BAÜ FBE Dergisi
Cilt:12, Sayı:1, 91-99
Temmuz 2010

Bazı Sonlu Klingenberg Düzlemleri İçin Üzerinde Olma Matrisleri

Atilla AKPINAR*
Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Görükle, Bursa.

Özet

Bu çalışmada; p bir asal sayı, k bir pozitif tamsayı ve $q = p^k$ *olmak üzere, hem* Z_q *Hjelmslev halkası ile koordinatlanan* (p^{k-1}, p) *parametreli sonlu projektif Hjelmslev düzlemleri hem de bir H-ring olmayan* $Z_q + Z_q\,\varepsilon$ *lokal halkası ile koordinatlanan* (p^{2k-1}, p) *parametreli sonlu projektif Klingenberg düzlemleri için birer üzerinde olma matrisi vereceğiz.*

Anahtar kelimeler: *Sonlu Hjelmslev düzlemleri, Sonlu Klingenberg düzlemleri, üzerinde olma matrisi.*

The Incidence Matrices For Some Finite Klingenberg Planes

Abstract

In this study we give one each incidence matrix for both finite projective Hjelmslev planes of parameters (p^{k-1}, p) *coordinatized by Hjelmslev ring* Z_q *and finite projective Klingenberg planes of parameters* (p^{2k-1}, p) *coordinatized by an local ring* $Z_q + Z_q\,\varepsilon$ *which is not a H-ring, where p is a prime number, k is a positive integer and* $q = p^k$.

Keywords: *finite Hjelmslev planes, finite Klingenberg planes, incidence matrix.*

* Atilla AKPINAR, aakpinar@uludag.edu.tr, Tel: (224) 2941774.

1. Giriş

Projektif Klingenberg düzlemleri ve projektif Hjelmslev düzlemleri alışageldiğimiz projektif düzlemlerin bir genellemesidir. Bu yapılar ilk olarak Klingenberg tarafından tanıtılmıştır [1, 2]. Drake ve Lenz [3], tarafından tanıtılan sonlu PK-düzlemleri ise detaylı olarak Bacon tarafından incelenmiştir [4].

Daha önceki çalışmalarımızda; p bir asal sayı, k bir pozitif tamsayı ve $q = p^k$ olmak üzere, Z_q Hjelmslev halkası ile koordinatlanan (p^{k-1}, p) parametreli sonlu projektif Hjelmslev düzlemlerinde bir doğrunun komşuluk sınıfı ile ilgili bazı sayısal özellikler elde etmiştik [5] ve de bir H-ring olmayan $Z_q + Z_q\,\varepsilon$ lokal halkası ile koordinatlanan (p^{2k-1}, p) parametreli sonlu projektif Klingenberg düzlemlerinde 4-geçişkenliğin geçerli olduğunu göstererek 6-şekiller ile ilgili bazı sayısal özellikler elde etmiştik [6, 7].

Bu çalışmada ise [5-7] de ele aldığımız geometrik yapılar olan (p^{k-1}, p) parametreli sonlu projektif Hjelmslev düzlemleri ile (p^{2k-1}, p) parametreli sonlu projektif Klingenberg düzlemleri için birer üzerinde olma matris örneği vereceğiz. Bunun için $p = 2$ ve $k = 2$ alarak (yani $q = 2^2$ alarak) ilk olarak (2, 2) parametreli sonlu projektif Hjelmslev düzlemi daha sonra da (8, 2) parametreli sonlu projektif Klingenberg düzlemi elde edeceğiz. Son olarak da bu elde ettiğimiz iki düzlem için üzerinde olma matrislerini oluşturacağız.

2. Lokal alterne halkalar ve PK-düzlemleri

N noktalar kümesini, D doğrular kümesini, $\in$ üzerinde olma bağıntısını ve $\sim$ N ve D üzerinde bir denklik (komşuluk) bağıntısını göstermek üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir $\mathbf{M} = (N, D, \in, \sim)$ yapısına bir projektif Klingenberg düzlemi denir ve kısaca PK ile gösterilir.

(PK1) Komşu olmayan herhangi iki $A,B\in N$ noktası için $A\in d$ ve $B\in d$ olacak biçimde tam olarak bir $d\in D$ doğrusu vardır.

(PK2) Komşu olmayan herhangi iki $c,d \in D$ doğrusu için $N\in c$ ve $N\in d$ olacak biçimde tam olarak bir $N\in N$ arakesit noktası vardır.

