Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED)
Cilt 10, Sayı 1, Haziran 2016, sayfa 351-373.

Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education
Vol. 10, Issue 1, June 2016, pp.351-373.

The Relationships Between Argumentation and Mathematical Proof Processes

Selin URHAN* & **Ali BÜLBÜL**

Hacettepe University, Ankara, TURKEY

Received : 03.07.2015 Accepted : 08.01.2016

Abstract – The aim of this study is to analyze and compare the argumentation and proving processes of senior high school students by using Toulmin’s model. Four senior high school students participated in the study. A problem was used to gather data, and the participants were asked to prove the statement they produced with their pairs. The results of the analysis showed that when the students made a deductive proof after abductive argumentation, they could complete the proof process successfully. However, the students who made abductive proof after abductive argumentation were not able to prove the statement. The results of this study may be useful in analyzing the argumentation and proof processes and in determining the relationships between them to facilitate the proving process for the students.

Key words: Argumentation, mathematical proof, mathematics education.

Summary

Introduction

Argumentation is a process in which a conjecture is produced to be proved in the proving phase (Boero, Garuti, Lemut & Mariotti, 1996). In research studies, it has been found that argumentation supports the proving phase (Garuti, Boero & Lemut, 1998). This result has led researchers to find the possible relationships between these processes (Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2010). They have compared the referential system and the structure of argumentation and the proving phase (Boero et al., 2010; Pedemonte, 2007a; 2007b; 2008). The referential system consists of the representation system (language, drawings, and

---

* Corresponding author: Selin URHAN, Research Assistant, Hacettepe University, Faculty of Education, Dep. of Secondary Science and Mathematics Education, Ankara, TURKEY.

E-mail: selin.urhan@hacettepe.edu.tr

theorems) and the knowledge system (conceptions and theorems) of these processes (Pedemonte, 2001).

The structure (abduction, deduction or induction) means that the logical cognitive connection that exists between statements is used in argumentation and proof (Pedemonte, 2007b). The structure of these processes can be considered as the way of reasoning for students in argumentation and proof (Pedemonte, 2008).

In most of the studies on the relationships between argumentation and proof, Toulmin's model is used as a tool to analyze and compare the referential system and the structure of these processes (Boero et al., 2010; Pedemonte, 2007a; 2007b; 2008). According to Toulmin's model any argumentation begins with an opinion. This starting point is called *claim.* The second step is producing *data* to support the claim, and the *warrant* provides the justification for the data of the claim. The warrant may be a principle or a rule, and it acts as a bridge between the data and the claim (Toulmin, 1958).

It is possible to explain the structures of argumentation and proof by using Toulmin's model. In deductive reasoning, data and warrants lead to the claim (Pedemonte, 2007a). In abductive reasoning, claim is produced from an observed fact; thus, data are found after the claim is determined (Peirce, 1960; Polya, 1962). In induction, the claim is determined by generalising some particular cases (Pedemonte, 2007b).

The initial research on the comparison of referential systems between argumentation and proof indicated that if some expressions, drawings or theorems used in argumentation are also used in proof, then it means there is a continuity between the referential systems of argumentation and proving processes. This continuity is referred to as *cognitive unity* (Pedemonte, 2001; 2008). In the following research studies, it has been found that cognitive unity supports the proving phase of the students, yet it is not enough to explain all the relationships between the two processes (Boero et al., 1996; Boero et al., 2010; Douek, 1999). Pedemonte (2001) describes another continuity between argumentation and proof which is referred to as *structural continuity*. If the statements and inferences in argumentation and proof are connected through the same structure, then there is a structural continuity between these two processes (Pedemonte, 2001). The research studies have revealed that the possible structural gap between argumentation and proof cannot always be filled by students, which renders it difficult for students to complete the proof (Pedemonte, 2008).

Based on these results, it seems crucial to account for and examine the relationships between these processes to improve learners' performance in proving tasks. Thus, the current study aims to analyse and compare senior high school students' argumentation and mathematical proving processes by using Toulmin's model.

Methodology

A case study was conducted in the spring semester of the academic year 2013-2014 with four senior high school students in Ankara. Data were gathered through a geometry based problem used by Pedemonte (2001; 2003; 2007a) in some studies on argumentation and proof. The participants worked in pairs to prove the statement they produced in relation to the problem. They were asked to share and discuss their ideas and intuitions about how they proved the statement. Their performance were recorded and then analysed by the researchers through Toulmin's model.

Results

The findings indicate that the students who made deductive proof after abductive argumentation completed the structural gap between argumentation and the proving processes. However, the students who could not complete the structural gap and establish structural contunity between the processes by making abductive proof after abductive argumentation could not complete the proof. As a result, it can be argued that if the students change the abductive structure in the argumentative process into a deductive one in the proving process, they can complete the proof successfully.

Conclusion

The findings of the current study support those of Pedemonte (2001; 2003; 2007a) in that the continuity of the structure between argumentation and proving processes creates an obstacle for the students in handling the proof of a statement in geometry. Thus, a change in the structure of these processes from abductive into deductive is required to make a complete and successful proof. This study is limited to four participants. Therefore, more research is needed to further reveal the relationships between students' argumentation and proving processes. Such research is needed to uncover and overcome the challenges experienced by students in mathematical proof in geometry and algebra.

Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt Süreçleri Arasındaki İlişkiler

Selin URHAN[†] **ve Ali BÜLBÜL**

Hacettepe Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Makale Gönderme Tarihi: 03.07.2015 Makale Kabul Tarihi: 08.01.2016

Özet – Bu çalışmanın amacı, lise son sınıf öğrencilerinin argümantasyon ve matematiksel kanıt yapma süreçlerini Toulmin modeline göre analiz etmek ve karşılaştırmaktır. Çalışmaya Ankara'da bir özel okulda lise son sınıfa devam eden dört öğrenci katılmıştır. Nitel araştırma olarak tasarlanan bu çalışmada veri toplamak için literatürden alınan bir problem kullanılmış ve çiftler halinde çalışması sağlanan öğrencilerden problemin çözümü ile ilgili üretecekleri hipotezin kanıtını yapmaları istenmiştir. Analiz sonuçlarına göre, öğrencilerin abdüktif argümantasyon ile dedüktif kanıt arasındaki yapısal boşluğu tamamlayarak dedüktif kanıta geçebildikleri durumda, kanıt sürecini başarıyla tamamladıkları; yapısal boşluğu tamamlayamadıkları durumda ise argümantasyondaki abdüktif yapıyı devam ettirdikleri ve dedüktif kanıt yapamadıkları görülmüştür. Matematik eğitiminde argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerinin karşılaştırmalı olarak analiz edilmesi ve aralarındaki ilişkilerin belirlenmesi, öğrenciler için kanıtlama sürecini kolaylaştırmak adına gerekli ve önemlidir.

Anahtar kelimeler: argümantasyon, matematiksel kanıt, matematik eğitimi

Giriş

Kanıt yapma, matematiğin en temel aktivitelerinden biridir. Matematikte kesinliği sağlamak ve bir ifadenin doğruluğunu göstermek için başvurulan vazgeçilmez bir yoldur (Mejia-Ramos & Inglis, 2008). İlköğretimde akıl yürütme aktiviteleri olarak, lisede daha sistematik biçimde, yükseköğretimde ise soyut ve aksiyomatik bir yapıda öğrencilerin karşısına çıkan kanıt, matematik öğretiminde önemli bir yere sahiptir (Sarı, 2011). Son yıllarda yapılan araştırmalarda verilen bir ifadeyi kanıtlamanın, öğrencilerin zorlandığı matematiksel aktivitelerden biri olduğu ortaya çıkmış ve kanıt yapmadan önce geçirilen argümantasyon sürecinin kanıtlama süreci üzerinde etkileri olduğu keşfedilmiştir (Boero, Garuti, Lemut & Mariotti, 1996; Boero, Garuti & Mariotti, 1996).

[†] İletişim: Selin URHAN, Araş. Gör., Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğreim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi ABD, Ankara, TÜRKİYE.

E-mail: selin.urhan@hacettepe.edu.tr

Argümantasyon, öğrencinin bireysel olarak ya da bir grupla birlikte bir hipotez ürettiği ya da verilen bir ifadeyi kanıtlamak için kullanılacak yöntemi ve izlenecek yolu belirlemeye yönelik akıl yürüttüğü bir süreçtir. Bu süreçte öğrenci yapacağı kanıta ilişkin fikirlerini, sezgilerini ve varsayımlarını ortaya koyar (Garuti ve diğ., 1998). Araştırmacılar matematiksel kanıtın özel bir argümantasyon olduğu hipotezine dayanarak, bu iki süreç arasındaki ilişkileri analiz etmekte ve öğrencilerin kanıtlama sürecinde yaşadıkları zorlukları belirlemeye ve bu zorlukları azaltacak önlemler almaya çalışmaktadırlar (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri & Garuti, 1997; Pedemonte, 2007a; 2007b).

Ülkemizde argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerine yönelik az sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalar da genellikle ilköğretim ve ortaöğretim seviyesindeki öğrencilerle yapılmıştır. Çoğunlukla öğrencilerin kanıta ilişkin görüşlerinin ve kanıtlama becerilerinin ortaya çıkarılması üzerinde durulmuştur (Aydoğdu, ve Baki, 2011; Doruk ve Kaplan, 2013; Gökkurt ve Soylu, 2012; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006). Uluslararası alanda yapılan çalışmalarda ise son yıllarda daha ağırlıklı olarak argümantasyon ve kanıt süreçleri arasındaki ilişkilere yönelik analizler yapıldığı dikkat çekmektedir (Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2010; Pedemonte, 2007a; 2007b; 2008).

