartları sağladığını da vurguluyor. Bir manada fonksiyonların alt kavramı olan sabit fonksiyon düşüncesini, daha genel olarak anladığımız fonksiyon kavramıyla ilişkilendirerek öğrencinin konuyu anlamlandırarak öğrenmesine yardımcı olmaya çalışıyor.

Mülakatta kullanılan üçüncü soru öğretmenlerin ters fonksiyon kavramına ilişkin pedagojik alan bilgilerini yine iki boyutu itibariyle araştırmayı amaçlamıştır.

S3. '$f(x)=x^2$ fonksiyonunun tersi var mıdır?' sorusunu öğrencilerinize yönelttiğimizi varsayalım. Öğrencilerinizden bir tanesi bu soruya 'evet vardır' diyor ve ters fonksiyonun kuralınında $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ olduğunu iddia ediyor.

a) Size göre öğrencinin yanılgısının sebebi nedir?
b) Öğrencinin hatasını düzeltmek için ne tür bir açıklama yaparsınız?

Öğrencideki yanılgının sebebi olarak öğretmenler, öğrencinin lineer fonksiyonların tersinin kuralını bulurken yürütmüş olduğu '*ters işlem*' fikrini ikinci derece fonksiyonlara genellediği teşhisinde bulunmuşlardır. Öğretmenler bu hatayı yapan öğrencinin $f(x)=x^2$ fonksiyonu ile bu fonksiyonun tersi olan bağıntının yapmış olduğu dönüştürmeleri kafasında canlandıramadığını ve tanım-değer kümeleri arasında ileri-geri geçişler yapamadığını belirtmişlerdir (bakınız Tablo 4).

Tablo 4: Ters fonksiyon kavramıyla alakalı öğrenci zorlukları ve yanılgıları konusundaki öğretmenlerin görüş ve düşünceleri.

Ahmet	***Burak***
Bu öğrenci verilen fonksiyonunun tanım kümesindeki iki elemanı değer kümesinde aynı elemana eşlediğini, dolayısıyla tersinin de tanım kümesindeki bir elemanı değer kümesinde iki elemana eşleyeceğini görememektedir…	*Bu öğrenci verilen fonksiyonun tanım kümesindeki mutlak değerce eşit iki elemanı değer kümesinde aynı elemana eşlediğini görememektedir… Bir manada, öğrenci tanım ve değer kümeleri arasında ileri-geri gidip gelememektedir. ...*

Öğretmenler, öğrencinin hatasını aynı şekilde teşhis etmelerine rağmen sorunun çözümü için yine farklı pedagojiksel yaklaşımlar önermişlerdir. Ahmet fonksiyonun temsilleri arasında ilişkilendirmeler yaparak durumu açıklamanın çok daha etkili olacağını belirtirken Burak yine sözlü açıklamalar vermeyi tercih etmiştir. Bu konuya ilişkin öğretmen yanıtlarının özeti Tablo 5 te görülmektedir.

Tablo 5: Ters fonksiyon kavramının öğretimine ilişkin öğretmenlerin görüş ve düşünceleri.

Ahmet	***Burak***
Bana göre durumu Venn-şeması çizerek ve grafikle ilişkilendirerek izah etmek daha etkili olacaktır. ... Grafikle de aynı şeyi belki daha da etkili biçimde açıklarız. ... Bu fonksiyonun grafiği y-ekseni boyunca bir paraboldür. ... Tersini düşündüğümüzde ise y-ekseni tanım, x-eksenide değer kümesi olacak. Dolayısıyla bu fonksiyonun tersi tanım kümesindeki bir elemanı değer kümesinde iki elemana eşleyecek… Evet, bu metodları kullanırsak kanımca öğrencinin anlamasını çok daha kolaylaştırırız…	*... Örneğin, bu fonksiyon -1 ve 1 gibi iki elemanı 1 e eşler… Tersi ise 1'i -1 ve 1 gibi iki elemana eşleyecek. Öğrenciler aslında bunu biliyorlar,* ***fakat cebirsel ortamda göremiyorlar****… Bu şekilde açıklarsak anlayacaklardır…*