(PK3) $\mathbf{M}$ nin kanonik görüntüsü denilen bir $\mathbf{M}^* = (N^*, D^*, \in)$ projektif düzlemi ile; her $A,B\in N$ ve her $c,d\in D$ için

$$\Psi(A) = \Psi(B) \Leftrightarrow A \sim B \text{ ve } \Psi(c) = \Psi(d) \Leftrightarrow c \sim d$$

şartlarını sağlayan bir $\Psi: \mathbf{M}\to\mathbf{M}^*$ geometrik yapı epimorfizmi vardır.

$\mathbf{M}$ bir PK-düzlem iken $\mathbf{M}^*$ kanonik görüntü bir Moufang düzlemi ise $\mathbf{M}$ ye bir Moufang Klingenberg düzlemi denir ve kısaca MK ile gösterilir.

$\mathbf{M}$ PK-düzlemi aşağıdaki şartları da sağlarsa $\mathbf{M}$ ye bir projektif Hjelmslev düzlemi denir ve kısaca PH ile gösterilir:

(PH1) Komşu iki noktayı birleştiren en az iki doğru vardır.

(PH2) Komşu iki doğrunun en az iki arakesit noktası vardır.

Eğer $A \sim B$ ve $B\in d$ olacak şekilde bir $B\in N$ noktası varsa $A\in N$ noktası $d\in D$ doğrusunun yakınındadır denir. Bir nokta bir doğruya komşu olamayacağından bu durumu da $A \sim d$ ile göstermemizde sakınca yoktur.

Özdeşlikli bir (alterne) halkanın birim olmayan elemanların **I** kümesi bir ideal ise halkaya lokal (alterne) halka denir.

Aşağıdaki şartları sağlayan bir **R** lokal halkasına Hjelmslev halkası denir ve kısaca H-ring olarak yazılır:
(HR1) **I** sol ve sağ sıfır bölenlerin kümesidir.
(HR2) $a,b\in$ **I** için $a\in b$**R** ya da $b\in a$**R** dir ve $a\in$ **R**b ya da $b\in$ **R**a dır.

Böylece, [1] den aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.1. **R** bir lokal halka ve **M**(**R**) **R** üzerinde bir Dezargsel PK-düzlem olsun. Bu takdirde **R** nin bir H-ring olması için gerek ve yeter şart **M**(**R**) nin bir PH-düzlem olmasıdır.

Şimdi, [8] den MK-düzlemlerinin koordinatlanması ile ilgili bazı bilgileri aşağıda özet olarak vereceğiz.

R bir lokal alterne halka olsun. Bu takdirde **M**(**R**) = (N, D, $\in$, $\sim$) aşağıdaki gibi tanımlanan komşuluk bağıntısı ile birlikte bir üzerinde olma yapısı oluşturur.

$N = \{(x,y,1) \mid x,y\in \mathbf{R}\} \cup \{(1,y,z) \mid y\in \mathbf{R}, z\in \mathbf{I}\} \cup \{(w,1,z) \mid w,z\in \mathbf{I}\}$,
$D = \{[m,1,p] \mid m,p\in \mathbf{R}\} \cup \{[1,n,p] \mid p\in \mathbf{R}, n\in \mathbf{I}\} \cup \{[q,n,1] \mid q, n\in \mathbf{I}\}$.

$[m,1,p] = \{(x,xm+p,1) \mid x\in \mathbf{R}\} \cup \{(1,zp+m,z) \mid z\in \mathbf{I}\}$,
$[1, n, p] = \{(yn+p,y,1) \mid y\in \mathbf{R}\} \cup \{(zp+n,1,z) \mid z\in \mathbf{I}\}$,
$[q, n, 1] = \{(1,y,yn+q) \mid y\in \mathbf{R}\} \cup \{(w,1,wq+n) \mid w\in \mathbf{I}\}$.

$A = (x_1,x_2,x_3) \sim (y_1,y_2,y_3) = B \Leftrightarrow$ $i=1, 2, 3$ için $x_i\text{-}y_i\in \mathbf{I}$,
$c = [x_1,x_2,x_3] \sim [y_1,y_2,y_3] = d \Leftrightarrow$ $i=1, 2, 3$ için $x_i\text{-}y_i\in \mathbf{I}$.

Bu çalışmada, üzerinde çalışacağımız sonlu düzlemler için yukarıda verilen koordinatlama kullanılacaktır. Bu koordinatlama hakkında daha fazla bilgi için [8, 9] a bakılabilir.

Şimdi lokal alterne halkalar kümesi ile MK-düzlemlerinden oluşan küme arasında bire bir eşlemenin varlığını belirten aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 2.2. Her lokal alterne halkaya karşılık bununla koordinatlanabilen bir MK-düzlemi vardır ve tersine her MK-düzlemine karşılık bir lokal alterne halka bulunabilir [9].