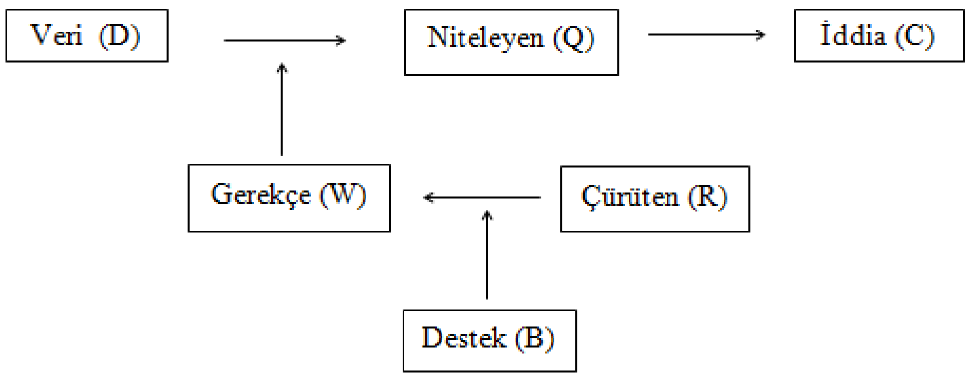
Argümantasyon ve Matematiksel Kanıtlama Süreçlerinin Analizi

Argümantasyon ve kanıtlama süreçleri arasındaki ilişkileri analiz etmeye yönelik çalışmalarda argümantasyon bir tartışma süreci olarak ele alınmış ve Toulmin modeline göre analiz edilmiştir (Boero ve diğ., 2010; Mejia-Ramos & Inglis, 2008; Garuti, Boero & Lemut, 1998). Kanıtlama sürecinin aslında özel bir argümantasyon süreci olduğunu savunan Pedemonte (2001), kanıtlama sürecinin analizini de Toulmin modeline göre yapmış ve bu sayede iki süreci karşılaştırabilmiştir.

Toulmin Modeli

Toulmin (1958), belli bir alan ya da konu üzerine yapılan tartışmanın yapısını analiz etmek için altı bileşenli bir yapı oluşturmuştur. Söz konusu yapı "Toulmin modeli" adını almıştır. Bu modelde ilk adım, *iddia (claim)* adı verilen başlangıç noktasıdır. Bu adımda tartışmacı konu ile ilgili iddiasını ortaya koymaktadır. İkinci adım, kişinin iddiasını destekleyen verileri sunduğu *veri (data)* üretimi aşamasıdır. Üçüncü adım ise kişinin ortaya koyduğu veriler ile savunduğu iddia arasında köprü kurmasını sağlayan *gerekçe (warrant)* adı verilen bir kural ya da kriter bulma aşamasıdır. Kullanılan gerekçe, veri ve iddia arasındaki ilişki için garanti sağlayıcı nitelikte olmalıdır. Böylece Toulmin modelinin altı bileşenli yapısının ilk üç bileşenli ana çatısı oluşmaktadır.

Bazı durumlarda argümantasyonun analizi için yardımcı bileşenler gerekebilmektedir. Toulmin (1958), bu tip analizlerde ortaya çıkabilecek olan yardımcı bileşenleri *niteleyen (qualifier), çürüten (rebuttal)* ve *destek (backing)* olarak adlandırmıştır. Verinin, gerekçe ile birlikte sunulan, iddia üzerindeki etkisinin derecesini gösteren ifadelere "niteleyen"; gerekçenin gücünü ve etkisini zayıflatan ya da geçersiz kılan ifadelere ise "çürüten" adını vermiştir. Gerekçenin direkt olarak kabul edilmediği durumlarda gerekçeyi desteklemek ve kuvvetlendirmek için ihtiyaç duyulan ve gerekçenin geçerliliğini sağlamak için kullanılan ifadeler ise modelde "destek" adıyla yerini almaktadır. Konuyla ilgili pek çok kaynakta olduğu gibi (Douek, 1999; Pedemonte, 2007a; 2007b; Garuti ve diğ., 1998), bu çalışmada da analizlerde veri (data) D ile, iddia (claim) C ile, gerekçe (warrant) W ile, niteleyen (qualifier) Q ile, çürüten (rebuttal) R ile, destek (backing) B ile gösterilmekte ve süreç aşağıdaki gibi şematize edilmektedir.



Şekil 1 Toulmin Modeli

Argümantasyon ve Matematiksel Kanıtlama Süreçlerinin Analizine Yönelik Çalışmalar

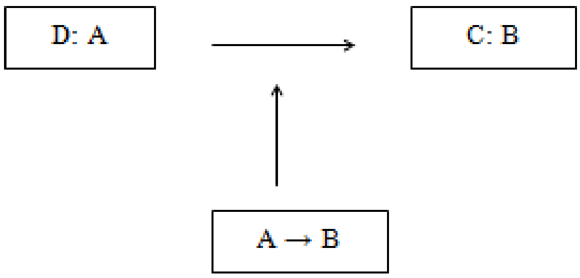
Konuya ilişkin ilk çalışmalar geometri alanında yapılmıştır (Boero ve diğ., 1996; Mariotti, ve diğ., 1997; Pedemonte, 2007a). Sonrasında araştırmaların cebir alanında da yapılmaya başlandığı görülmektedir (Pedemonte, 2008). Elde edilen sonuçlara göre, matematiksel kanıt yapmadan önce argümantasyon süreci geçiren öğrencilerin, kanıt yapmakta daha başarılı oldukları görülmüş ve bunun üzerine çalışmalar biraz daha derinleştirilerek, argümantasyon ve kanıt süreçleri arasında olası ilişki ya da ilişkiler belirlenmeye çalışılmıştır (Douek, 1999; Mariotti ve diğ., 1997; Pedemonte, 2003). Öğrencilerin argümantasyon ve kanıt süreçleri analiz edildiğinde, araştırmacıların ilk dikkatlerini çeken, kanıtı başarı ile tamamlayan öğrencilerin argümantasyon ve kanıt süreçlerinde benzer dilsel öğeler kullanıyor olmalarıdır. Buna göre araştırmacılar argümantasyon ve kanıt süreçleri arasında içerik yönünden *"bilişsel bütünlük"* adı altında bir çeşit süreklilik tanımlamışlar ve bu sürekliliği, ck¢ modeli entegre edilmiş Toulmin Modeli ile analiz etmişlerdir (Pedemonte, 2001). Analizlere göre, bilişsel bütünlüğü kurabilen bir öğrencinin kanıtı yapma olasılığının, bilişsel bütünlüğü kuramayan öğrencilere göre daha yüksek olduğu görülmüştür (Douek, 1999; Pedemonte, 2001).