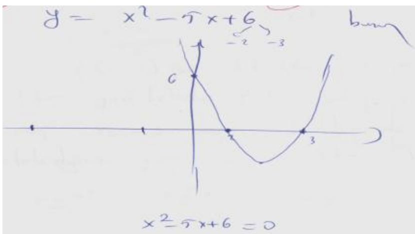
Dikkat edilecek olursa Burak öğrencilerin bir fonksiyon ile onun tersi olan bağıntının yapmış olduğu eşleme ve dönüştürmeleri cebirsel ortamda görmelerinin zor olduğunu ifade etmektedir. Bu ifadeden Burakın cebirsel formüllerin manayı gizlediğine ilişkin bir inanç ve düşünceye sahip olduğunu anlayabiliriz. Ancak, bu düşüncesine rağmen eldeki sorunun izahı için görsel açıdan çok daha güçlü olan grafikler veya Ven-şemalarını kullanmak yerine cebirsel bağıntı üzerinden sözel açıklamalar yapmayı tercih etmektedir. Bu ise teorik düşünceleri ile pratikteki uygulamaları arasında bir tutarsızlığın olduğunu göstermektedir.

Mülakatta kullanılan dördüncü soru denklem ve fonksiyon kavramları arasındaki anlam farkının öğrencilere nasıl izah edilebileceğine dair öğretmenlerin düşüncelerini araştırmayı amaçlamıştır.

S4. Öğrencilerinizden bir tanesinin size ‘denklem ve fonksiyon kavramları arasında bir farkın olup olmadığını’ sorduğunu varsayalım. Öğrencinize nasıl bir açıklama yaparsınız?

Her iki öğretmen de fonksiyonun dönüştürme yapan dinamik bir mekanizma olduğunu, buna karşın denklemin ise içerisindeki değişkenlerin alacağı sınırlı veya sonsuz sayıdaki değerler için sağlanan statik bir yapı (bir denklik hali) olduğunu vurgulamışlardır. Bu yanıtlar öğretmenlerin en azından denklem-fonksiyon ilişkisi bağlamında aynı zenginlikte alan bilgisine sahip olduklarını göstermektedir. Ancak, öğretmenler denklem ve fonksiyon kavramları arasındaki bu içeriksel farkı öğrenciye izah ederken farklı iki pedagojiksel yaklaşım sergilemişlerdir. Her zamanki gibi Ahmet cebirsel ve grafiksel temsillerin bütünleşik olarak kullanılmasının öğrencinin fonksiyon ve denklem kavramları arasındaki farkı anlamasını kolaylaştıracağını belirterek aşağıdaki açıklamayı yapmıştır (bakınız Tablo 6). Burak ise cebirsel bir ifadenin hem denklem hem de fonksiyon olarak algılanabileceğinin altını çizmiştir. Denklem ve fonksiyon arasındaki farkın özel bir örnek üzerinden yapılacak sözlü açıklamalarla öğrencilere daha etkili bir şekilde iletilebileceğini belirtmiştir.

Tablo 6: Denklem ve fonksiyon kavramları arasındaki farkın nasıl izah edileceğine ilişkin öğretmen görüşleri.

Ahmet	***Burak***
Öncelikle bir fonksiyon yazarım…$y=x^2-5x+6$…ve bu fonksiyonun grafiğini çizerim. Daha sonra öğrencilerin dikkatlerini bu grafiğin x-eksenini kestiği noktalara çekerim. Öğrencilerden bu fonksiyon altında 0 a giden değerleri bulmalarını isterim; ve öğrencileri sorgulayarak bu değerlerin $y=x^2-5x+6$ denkleminin kökleri olduğu düşüncesini kendilerinin bulmalarına yardımcı  **Şekil 1:** Fonksiyon-denklem ilişkisine ait Ahmet’in yazılı açıklaması.	*Denklem x ve y gibi değişkenlerin alacağı belli değerler için sağlanan statik bir yapıdır. ...$y=2x+5$ ifadesini düşünelim. Bu denklem x in alacağı 1 değeri ve y nin alacağı 7 değeri için sağlanır... Ancak, fonksiyonun doğasında dinamizim vardır; fonksiyon dinamik bir mekanizmadır...dönüştürme yapar. ... $y=2x+5$ fonksiyonu 1’i 7 ye, 2’yi 9’a, 3’ü 11’e eşler... Evet bu kavramlar tamamen farklıdır,*

olurum. ... Bir yandan bunu yaparken diğer yandan da bu fonksiyonun ($y=x^2-5x+6$) tanım kümesindeki her elemanı, sadece 2 ve 3'ü değil, değer kümesinde tek bir elemana eşlediğini grafik üzerinde izah ederim… Bu açıklamaların sonunda da yine genel olarak denklemin değişkenlerin alacağı belli değerler için…sağlanan bir denklik hali olduğunu açıklarım. Fonksiyonun ise tanım kümesinden değer kümesine dönüştürme yapan bir bağıntı olduğunu vurgularım...	*öğrencilerin bunu mutlaka bilmesi lazım... Kanaatimce bu farkı özel bir örnek üzerinden öğrencilere bu şekilde izah edebiliriz...*