Drake ve Lenz [3], aşağıda vereceğimiz sonucun PK-düzlemler için doğru olduğunu göstermiştir. Üstelik, bu sonuç Kleinfeld [10], ve Lüneburg [11], tarafından PH-düzlemleri için verilen sonuçların bir genellemesidir.

Sonuç 2.3. **M**(**R**) bir sonlu PK-düzlem olsun. Bu takdirde, **M**(**R**) üzerinde olma yapısı ile tek olarak belirli olan ve **M**(**R**) nin parametreleri olarak isimlendirilen t ve r doğal sayıları için **M**(**R**) de aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. Her noktanın (doğrunun) komşuluğunda t^2 nokta vardır.
2. $N \in d$ özelliğinde verilen bir N noktası ve bir d doğrusu için, d nin üzerinde olup N ye komşu olan tam olarak t nokta vardır ve N den geçip d ye komşu olan tam olarak t doğru vardır.
3. $\mathbf{M}^*$ projektif düzleminin mertebesi r olsun. Şayet $t \neq 1$ ise $r \leq t$ dir (bu takdirde $\mathbf{M}(\mathbf{R})$ PK-düzlemi has olarak isimlendirilir, şayet t = 1 ise $\mathbf{M}(\mathbf{R})$ alışageldiğimiz bir projektif düzlem olur.)
4. Her doğru t(r+1) nokta kapsar ve dual olarak her noktadan t(r+1) doğru geçer.
5. $|N| = |D| = t^2(r^2+r+1)$ dir.

t ve r parametreli bir sonlu PK-düzlem (t, r) parametreli PK-düzlem olarak ifade edilecektir.

2.1. Z_q lokal halkası ve $\mathbf{M}(Z_q)$ *PH-düzlemi*

p bir asal sayı, k bir pozitif tamsayı ve $q = p^k$ olmak üzere, $\mathbf{Z_q}$ Hjelmslev halkasını göz önüne alalım. $\mathbf{Z_q}$ nun elemanlarını, $\mathbf{Z_q}$ nun birim elemanlarının kümesi U' ve birim olmayan elemanlarının kümesi $\mathbf{I}'$ olmak üzere, $\mathbf{Z_q} = U' \cup \mathbf{I}'$ olarak yazabiliriz. Burada $\mathbf{I}' = \{0p, 1p, 2p, \ldots, (p^{k-1}-1)p\} = p\,\mathbf{Z_q}$ olduğu ve bu yüzden de $|\mathbf{I}'| = p^{k-1}$ olduğu açıktır. $\mathbf{Z_q}$ bir has lokal halka ve $\mathbf{Z_q}/\mathbf{I}' = Z_p$ olduğundan Ψ epimorfizmi sonlu $\mathbf{M}(\mathbf{Z_q})$ PK-düzleminden Z_p cismi ile koordinatlanan p mertebeli Dezargsel projektif düzlem üzerine bir üzerinde olma yapı epimorfizmidir [12].

Böylece, [5] den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.1.1. $\mathbf{M}(\mathbf{Z_q})$ sonlu PK-düzlemi için Sonuç 2.3 deki t ve r paremetreleri sırasıyla p^{k-1} ve p dir.

$\mathbf{Z_q}$, $\mathbf{I}'$ maksimal idealli bir H-ringdir [12]. Teorem 2.1 gereği de $\mathbf{M}(\mathbf{Z_q})$ bir PH-düzlemdir.

2.2. $R{:=}Z_q + Z_q\varepsilon$ lokal halkası ve $\mathbf{M}(R)$ *PK-düzlemi*

$\varepsilon \notin Z_q$ ve $\varepsilon^2 = 0$ olsun. Bu takdirde $\mathbf{R} := Z_q + Z_q\varepsilon$ bileşen bileşene toplama ve aşağıdaki gibi tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte,

$$(a_1+a_2\varepsilon)(b_1+b_2\varepsilon) = a_1b_1+(a_1b_2 + a_2 b_1)\varepsilon, \quad (a_i, b_i \in Z_q,\ i = 1, 2)$$

birim olmayan elemanların kümesi $\mathbf{I} := \mathbf{I}' + Z_q\varepsilon$ olan bir lokal halkadır. Burada $|\mathbf{I}| = p^{k-1}p^k$. Üstelik, $\mathbf{R}$ nin birim elemanlarının kümesi $\mathbf{U} := U' + Z_q\varepsilon$ ve $|\mathbf{U}| = (p^k-p^{k-1})p^k = (p-1)p^{2k-1}$ dir. $\mathbf{R}$ bir has lokal halka ve $\mathbf{R}/\mathbf{I} = Z_p$ olduğundan Ψ epimorfizmi sonlu $\mathbf{M}(\mathbf{R})$ PK-düzleminden Z_p cismi ile koordinatlanan p mertebeli Dezargsel projektif düzlem üzerine bir üzerinde olma yapı epimorfizmidir [12].