İncelenen çalışmalarda, öğrencilerin argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçleri arasında bilişsel bütünlük kurdukları, fakat yine de kanıtı başarı ile tamamlayamadıkları durumlarla da karşılaşılmıştır. Bu durum, araştırmacıları argümantasyon ve matematiksel kanıt arasındaki ilişkileri başka açılardan da analiz etmeye yöneltmiştir (Boero ve diğ., 2010; Pedemonte, 2008). Pedemonte (2007a), her iki sürecin de üçlü bir yapıya (veri-iddia-gerekçe) sahip olduğunu ve Toulmin modeli ile bu süreçlerin yapılarının analiz edilmesinin mümkün olduğunu belirtmiştir. Argümantasyon ve kanıtlama süreçlerinin "yapı"sı, *ifadeler arasındaki mantıksal bilişsel bağlantı* olarak tanımlanmakta ve dedüktif, abdüktif ve indüktif olmak üzere üç başlık altında incelenmektedir (Pedemonte, 2001). Buna göre, kişinin argümantasyon sürecinde kullandığı akıl yürütme (muhakeme yapma) tarzının o sürecin yapısını oluşturduğunu söylemek mümkündür. Bu bağlamda argümantasyon sürecinde kullanılan akıl yürütme tarzının aynısı kanıtlama sürecinde de kullanılabilir. Bunun bir sonucu olarak, argümantasyonun yapısı kanıtlama sürecinde de devam ettirilmiş olur. Bu durum, iki süreç arasındaki *"yapısal süreklilik"* olarak tanımlanmıştır (Pedemonte, 2001).

Argümantasyon ve kanıtlama süreçleri arasındaki yapısal sürekliliğin kanıtlama süreci üzerindeki etkisi, kanıtlanacak olan ifadenin geometri ya da cebir alanından olmasına bağlı olarak değişiklik göstermektedir (Pedemonte, 2007b). Kanıtlanacak ifadenin geometri alanından olması durumunda, argümantasyon ve kanıtlama süreçleri arasındaki yapısal fark, öğrenciler için zorluk yaratmaktadır. Bu tip bir durumda, abdüktif argümantasyonun ardından kanıtın dedüktif yapısını kuramayan ve abdüktif kanıt yaparak iki süreç arasında yapısal süreklilik kuran öğrencilerin kanıtı tamamlamakta zorlandıkları görülmüştür (Pedemonte, 2003). Cebir alanında ise iki süreç arasındaki yapısal farkın öğrencilerin kanıtı yapmasını olumsuz etkilemediği dikkat çekmektedir. Bu durumda öğrenci abdüktif argümanstayonun ardından kanıtın dedüktif yapısını kurmakta zorlanmamaktadır. Bu sonucun cebirsel kanıtların baskın dedüktif yapısından kaynaklandığı düşünülmektedir (Pedemonte, 2008).

Dedüktif Argümantasyon

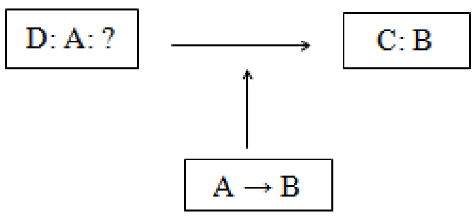
Dedüktif argümantasyon, veri ya da verilerden ve bir kuraldan yola çıkarak bir iddianın ortaya konulmasını sağlayan çıkarım olarak tanımlanmaktadır (Pedemonte, 2001). Bu tip bir argümantasyonda, önce veriler belirlenir; sonrasında bir kural, ilke ya da prensip kullanılarak iddia ortaya çıkartılır. Bu durum aşağıdaki gibi şematize edilmektedir. Burada A ile veri; B ile iddia; A→B ile veriden iddiaya ulaşılmasını sağlayan kural gösterilmektedir.



Şekil 2 Dedüktif Argümantasyon

Abdüktif Argümantasyon

Abdüktif argümantasyonda iddia, veri tanımlanmadan önce ortaya konulur (Arzarello, Micheletti, Olivero & Rebutti, 1998). Var olan bir gerçekten yola çıkarak, bir iddianın ortaya konulmasını sağlayan bir çıkarım tarzı ve bir çeşit “olasılıklı düşünme” (plausible reasoning) olarak tanımlanmaktadır (Peirce 1960). Temelinde *A→B ve B doğru ise muhtemelen A da doğrudur* çıkarımı bulunmaktadır (Polya, 1962). Bu durum aşağıdaki gibi şematize edilmektedir (Pedemonte, 2008).