Yukarıdaki açıklamalar öğretmenlerin temel öğretim yaklaşımlarına ilişkin görüş ve düşüncelerine dair önemli ipuçları da içermektedir. Ahmet'in açıklaması '*öğrencilerin dikkatlerini bu grafiğin x-eksenini kestiği noktalara çekerim*' ve '*öğrencilerden bu fonksiyon altında 0'a giden değerleri bulmalarını isterim...öğrencileri sorgulayarak bu değerlerin $x^2-5x+6=0$ denkleminin kökleri olduğu düşüncesini kendilerinin bulmalarına yardımcı olurum*' ifadelerini içermektedir. Bu ifadeler Ahmet'in buluş yoluyla öğretim yapma noktasındaki istek ve kararlılığının göstergeleri olarak algılanabilir. Buna karşın Burak'ın açıklamaları öğretmenden öğrenciye tek yönlü bilgi akışını öngören davranışçı öğretim yaklaşımının izlerini taşımaktadır.

IV. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada yıl itibariyle meslekte oldukça tecrübeli iki öğretmenin fonksiyonlar konusunun öğrenim ve öğretimine ilişkin sahip oldukları pedagojik alan bilgileri incelenmiştir. Bulgular katılımcı öğretmenlerin, öğrencilerin fonksiyonlar konusunu öğrenirken karşılaşabilecekleri zorluklar, geliştirebilecekleri kavram yanılgıları ve bunların zihinsel sebeplerini teşhis etme noktasında oldukça benzer bilgi ve düşüncelere sahip olduklarını göstermektedir. Örneğin, her iki öğretmen de '*iki noktadan geçen tek bir fonksiyon grafiği vardır ve bu grafikte bir doğrudur*' yanılgısının öğrencilerin geçmişten getirdikleri geometri bilgilerini revize etmeden fonksiyonlar konusuna aktarmalarından kaynaklandığını belirtmişlerdir. Her iki öğretmen de sabit fonksiyonların cebirsel formlarına ilişkin öğrenci yanılgısını incelerken öğrencinin cebirsel ifadenin arkasında var olan sabit fonksiyon düşüncesine (sabit fonksiyon kavramına) değil de cebirsel ifadenin kendisine (kavram imajına) odaklandığı öngörüsünde bulunmuşlardır. Bununla ilişkili olarak da sabit fonksiyonların cebirsel yazılımlarında x değişkeninin bulunmamasını öğrenciler için zorluk oluşturan en önemli etken olarak belirtmişlerdir. Yine öğretmenler ters fonksiyon kavramının öğrenim ve öğretimine ilişkin benzer düşünceleri dile getirmişler ve cebirsel veya aritmetiksel işlemler zincirini sondan başa doğru çözümleme düşüncesini içeren 'ters işlem kuralının' ters fonksiyon kavramını anlamak için yeterli olmadığını vurgulamışlardır. Bu yorumlar göstermektedir ki katılımcı öğretmenler fonksiyonlar konusunun öğrenimine ilişkin uluslararası literatürde kaydedilmiş olan bulgu ve düşüncelerle (Even, 1988; Even, 1992) kapsam ve içerik olarak oldukça benzer ve zengin bilgiler geliştirmiş bulunmaktadırlar. Katılımcı öğretmenlerin uluslararası literatürü takip etme olanağından yoksun olduklarını düşünürsek bu bilgileri kendi mesleki yaşamları boyunca yapmış oldukları gözlemler ve öğrencilerinin düşünce yolları üzerinde yürütmüş oldukları pedagoji içerikli yoğun düşünsel aktiviteler neticesinde geliştirmiş olabileceklerini söyleyebiliriz.