$\mathbf{M}(\mathbf{R})$ genel olarak bir H-ring değildir [6].

Böylece, [6] dan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.2.1. $\mathbf{M}(\mathbf{R})$ sonlu PK-düzlemi için Sonuç 2.3. deki t ve r parametreleri sırasıyla p^{2k-1} ve p dir.

3. Üzerinde olma matrisleri

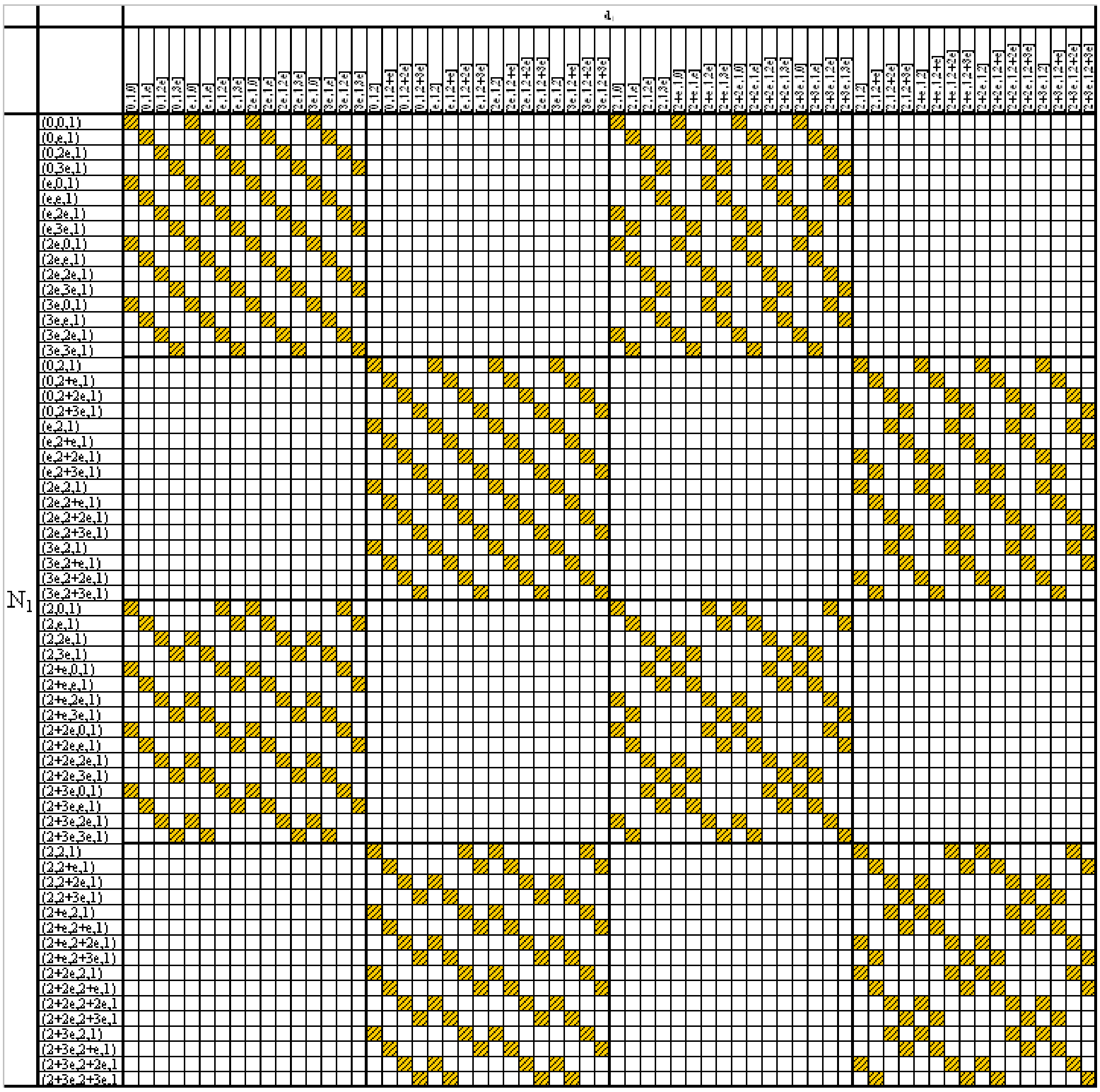
Nokta ve doğrular için üzerinde olma bağıntılarını kullanarak (2, 2) parametreli PH-düzlemin üzerinde olma matrisi Tablo 1'deki biçimde elde edilir.