Şekil 3 Abdüktif Argümantasyon

İndüktif Argümantasyon

İndüktif argümantasyonda iddia, özel durumların bir genellemesi olarak ortaya konulur. Bu çıkarımın temelinde, iddianın konu ya da durumla ilgili özel birkaç durumdan yola çıkılarak oluşturulması vardır (Pedemonte, 2001). Abdüktif bir argümantasyondan dedüktif kanıta geçmek için yapının ters çevrilmesi gerekmektedir (Pedemonte, 2001). İndüktif argümantasyon ise dedüktif kanıtın yapısından oldukça uzak bir yapıya sahiptir. Bu tip durumlarda iki süreç arasında yapısal boşluk oluştuğu ve öğrencilerin argümantasyon sürecinden kanıt sürecine geçmekte zorlandıkları görülmektedir (Pedemonte, 2001).

Argümantasyon süreci öğrencilerin kanıtlama sürecini başarı ile tamamlamaları üzerinde hem içerik hem de yapı yönüyle etkilidir (Pedemonte, 2008). Bu nedenle, öğrencilerin kanıt yaparken yaşadıkları zorlukları ve başarısızlıklarının nedenlerini belirlemek için argümantasyon ve matematiksel kanıtlama süreçleri arasındaki ilişkilerin ortaya çıkarılması ve analiz edilmesi oldukça önemli ve gereklidir.

Bu çalışmanın amacı, lise son sınıf öğrencilerinin geometri alanından bir problem üzerinde argümantasyon ve kanıtlama süreçlerini Toulmin modeline göre analiz etmek ve bu iki süreci hem içerik hem de yapı yönünden karşılaştırmak; bu yolla argümantasyon ve kanıtlama süreçleri arasındaki ilişkileri belirlemektir. Ülkemizde argümantasyon ve matematiksel kanıt yapma süreçleri arasındaki ilişkileri ortaya koyan ve bu ilişkileri analiz ederek karşılaştıran bir çalışmaya henüz rastlanmamıştır. Bu nedenle geometri alanından bir problem kullanılarak öğrencilerin argümantasyon ve kanıtlama süreçlerinin analiz edildiği ve içerik ile yapı yönünden karşılaştırıldığı, bu yolla iki sürecin benzerlik ve farklılıklarının incelendiği bu çalışmanın alan yazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Yöntem

Katılımcılar

Çalışmanın katılımcılarını, 2013-2014 öğretim yılında Ankara'da bir özel okulda lise son sınıfta öğrenim gören dört öğrenci oluşturmaktadır. Öğrencilerin matematik öğretmenlerinden alınan bilgilere göre, bu öğrencilerden ikisinin matematik performansı yüksek; diğer ikisininki ise düşüktür. Performansı farklı olan öğrenciler bir araya getirilerek ikişer kişilik iki grup oluşturulmuştur. Çalışmada kullanılan isimler, öğrencilerin gerçek isimleri olmayıp; araştırma kapsamında verilen isimlerdir.

Verilerin Toplanması

Bir sınıf ortamında önce ilk grupla sonra da ikinci grupla çalışılmış; ilk grupla çalışılırken ikinci grubun diğer grubu duyamayacağı bir başka sınıfta beklemesi sağlanmıştır. Her iki gruptaki öğrencilerden verilen problem üzerinde kağıt, kalem ve cetvel kullanarak çalışmaları istenmiştir. Öğrencilerden düşündüklerini ve yaptıklarını nedenleriyle birlikte sesli biçimde aktarmaları ve akıllarından geçenleri birbirleri ile paylaşmaları istenmiştir. Araştırmacılardan biri süreç boyunca öğrencilerin yanında bulunmuş ve öğrencilerin argümantasyon ve kanıtlama süreçlerinin video kaydını almıştır. Problemin sunulduğu ve öğrencilerin üzerinde çizim ve hesaplamalar yaptıkları, akıl yürüttükleri çalışma kağıtları da süreç sonunda öğrencilerden alınmıştır. Buna göre, çalışmada kullanılan veriler görüntü kayıtlarından ve çalışma kâğıtlarından elde edilmiştir.

Problem Seçimi

Pedemonte (2001; 2003; 2007a), argümantasyon ve kanıtlama süreçlerini içerik ve yapı açısından karşılaştırmak amacıyla İtalya'da ve Fransa'da lise son sınıf öğrencileri ile çalışmış ve onlardan geometri alanından açık uçlu bir problemin çözümü ile ilgili üretecekleri ifadenin kanıtını yapmalarını istemiştir. Aynı problem, bu çalışma kapsamında da kullanılmış ve öğrencilerin argümantasyon süreçleri ile bu sürecin sonunda ürettikleri ifadeyi kanıtlama süreçleri karşılaştırılmıştır.