Ancak, çalışmanın bulguları fonksiyonlar konusu bağlamında öğrenci zorlukları ve yanılgılarına ilişkin aynı kalite ve içerikte bilgilere sahip olan öğretmenlerin konunun öğretim boyutuna ilişkin çok farklı pedagojiksel yaklaşımlar sergileyebileceklerini de göstermektedir. Ahmet, teşhis ettiği zorlukları ve kavram yanılgılarını giderebilmek için kavramlar arası ilişkilendirmeler yapma, fonksiyonların temsillerini bütünleşik olarak kullanma ve buluş yoluyla öğretim gibi farklı strateji ve modelleri işe koşarak öğrencilerin bilgiye ulaşmalarını kolaylaştıracak alternatifler sunmakta ve uygun öğrenme ortamları oluşturmaya çalışmaktadır. Bunlar Ahmet'in kavram eksenli bir öğretim yaklaşımını benimsediğini göstermektedir ki bu yaklaşım bireylerin kavramsal bilgiyi ancak ilişkilendirmeler yaparak geliştirebileceği düşüncesine dayanır (Heibert v.d., 1997). Ahmet'in verdiği yanıtlarda yapılan ilişkilendirmelerin iki boyutta geliştiği görülmektedir: kavramlar arası ilişkilendirmeler ve temsiller arası ilişkilendirmeler. Örneğin, öğrencinin $y=5$ ifadesinde gizli olan sabit fonksiyon düşüncesini anlaşılır kılmak için Venn-şeması ve grafik üzerinden açıklamalar yapmaktadır. Alternatif temsiller üzerinden açıklamalar yapmakla Ahmet öğrencinin sabit fonksiyon düşüncesini farklı açılardan görmesine olanak sağlamaktadır. Bu yaklaşımın öğrencideki fonksiyon bilgisinin gelişimine yatay bir boyut (fonksiyon kavramının farkı temsilleri arasındaki ilişkileri anlamada yeterlilik kazanmaları) kazandıracağını söyleyebiliriz. Aynı soruya vermiş olduğu yanıtın devamında ise sabit fonksiyon düşüncesinin – sabit fonksiyon tanım kümesindeki tüm elemanları değer kümesinde tek bir elemana eşler – fonksiyonun tanımıyla çelişmediği gerçeğini öğrencinin dikkatine sunmaktadır. Bunu yapmakla öğrencinin fonksiyonların bir alt kavramı olan sabit fonksiyon düşüncesini daha genel olarak algıladığımız fonksiyon düşüncesiyle kıyaslamasına ve bu ikisi arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları anlamasına olanak vermektedir. Bu ikinci yaklaşımın öğrencinin fonksiyon kavramının esasını ve özelliklerini anlama bağlamında derinlik kazanmasını destekleyeceği öngörüsünde bulunabiliriz.

Burak öğrenci zorluklarını ve bunların zihinsel sebeplerini oldukça isabetli bir şekilde tespit etmesine rağmen bu sorunları gidermek için pedagojiksel açıdan güçlü öğretim yaklaşımları sergilememektedir. Öğrencinin anlamakta zorlandığı bilgileri özel örnekler örnekler üzerinden sözel ifadelerle tekrar tekrar vurgulayarak hedefe ulaşmaya çalışmaktadır. Gerek kavramlar arası ilişkilendirmeler gerekse fonksiyonların temsillerini bütünleşik olarak kullanma gibi öğrencinin bilgiye ulaşmasını ve sözkonusu bilgiyi anlamlı bir şekilde öğrenmesini kolaylaştıracak pedagojiksel yaklaşımları tamamen ihmal etmektedir. Karşılaşılan sorunlu durumların izahı için Burakın zaman zaman analoji kullanımlarını tercih ettiğini görüyoruz. Bu durum temelde oldukça uygun bir pedagojiksel yaklaşım olarak değerlendirilebilir. Esas itibariyle matematiksel düşüncelerin uygun analojilerle öğrencilere iletilmesi bu çalışmanın teorik zeminini teşkil eden pedagojik alan bilgisi kavramının çok önemli bir bileşenidir (Shulman, 1986). Ancak, Burak'ın açıklamaları dikkatlice incelendiğinde görülecektir ki kullanılan analoji hedef kavramı temsil yeteneğinden yoksundur. Burak öğrencilerine sabit fonksiyonu önerilen bütün düşünceleri reddeden sabit fikirli bir adam gibi düşünmelerini salık vermektedir: "*Sabit fikirli adama ne söylersen söyle fikrini kesinlikle değiştirmez…bütün önerileri reddeder... Sabit fonksiyon da benzer şeydir. ...*". Bu ifadeler sabit fonksiyonu bütün girdileri (tanım kümesinin elemanlarını) geri yansıtan statik bir nesne olarak tanımlamaktadır ki bu durum öğrencilerin sözkonusu düşünceye ilişkin yeni kavram yanılgıları geliştirmelerine ve zihinsel kargaşalar yaşamasına sebep olabilir. Hâlbuki, Burak sabit fonksiyonu 'önerilen bütün düşünceleri (girdiler – tanım kümesinin elemanları) dinleyen, bu düşünceler üzerinde fikir yürütüp gerekli değerlendirmeleri (işlemler) yapan ve daha sonrada kendi isteği doğrultusunda tek bir sonuca (çıktı – görüntü) ulaşan' sabit fikirli bir adam olarak tanımlamış olsaydı bu durum öğrencilerin hedef kavramı anlamalarına yardımcı olabilirdi.