Tablo 1. (2,2) parametreli PH-düzlemin üzerinde olma matrisi.

		d_1				d_2				d_3				d_4				d_5				d_6				d_7			
	Z_2^2	[0,1,0]	[0,1,2]	[2,1,0]	[2,1,2]	[0,1,1]	[0,1,3]	[2,1,1]	[2,1,3]	[1,1,0]	[1,1,2]	[3,1,0]	[3,1,2]	[1,1,1]	[1,1,3]	[3,1,1]	[3,1,3]	[1,0,0]	[1,0,2]	[1,2,0]	[1,2,2]	[1,0.1]	[1,0,3]	[1,2,1]	[1,2,3]	[0,0,1]	[0,2,1]	[2,0,1]	[2,2,1]
N_1	**(0,0,1)**																												
	(0,2,1)																												
	(2,0,1)																												
	(2,2,1)																												
N_2	**(0,1,1)**																												
	(0,3,1)																												
	(2,1,1)																												
	(2,3,1)																												
N_3	**(1,0,1)**																												
	(1,2,1)																												
	(3,0,1)																												
	(3,2,1)																												
N_4	**(1,1,1)**																												
	(1,3,1)																												
	(3,1,1)																												
	(3,3,1)																												
N_5	**(1,0,0)**																												
	(1,0,2)																												
	(1,2,0)																												
	(1,2,2)																												
N_6	**(1,1,0)**																												
	(1,1,2)																												
	(1,3,0)																												
	(1,3,2)																												
N_7	**(0,1,0)**																												
	(0,1,2)																												
	(2,1,0)																												
	(2,1,2)																												

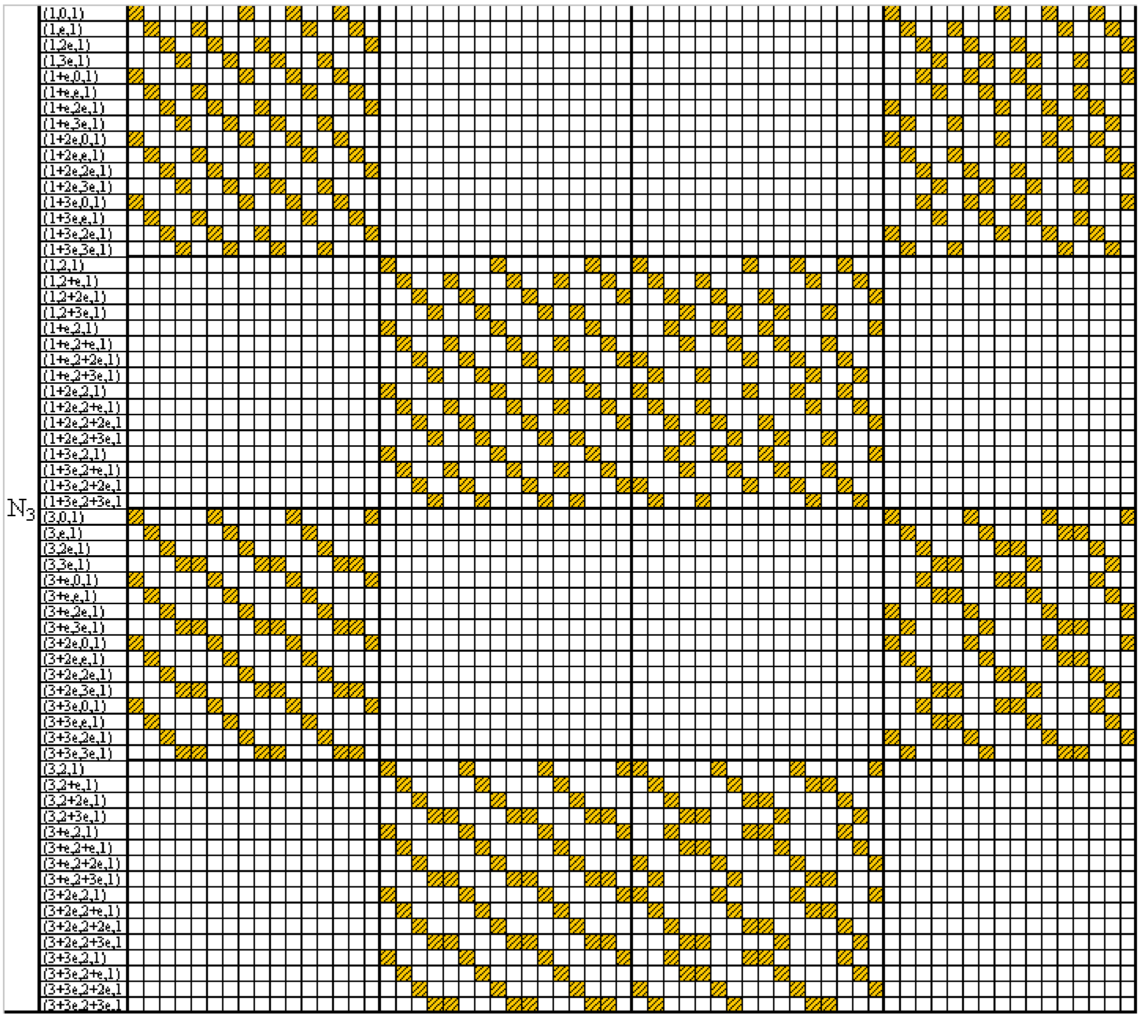
Nokta ve doğrular için üzerinde olma ve komşuluk bağıntılarını kullanarak (8, 2) parametreli PK-düzlemin üzerinde olma matrisi kısmen verilebilmiştir. Şekil 1, 2 ve 3'de sadece d_1 doğrusunun komşuluk sınıfı gösterilebilmiştir. d_1 doğrusunun noktaları Tablo 1'deki gibi yine N_1, N_3 ve N_5 noktalarından oluşmaktadır. Gösterimi kolaylaştırmak için d_1 doğrusunun üzerinde olmayan diğer noktalarını üzerinde olma tablosundan atarak d_1 doğru sınıfının N_1 komşuluğunu Şekil 1, d_1 doğru sınıfının N_3 komşuluğunu Şekil 2 ve d_1 doğru sınıfının N_5 komşuluğunu Şekil 3 ile veriyoruz. Böylece Şekil 1, 2 ve 3 alt alta getirilerek d_1 doğru sınıfının tüm üzerinde olmaları ortaya çıkarılmış olur. Şekil 1, 2 ve 3 e "epsilon" sembolü yerleştiremediği için yerine e harfi kullanılmıştır.