Verilerin Analizi

Çalışma bir durum çalışmasıdır. İki grubun da kanıt yapma süreci ayrı ayrı analiz edilmiştir. Verilerin analizi aşamasında ilk olarak video kayıtlar bilgisayar ortamına aktarılmış ve öğrencilerin konuşmaları yazılı metne çevrilmiştir. Video kayıtlardan elde edilen yazılı metinler ve veri toplama süreci sonunda öğrencilerden alınan çalışma kâğıtları üzerindeki notlar, çalışmanın verilerini oluşturmaktadır. Bu veriler içerisinden, öğrencilerin argümantasyon ve kanıtlama süreçlerinin belirlenmesini ve karşılaştırılmasını sağlayıcı nitelikte olanları göz önünde bulundurulmuştur. Öğrencilerin argümantasyon ve kanıtlama süreçlerinin nerede başlayıp nerede bittiğini anlamak için kullandıkları hipotezlere ve teoremlere dikkat edilmiş ve bu sayede argümantasyon ve kanıtlama süreçlerinin ayırımı yapılabilmiştir. Argümantasyon ve kanıtlama süreçleri belirlendikten sonra bu süreçlerin analizleri Toulmin modeline göre yapılmıştır.

Bulgular ve Yorumlar

Çalışmada kullanılan problem öğrencilere aşağıda verildiği şekilde sunulmuştur (Pedemonte, 2001; 2003; 2007a):

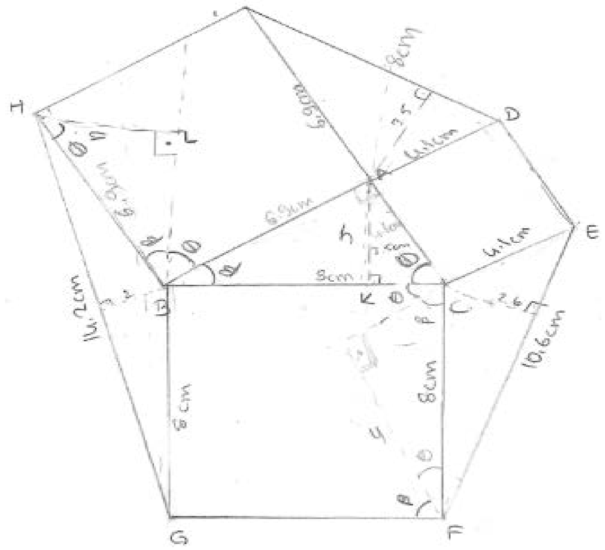
“Bir ABC üçgeni veriliyor. Bu üçgenin her bir kenarı üzerine tümüyle üçgenin dışında kalacak ve bir kenarı üçgenin kenarına eşit olacak şekilde üç adet kare çiziniz. Bu karelerin boşta kalan köşelerini üç adet yeni üçgen oluşturacak şekilde birleştiriniz. Elde edilen bu yeni üçgenlerin alanlarını ABC üçgeninin alanı ile karşılaştırınız.”

İlk grubu temsil eden Ayşe ve Elif'ten toplanan veriler üzerinde yapılan analizden elde edilen sonuçlar “Analiz I” başlığı altında verilmektedir. İkinci grubu temsil eden Ceren ve Nazlı'dan toplanan verilerin analiz sonuçları ise “Analiz II” başlığı altında yer almaktadır. Her iki analizde de öğrencilerin argümantasyon ve kanıt yapma süreçleri içerik ve yapı açısından karşılaştırılmıştır. İçerik açısından karşılaştırma yapılırken öğrencilerin argümantasyon sürecinde kullandıkları ifadeleri, matematiksel kuralları ve ilkeleri kanıtta da kullanmaya devam edip etmediklerine bakılmış; bu sayede iki süreç arasında bilişsel bütünlük kurulup kurulmadığı araştırılmıştır. Argümantasyon ve matematiksel kanıt süreçlerinin yapıları ise Toulmin modeline göre analiz edilerek karşılaştırılmıştır.

Analiz sürecinde öğrencilerin argümantasyon ve kanıtlama adımları belirlenmiştir. Toulmin modelindeki bileşenlerden iddia (claim) C, veri (data) D ve gerekçe (warrant) W ile gösterilmiştir. Bu harflerin sağ altında verilen indisler argümantasyon adımlarının sıra sayısını göstermektedir. Analiz bölümlerinde yer verilen metin kutucuklarının sol tarafında öğrencilerin orijinal konuşmalarına, sağında ise analiz sonuçlarına ve araştırmacıların yorumlarına yer verilmiştir.

Analiz I

Analize 40 numaralı ifade ile başlanmıştır. Buraya kadar öğrenciler, verilen üçgenin kenarları üzerine istenen özellikteki kareleri çizmekle uğraşmışlardır. Oluşan yeni üçgenlerin taban uzunluklarını ve yüksekliklerini ölçmüşler; alan formülünü kullanarak alanlarını hesaplamışlar ve süreci tamamladıklarını söylemişlerdir. Bu noktada araştırmacı öğrencilere müdahale etmiş; hesaplama yapabileceklerini ancak bunun matematiksel bir kanıtın yerine geçmeyeceğini; matematiksel kanıt için ifadenin doğruluğunun daha önceden bilinen matematiksel bir teori, bir gerçek ya da kural temel alınarak gösterilmesi gerektiğini açıklamıştır. Bu uyarı üzerine öğrenciler elde ettikleri sonucu kanıtlama yönünde bildikleri matematiksel kurallardan, teoremlerden ya da ilgili bir konudan yararlanma yoluna gitmişlerdir.