Netice olarak, bu araştırma bir özel olay çalışmasıdır; dolayısıyla burada sunulan bulgular araştırmanın örneklem grubu dışındaki öğretmenlere genellenemez. Ancak, mesleki tecrübesi olanların tahmin edebileceği gibi Burak'ın Türkiye'deki öğretmen profilini yansıttığını söyleyebiliriz. Bu öğretmen profilinin en belirgin özelliği öğrencilerin düşünce sistematiklerini, karşılaşabilecekleri zorlukları ve geiştirebilecekleri kavram yanılgılarını dikkate almadan kendi bilgilerini sunuş yoluyla öğrencilere aktarmayı tercih etmesidir. Bu durumun çok sayıda sosyal, kültürel, kurumsal ve öğretmenlerden kaynaklanan bilişsel (matematiğin doğasına ve öğretimine ilişkin inançlar, alan bilgisinin öğretim amaçlı yapılandırılmasında yaşanan zorluklar, v.s.) sebepleri olabilir. Söz konusu sebeplerin araştırlması için burada sunulan çalışmanın bir benzerinin daha geniş bir örneklem grubuyla ve farklı matematik konuları bağlamında yapılmasının gerekli olduğuna inanmaktayız. Elde edilecek bulgular ışığında Eğitim Fakülteleri bünyesinde uygulanan öğretmen yetiştirme programları ile Milli Eğitim Bakanlığı tarafından yürütülen hizmet içi eğitim kurslarının içeriklerinde gerekli düzenlemeler yapılabilir ve böylece öğretmenlerimizin sınıf içi öğretimlerde çok daha etkin olabilmeleri için ihtiyaç duydukları bilgi ve becerileri edinmelerinin önü açılmış olur.

Kaynakça

Ball, D. L. (1991). Research on Teaching Mathematics: Making Subject-Matter Knowledge Part of the Equation. In J. Brophy (Ed.), *Advances in Research on Teaching* (Vol. 2, pp. 1-48). Greenwich: JAI Press.

Bayazit, I., & Gray, E. (2004). Understanding Inverse Functions: The Relationship between Teaching Practice and Student Learning. In M. J. Honies & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen, Norway, Vol. 2, pp. 103-110.

Breidenbach, D., Dubinsky, Ed., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics*, 23(3), pp. 247-285.

Bromme, R. (1995). What Exactly Is Pedagogic Content Knowledge? Critical Remarks Regarding a Fruitful Research Program. In S. Hopmann & K. Riquarts (Eds.), *Didactic and/or Curriculum* (pp. 205-216). Schriftenreihe:Kiel.

Dede, Y., Bayazit, İ., & Soybaş, D. (2010). Öğretmen Adaylarının Denklem, Fonksiyon ve Polinom Kavramlarını Anlamaları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 18(1), 67-88.

DeMarois, P. & Tall, D.O. (1996). Facets and Layers of the Function Concept. *Proceedings of 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Valencia, Vol. 2, pp.297-304.

Dubinsky, Ed. & Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. In G. Harel & Ed. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-107). United States of America: Mathematical Association of America.

Eisenberg, T. (1991). Function and Associated Learning Difficulties. In D.O.Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 140-152). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Escudero, I., & Sanchez, V. (2002). Integration of Domains of Knowledge in Mathematics Teachers' Practice. In Cockburn & Nardi (Eds.,) *Proceedings of the 26 Conference of International Group of PME*, Vol. 2, pp. 177-184.

Even, R. (1988). Pre-service Teachers conceptions of the Relationships between Functions and Equations. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* XI (PME XII), Hungary.

Even, R. (1992). The Inverse Function: Prospective Teachers' Use of 'Undoing'. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 23(4), pp. 557-562.

Ginsburg, H. (1981). The Clinical Interview in Psychological Research on Mathematical Thinking: Aims, Rationales, Techniques. *For the Learning of Mathematics*, 1(3), pp. 57-64.

Heibert, J., & Lefevre, P. (1986). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Assocıates Inc.