Şekil 1'in 2. satırında dikey olarak yazılan d_1 doğru sınıfının toplam 64 doğrusu soldan sağa doğru aşağıdaki biçimdedir:
[0,1,0,], [0,1,e], [0,1,2e], [0,1,3e], [e,1,0], [e,1,e], [e,1,2e], [e,1,3e], [2e,1,0], [2e,1,e], [2e,1,2e], [2e,1,3e], [3e,1,0], [3e,1,e], [3e,1,2e], [3e,1,3e], **[0,1,2]**, [0,1,2+e], [0,1,2+2e], [0,1,2+3e], [e,1,2], [e,1,2+e], [e,1,2+2e], [e,1,2+3e], [2e,1,2], [2e,1,2+e], [2e,1,2+2e], [2e,1,2+3e], [3e,1,2], [3e,1,2+e], [3e,1,2+2e], [3e,1,2+3e], **[2,1,0]**, [2,1,e], [2,1,2e], [2,1,3e], [2+e,1,0], [2+e,1,e], [2+e,1,2e], [2+e,1,3e], [2+2e,1,0], [2+2e,1,e], [2+2e,1,2e], [2+2e,1,3e], [2+3e,1,0], [2+3e,1,e], [2+3e,1,2e], [2+3e,1,3e], **[2,1,2]**, [2,1,2+e], [2,1,2+2e], [2,1,2+3e], [2+e,1,2], [2+e,1,2+e], [2+e,1,2+2e], [2+e,1,2+3e], [2+2e,1,2], [2+2e,1,2+e], [2+2e,1,2+2e], [2+2e,1,2+3e], [2+3e,1,2], [2+3e,1,2+e], [2+3e,1,2+2e], [2+3e,1,2+3e].



Şekil 1. (8, 2) parametreli PK-düzlemin d_1 doğru sınıfının N_1 komşuluğu ile ilgili üzerinde olma matrisi.

Yukarıda belirtilen d_1 doğru sınıfının 64 doğrusu içinde koyu olarak belirtilen doğrular Tablo 1'deki (2, 2) parametreli PH-düzlemin d_1 doğru sınıfını oluşturduğuna dikkat ediniz. Bu doğru sınıfları belirlenirken iki doğrunun aynı komşulukta olması için gerek ve yeter şart aynı sıradaki bileşenleri farkının çalıştığımız halkanın idealinde kalması olarak alındığını unutmayınız. Nokta sınıfları da belirlenirken doğrularda kullandığımız komşuluk bağıntısı benzer biçimde noktalar için de kullanılmıştır.