Şekil 4 Ayşe ve Elif'in Üzerinde Çizim ve İşlem Yaptıkları Çalışma Kâğıdı

Öğrencilerin ölçme yaptığı ve ölçüm sonuçlarına göre söz konusu üçgenlerin alanlarını eşit buldukları ilk kısım argümantasyon sürecini temsil etmektedir. Bu sürecin sonunda öğrenciler *"söz konusu üçgenlerin alanları eşittir"* iddiasını ortaya koymuşlardır. Bu iddia, veri tanımlanmadan önce ortaya konulduğundan söz konusu argümantasyonun yapısı abdüktiftir.

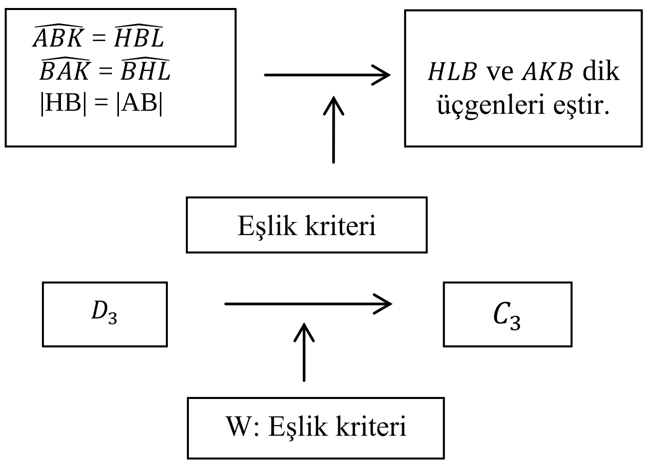
40. Ayşe: Taban kaç cm'di? 41. Elif: 8 cm. Bu kenarla bu aynı zaten *(BC ve GB kenarlarını gösteriyor)*. Kare ya bu (*GFCB* karesini gösteriyor)… Ölçmeye bile gerek yok! 42. Ayşe: Doğru. O zaman tabanları aynı. Yükseklikler de aynı mı? 43. Elif: Evet yükseklikler eşit de nasıl göstersek? Tabanlar aynı, 8 cm, çünkü aynı karenin kenarları bunlar. Böyle diyebiliriz yani çok açık. Yükseklikleri nasıl eşit desek? …	C_1: *ABC* ve *HGB* üçgenlerinin alanları eşittir. D_1: *ABC* ve *HGB* üçgenlerinin yükseklikleri eşittir. Muhtemelen *ABC* ve *HGB* üçgenlerinin yükseklikleri eşittir. → *ABC* ve *HGB* üçgenlerinin alanları eşittir. ↑ Eşlik kriteri D_1 : ? → C_1 ↑ W: Eşlik kriteri

Argümantasyon sürecinde, öğrenciler ABC ve HGB üçgenlerinin tabanlarının aynı karenin kenarları olduğunu görmüşler; bu üçgenlerin yüksekliklerinin eşit olup olmadığını bulmaya çalışmışlardır. Öğrenciler bu amaca yönelik olarak üçgenlerde eşlik kriterinden yararlanmışlardır.

44. Ayşe: Hımm evet. Yüksekliklerde sorun… 45. Elif: Yani bir şekilde onların eşit olduğunu da söylersek olur ama nerden? 46. Ayşe: Bu üçgenler eş mi? Aynı gibi görünüyorlar *(ABC ve HGB üçgenlerini gösteriyor)*. 47. Elif: Pek de değil bence. 48. Ayşe: Şu dik üçgenlerden gitsek? *(AKB ve HLB üçgenlerini gösteriyor)* 49. Elif: Tamam açılara isim verelim belki oradan bir şeyler çıkar. Tamam, aa aslında baksana bu üçgenler aynıysa *(AKB ve HLB üçgenlerini*	C_2: ABC ve HGB üçgenlerinin yükseklikleri eşittir. D_2: HLB ve AKB dik üçgenleri eştir. Muhtemelen *HLB* ve *AKB* dik üçgenleri eştir. → *ABC* ve *HGB* üçgenlerinin yükseklikleri eşittir. ↑ Eşlik kriteri D_2 : ? → C_2 ↑ W: Eşlik kriteri Öğrenciler şekil üzerinde alanlarını kıyasladıkları

gösteriyor) bu yükseklikler de eşit olmak zorunda. 90°'lerin karşısındakiler 6.9, 6.9! Aynı karenin kenarları değil mi bunlar? Diğer açılara da isim verelim!	üçgenlerin aynı uzunluktaki tabanlarına ait yüksekliklerini indirdiklerinde oluşan *AKB* ve *HLB* dik üçgenlerini keşfetmişlerdir. Eğer bu üçgenlerin eşliğini gösterebilirlerse eşlik kriterine göre üçgenlerin dik kenarlarının eşit olacağını; dolayısıyla alanları kıyaslanan üçgenlerin yüksekliklerinin eşit olacağını göstermeyi düşünmüşlerdir. Öğrenciler buradan da *ABC* ve *HGB* üçgenlerinin alanlarının eşit olduğunu söylemeyi planlamaktadırlar. İddialarının doğruluğunu göstermek için veri aradıkları bu argümantasyon süreci de abdüktif yapıdadır.