Heibert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Oliver, A., & Human, P. (1997). A Day in teh Life of a Conceptually Based Instruction Classroom. In Paeke, L. (Ed.), *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding* (pp. 101-114). United States of America: Heinemann.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.

Lloyd, G. M., & Wilson, M. (1998). Supporting Innovation: The Impact of a Teacher's Conceptions of Functions on His Implementation of a Reform Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(3), 248-274.

Malik, M. A. (1980). Historical and Pedagogical Aspects of the Definition of Function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 11(4), 489-492.

Markovits, R., Eylon, B. S., & Brukheimer, M. (1986). Functions Today and Yesterday. *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 18-28.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis: An Expanded Sourcebook*. London: Sage Publications.

Özmantar. M. F., & Bingölbali, E. (2010). Sınıf Öğretmenleri ve Matematiksel Zorlukları. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 8(2), 401-427.

Phillips, N. & Hardy, C. (2002). *Discourse Analysis: Investigating Processes of Social Construction*. United Kingdom: Sage Publications Inc.

Schwingendorf, K., Hawks, J., & Beineke, J. (1992). Horizontal and Vertical Growth of the Students' Conception of Function. In G. Harel & Ed. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 133-151). United States of America: Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1992). Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification-The Case of Function. In Harel & Ed. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 59-85). United States of America: Mathematical Association of America.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15, pp. 4-14.

Smart, T. (1995). Visualising Quadratic Functions: A Study of Thirteen-Year-Old Girls Learning Mathematics with Graphic Calculators. In L. Meira & D.

Carraher (Eds.) *Proceeding of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Brazil: Atual Editora Ltda, Vol. 2, pp. 272-279.

Tall, D. & Bakar, M. (1992). Students' Mental Prototypes for Function and Graphs. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 23(1), pp. 39-50.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 151-169.

Tirosh, D., Even, R., & Robinson, N. (1998). Simplifying Algebraic Expressions: Teacher Awareness and Teaching Approaches. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 51-64.

Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), pp. 293-305.

Watkins, C. & Mortimore, P. (1999). Pedagogy: What Do We Know? In P. Mortimore (Ed.), *Understanding Pedagogy and its Impact on Learning* (pp. 1-20). London: Paul Chapman Publishing Ltd.

Wilson, S. M., Shulman, L. S. & Richert, A. E. (1987). '150 Different Ways' of Knowing: Representations of Knowledge in Teaching'. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring Teachers' Thinking* (pp. 104-124). London: Cassel Education Ltd.

Yerushalmy, M. & Schwartz, J. L. (1993). Seizing the Opportunity to make Algebra Mathematically and Pedagogically Interesting. In Romberg, T. A., Fennema, E., & Carpenter, T. P. (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions* (pp. 41-68). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Yeşildere, S. & Akkoç, H. (2010). Matematik Öğretmen Adaylarının Sayı Örüntülerine İlişkin Pedagojik Alan Bilgilerinin Konuya Özel Stratejiler Bağlamında İncelenmesi. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 29(1), 125-149.

Yin, R. K. (2003). *Case Study research: Design and methods*. United Kingdom: Sage Publications Ltd.

Teachers' Pedagogical Indications about The Concept of Function and Its Teaching

Introduction

The notion of function has often been used as an orginising principle in the teaching of mathematics from elementary school to undergraduate level (Yerushalmy ve Schwarz, 1993). The central importance of the functions in mathematics curriculum has prompted interest in studying students' understanding of this notion from various perpectives (see, for instance, Vinner, 1983; Markovits, v.d., 1986; Breidenbach v.d., 1992; Dubinsky ve Harel, 1992; DeMarois ve Tall, 1996; Bayazit ve Gray, 2004). These studies indicated that studenst at all levels have great difficulties in understanding the concept, and they possess various miscocneptions associated with this notion. For instance, students wrongly believe that a function is an algebraic equation including variables *x* and *y*. Those who possess this sort of limited conception reject the idea of cosnatnt function in the algebraic form (for instance, *y=2*) (Tall ve Bakar, 1992). Many students also consider that a graph of a function is a contious line ot curve whilst some display a lack of understanding concerning the qualitative distinctions vbetween the concepts of function and equation. Epistemological complexity of the functions and the diversity of representations used are the two main factors that make the concept difficult for students to learn (Eisenberg, 1991).