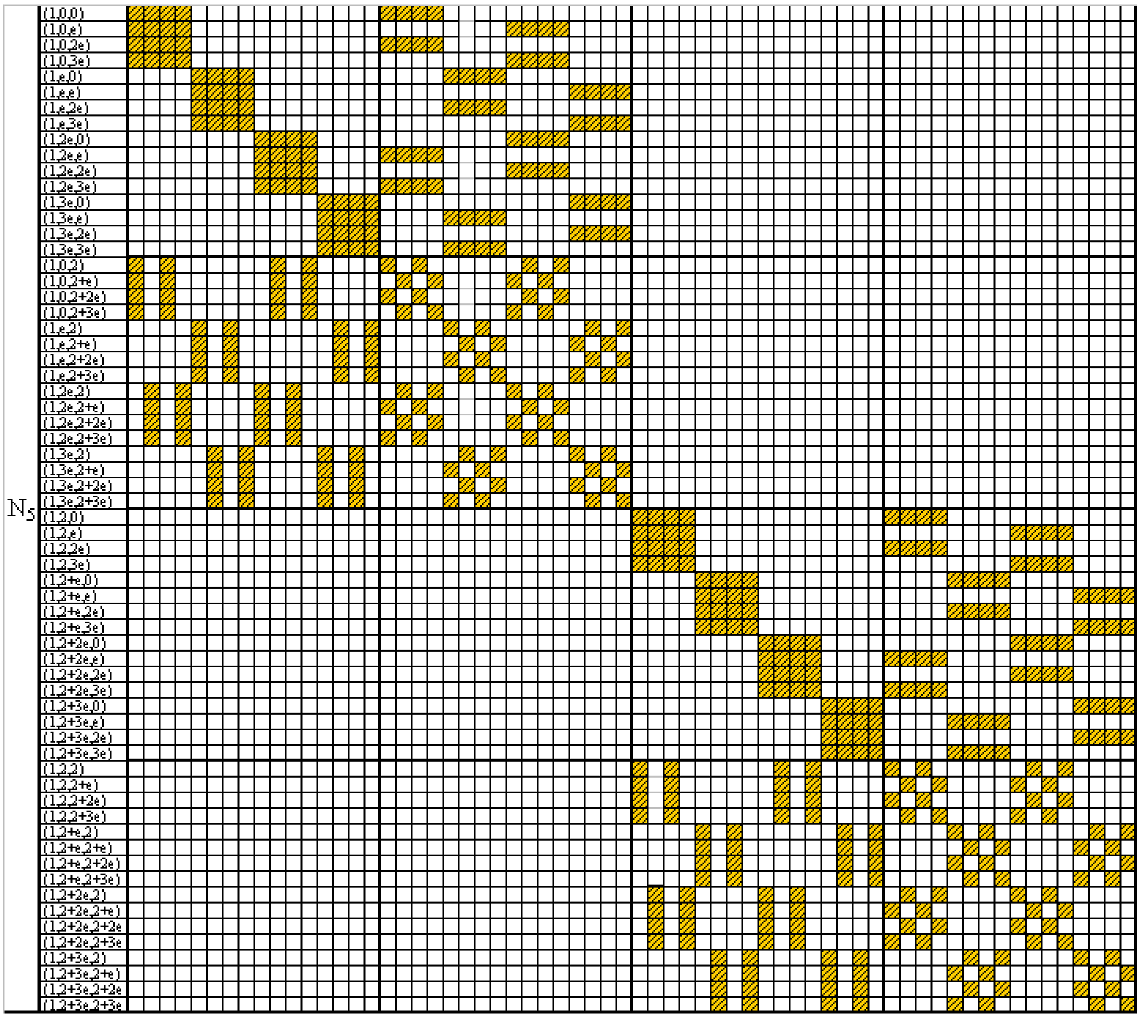
Şekil 2. (8, 2) parametreli PK-düzleminin d_1 doğru sınıfının N_3 komşuluğu ile ilgili üzerinde olma matrisi.

Verilen noktanın, üzerinde olma bağıntıları yardımıyla, verilen doğrular üzerinde olup olmadığına dair aşağıda üç örnek veriyoruz:

$(1,0,0) \in [\mathbf{1},0,1] \Leftrightarrow$ $1.\mathbf{1} = 0.0 + 0.1$ olup $1 \neq 0$ olduğundan (1,0,0) noktası $[\mathbf{1},0,1]$ doğrusu üzerinde değildir, bu durumda üzerinde olma tablosunda bu noktanın bulunduğu satır ile bu doğrunun bulunduğu kolonun arakesiti boş bırakılır (bkz. Tablo 1).