So, how could the teaching community help students develop a better understanding of the functions? The experimental study of DeMarois ve Tall'un (1999) indicated that teaching approaches based upon constructivist learning theory would support students' vertical (depth of understanding) and horizontal (breadth of knowledge across the representations) growth of the function concept. Schwingendorf et al (1992) and Smart (1995) indicated that technology-entegrated teaching approaches would support students' flexibilit to think of a function as a process transforming inputs to outputs and encaourgaes their visual ability to establish relations between algebraic and graphical representations of a function. No matter what sort of instructional approaches and the technological devises are used, teachers need to have conceptually rich and flexible knowledge system to be effective in classroom teaching. In this respect, three components of teacher knowledge system are given a particular attention and these include subject-matter knowledge, pedagogical knowledge, and pedagogical content knowledge. Subject-matter knowledge refers to teacher's understanding of mathematical concepts, principles, associated rules and proedures, and the validity of the information in the domain (Shulma, 1986). It is the amount and organisation of knowledge in the mind of a teacher. Subject matter understanding is essential but not sufficient to facilitate meaningful learning (Ball, 1991). Teachers need to have enough pedagogical knowledge which includes, primarily, knowledge of teaching and learning theories, knowledge of learners, and knowledge of classroom behaviour and management techniques Wilson et al (1987). According to Watkins and Mortimore (1999) pedagogical knowledge entails any conscious activity by one person designed to enhance learning in others. Pedagogical knowledge provides useful techniques and principles for classroom practices, yet it does not illustrate how these techniques and principles could be applied to teaching particular mathematical topics. Shulman (1986) suggest that teachers need most pedagogical content knowledge (PCK) to lead meaningfull learning in their classess. PCK draws upon two basic sources: subject matter and pedagogy; in fact it is the special amalgam of these two knowledge systems. Simply defining PCK refers to teacher's expertise at orginising and presenting subject matter in a way that makes it comprehensible to the learners. According to Shulman (1986) PCK includes "*for the most regularly taught topic in one's subject area, the most useful form of representation of those ideas, the most powerful analogies, illustrations, examples, explanations and demonstrations…*" (p. 9). It includes an understanding of the conceptions and misconceptions that the stduensts of different ages and background bring with them to the lessons (Wilson vd., 1987; Bromme, 1995).

This paper examines two aspects of teachers' PCK. The first aspect includes teachers' awareness of their students' difficulties and misconceptions associated with the notion of function and their sources. The second aspect includes teachers' pedagogical suggestions to help their studnets overcome these obstacles.

Reaserach Method

The research employed a qualitative case study (Yin, 2003) and used semi-structured interviews as the main source of data. Adopted from the literature five questions were used for the interview. The participants were two experienced mathematics teachers (Ahmet: 25 years teaching experience, Burak: 24 years teaching experience; teachers' names are altered). Each teacher was interviewed for about an hour. Interviews were teyp-recorded and annotated field notes were taken during and right after the interviews. Data were analysed using the methods of content and discourse analysis (Miles & Huberman, 1994; Philips ve Hardy, 2002). Overall, the notion of PCK provided a theoretical framework for the analysis. Tecahers' interviews were fully transcribed and the analysis was carried out on these docments. The fisrt phase of analysis included attributing codes (brief descriptions) to the meaning embedded in the teachers' resposnses; for inatnce: Ahmet: Establishes Connections between the Representtions, Burak: Provides Verbal Explanations, Emphasises Factual Knowledge. Reapeted on different copies of the text this process led to collection of the themes emerged from the teachers' answers under more general categories. To avoid subjectivity which might be raised from the researcher another mathematics educator (co-analyser) was involved in the analysis process.

Research Findings

An analysis of the data sets indicated that there was almost no difference between the teachers at diagnosing their students' difficulties and misconceptions associated with the concept of function. However, they differed significantly at providing pedagogical supports. Ahmet's pedagogical treatments were distinguished by the connections that he established between the ideas and between the representations. In contrast, Burak favoured lecturing style teaching approach and provided verbal explanations through the tasks given. For insance, the teachers were invited to consider the statement: '*Suppose that one of your students does not accept the expression y=5 as a function*' and asked to respond in two ways:

a) What it was the student had in mind? Why he/she reject the stuation?
b) How would you respond to the student?

There was strong similarity in the teachers' recognition of the sources of student's mistake. Both suggested that this student is not able to see an 'all-to-one' transformation in the algebraic expression; and they pointed out that absence of *x* in the situation was the major factor that caused student's rejection of the situation. Nevertheless, in response to the second part of the question the teachers revealed two different teaching approaches. Ahmet's pedagogical treatment not only included re-explanaing the situation through alternative representations, but it also indicated his commitment to relate the idea of constant function (a sub-notion of function) to the concept definition. Ahmet says:

> *I draw two sets (diagrams)…then I would match all the elements in the domain to the same element, 5… I would sketch the graph of y=5 and explain that whatever we substitute into y=5, it goes to a single element… …. I emphasise also that this situation [all-to-one matching] is in agreement with the definition of the function. ...*

Burak's pedagogical treatment included provision of verbal explanation through the expression given: "*I tell him that no matter whatever we substitute into this function, it gives out the same thing (5); yes we can explain like this…*". In addition, he offered an analogy: "*I suggest him to think of the constant function like a fixed minded person...no matter whatever you say he/she does not change his mind…*". The way that the analogy is presented falls short of contributing to the student's understanding, because the teacher does not clarify the elements in the analogy that correspond to those of the constant function.

The following task was used to explore tecahers' recognitions of the sources of their students' difficulties with the idea of inverse function and their pedagogical approaches to help their stdunest overcome this obstacle:

> When asked is it possible to reverse the function $f{:}IR \rightarrow IR$, $f(x)=x^2$ one of your students says 'yes' and gives the answer $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$.

Both teachers identified the student's mistake as '*applying the idea of inverse operation*' to the task at hand – reversing the function by inverting the sequence of operations in the rule of functinon going from the end to the beginning. For instance, Burak said: "*As they see the square of x, they automatically carry out the inverse operation and take the square root of x*". Nevertheless, their suggestions for pedagogical treatment were quite diffeent. Ahmet suggested to use the graph of $f(x)=x^2$ and stated his belief that that this strategy would be more productive because it allows students to visualise the transformations that the function $f(x)=x^2$ and its inverse do in relation to each other. Burak provided verbal explanation using specific inputs and output: "*...f(x)=x² matches two elements, say -1 and 1, to the same element, 1. .... The inverse of this function matches an elemen of the domain to two elements…and this contradicts…the definition...* ***Students are not able to see this relation in the algebraic situation****....*". In the last sentences Burak suggests that it would be difficult for students to see transformation process in the algebraic expression; however, he does not use alternative representations, such as Cartesian graphs, to make the process of function and the inverse of that process more explixit for the students.

Concluding Remarks

From the above evidence we conclude primarily that the tecahers do not differ in diagnosing the studnets' difficulties and miscocneptions associated with the function concept. They display more or less the same quality of understanding as to the students' way of thinking and their sources. For instance, both interpret student's difficulty with the constant function as his/her inability to see an 'all-to-one' transformation behind an algebaric expression. Reflecting upon the student's mistake with the inverse function they suggest that studnet makes mistake because he/she applies the idea of inverse operation to the task at hand. From a conceptual perspective they interpret this mechanical act as the indicator of student's deficiency in conceiving the process of $f(x)=x^2$ and the inverse of this process in the light of concept definition. They reveal, however, two qualitatively different teaching suggestions. Ahmet always prefer to utilise alternative representations and establishes connections bwteeen the ideas. He tries to employ a sort of discovery-oriented teaching approach and gives his students an opportunity to revise and re-construct their knowledge of functions. In contrast, Burak employs lecturing style teaching and provides verbal explanations through the tasks given. His pedagogical treatment is restricted to repetition of rules, procedures and factual knowledge. He does not make attempts to establish connections between the ideas and between the representations. Burak offers analogies but this strategy falls short of contributing to students' understanding, since Burak does not clarify nor does he encourahge his students to establish connections between the sourse analogue and the targeted concepts (function releated ideas). The analogy would promote students' understanding providing that the teacher had introduced human mind a conatant function (process), receiving all the ideas (inputs), processing (reasoning) them, and then reaching out a single conlusion (an output).

This study employed a qualitative inquiry, thus the research findings cannot be generalised beyond the research sample. Burak's case suggests, however, that teachers would be well aware of their students' difficulties and misconceptions associated with a mathematical concept, yet they may not give attention to these obstacles during their teachings. More importantly there could be a tention between the teachers' theoretical interpretations and their pedagogical indications, and this tension might be posed by the external or internal factors, such as school culture, exam systems, and the teachers' deficiency at reconstructing their subject matter knowledge for classroom practices. It is believed that further research that investigates the interplay between the tecahers' theoretical interpretations and their pedagogical suggestions for teaching and the role of external and internal factors on this relation would make remarkable contribution to an ongoing reform movement within the education system.