$(2,0,1) \in [2,\mathbf{1},0] \Leftrightarrow$ $0.\mathbf{1} = 2.2 + 0.0 = 4 \equiv 0 \pmod{\mathbf{Z}_{2^2}}$ olup $0 = 0$ olduğundan (2,0,1) noktası $[2,\mathbf{1},0]$ doğrusu üzerindedir, bu durumda üzerinde olma tablosunda bu noktanın bulunduğu satır ile bu doğrunun bulunduğu kolonun arakesiti boyanır (bkz. Şekil 1 ve bkz. Tablo 1).

$(3,\varepsilon,1) \in [2,\mathbf{1},2+\varepsilon] \Leftrightarrow$ $\varepsilon.\mathbf{1} = 3.2 + 1.(2+\varepsilon) = 8+\varepsilon \equiv 0 \pmod{\mathbf{Z}_{2^2}}$ olup $\varepsilon = \varepsilon$ olduğundan $(3,\varepsilon,1)$ noktası $[2,\mathbf{1},2+\varepsilon]$ doğrusu üzerindedir, bu durumda üzerinde olma tablosunda bu noktanın bulunduğu satır ile bu doğrunun bulunduğu kolonun arakesiti boyanır (bkz. Şekil 2).



Şekil 3. (8, 2) parametreli PK-düzleminin d_1 doğru sınıfının N_5 komşuluğu ile ilgili üzerinde olma matrisi.

Tablo 1 deki d_1 doğru sınıfı için verilen üzerinde olma matrisi ile Şekil 1, 2 ve 3 yardımıyla verilen d_1 doğru sınıfının üzerinde olma matrisi arasındaki ilişkiye bakarak geriye kalan d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 ve d_7 doğru sınıflarının üzerinde olma matrislerinin kabaca nasıl olacağını ve istenirse bunları da tamamlayarak (8, 2) parametreli PK-düzlemin tüm üzerinde olma matrisi elde edilebilir.

Şekil 1, 2 ve 3 yardımıyla sadece d_1 doğru sınıfının üzerinde olma matrisi verilen (8, 2) parametreli PK-düzlemde $\varepsilon = 0$ seçilirse Tablo 1 de verilen (2, 2) parametreli PH-düzlem izomorf olur. $\varepsilon \notin Z_q$ olarak seçildiğinden bu haliyle her iki düzlem birbirine izomorf değildir. Çünkü koordinatlanmalarında kullanılan lokal halkalardan biri H-ring diğeri ise genel olarak H-ring değildir. Bu yüzden de biri PH-düzlem diğeri ise PK-düzlemdir.

Kaynaklar

[1]. Klingenberg, W., Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen, **Math. Z**., 60, 384-406, (1954).

[2]. Klingenberg, W., Projektive Geometrien mit Homomorphismus, **Math. Ann**., 132, 180-200, (1956).

[3]. Drake, D.A. ve Lenz, H., Finite Klingenberg Planes, **Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg**, 44, 70-83, (1975).

[4]. Bacon, P.Y., **An Introduction to Klingenberg planes**, Florida, published by the author, (Vol. I (1976), Vol. II and III (1979)).

[5]. Akpinar, A., On Finite Hjelmslev Planes of parameters (p^{k-1}, p), **Int. J. of Math. and Stat. Sci**. 2, 1, 21-24, (2010).

[6]. Akpinar, A., Celik, B. ve Ciftci, S., On 6-Figures in Finite Klingenberg Planes of parameters (p^{2k-1}, p), **Int. J. of Math. and Stat. Sci**. 1, 2, 102-106, (2009).

[7]. Akpinar, A., Celik, B. ve Ciftci, S., 4-Transitivity and 6-Figures in Finite Klingenberg Planes of parameters (p^{2k-1}, p), **Int. J. of Comp. and Math. Sci**. 4, 1, 48-51, (2010).

[8]. Blunck, A., Projectivities in Moufang-Klingenberg planes, **Geom. Dedicata**, 40, 341-359, (1991).

[9]. Baker, C.A., Lane, N.D. ve Lorimer, J.W., A coordinatization for Moufang-Klingenberg Planes, **Simon Stevin**, 65, 3-22, (1991).

[10]. Kleinfeld, E., Finite Hjelmslev Planes, **Illiois J. Math**., 3, 403-407, (1959).

[11]. Lüneburg, H., Affine Hjelmslev-Ebenen mit transitiver Translationsgruppe, **Math. Z**., 79, 260-288, (1962).

[12]. Drake, D.A. ve Lenz, H., **Finite Hjelmslev planes and Klingenberg epimorphisms**, Rings and geometry (Istanbul, 1984), NATO Adv. Sci., 153-231, (1985).