Öğrenciler, argümantasyon sürecindeki muhakeme tarzlarının abdüktif yapısını, kanıtta dedüktif yapıya dönüştürebilmişlerdir. Alanları karşılaştırılan üçgenlerin yüksekliklerinin eşit olduğu yönündeki iddialarını kanıtlamışlar ve dolayısıyla söz konusu üçgenlerin alanlarının eşit olduğunu göstermişlerdir.

80. Ayşe: Şurası da dik… *(AKB açısını gösteriyor)* 81. Elif: Tamam. O zaman? 82. Ayşe: Buraya beta diyelim *(HBL açısını gösteriyor).* Şuna teta diyelim (*LHB* açısını gösteriyor). … 93. Elif: Bak bak, tamam ya, şurası da teta! *(LBA açısını gösteriyor)* 94. Ayşe: Neden? 95. Elif: Bu kare ya hani, ee bu da karenin bir açısı, 90° yani *(HBA açısını gösteriyor*). Burası betaysa *(HBL açısını gösteriyor),* burası teta *(LBA* açısını *gösteriyor)*! Teta artı beta 90° demiştik ya biraz önce. …	Açı-kenar-açı kriterine göre yeni oluşan dik üçgenler eştir. D_3: $\widehat{ABK} = \widehat{HBL}$ $\widehat{BAK} = \widehat{BHL}$ |HB| = |AB| (aynı karenin kenarları) C_3: *HLB* ve *AKB* dik üçgenleri eştir.  D_4: *HLB* ve *AKB* dik üçgenleri eştir. C_4: *ABC* ve *HGB* üçgenlerinin yükseklikleri eşittir.

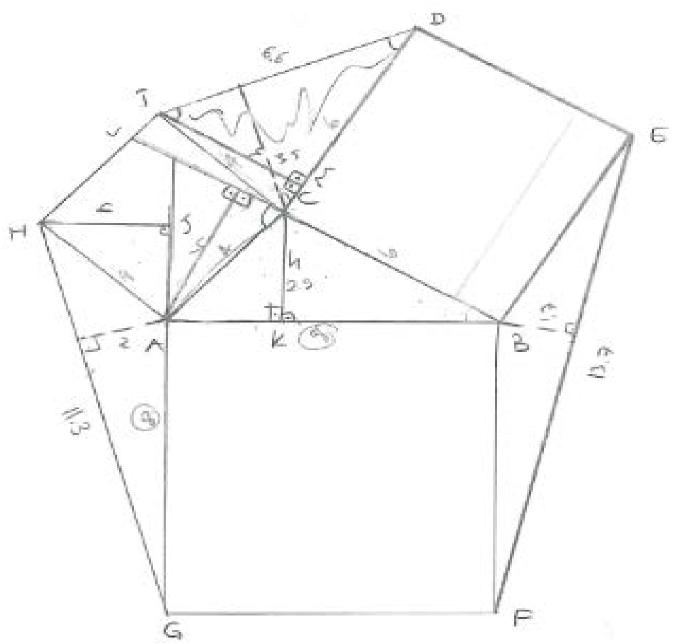
100. Ayşe: Burası da 90° *(LBC açısını gösteriyor)* değil mi ya? 101. Elif: Ah doğru ya! Dik tabi bu yükseklik değil mi? O zaman bu da beta *(ABC açısını gösteriyor)*! 102. Ayşe: O zaman tamam zaten, bitti! Bu üçgenlerin bütün açıları eşit *(ABK ve HBL üçgenlerini gösteriyor)*. Hatta aynı bunlar, eş! 90°lerin karşısı 6.9-6.9!...	*HLB* ve *AKB* dik üçgenleri eştir. → *ABC* ve *HGB* üçgenlerinin yükseklikleri eşittir. W: Eş üçgenlerde eşit açılar karşısındaki kenarlar eşittir.
103. Elif: … O zaman bulduk zaten, bunlar da eşit *(HL ve AK kenarlarını gösteriyor)*.	$D_4 = C_3$ → C_4 W: Eş üçgenlerde eşit açılar karşısındaki kenarlar eşittir.
104. Ayşe: Aynen de ne yapıyorduk biz? 105. Elif: Şimdi dur. En başa dönelim. Tabanlar aynı *(BC ve BG kenarlarını gösteriyor)*, yükseklikler de buradan aynı *(HL ve AK kenarlarını gösteriyor)*. Sonuç alanlar aynı (*ABC* ve *HGB* üçgenlerini kastediyor)!	D_5: *ABC* ve *HGB* üçgenlerinin yükseklikleri eşittir. C_5: *ABC* ve *HGB* üçgenlerinin alanları eşittir. *ABC* ve *HGB* üçgenlerinin yükseklikleri eşittir. → *ABC* ve *HGB* üçgenlerinin alanları eşittir. W: Alan formülü $D_5 = C_4$ → C_5 W: Alan formülü Kanıtın yapısı dedüktiftir. Öğrenciler buldukları verilerden iddialarını üretmişlerdir. Abdüktif argümantasyonun ardından yapılan dedüktif kanıt başarılı olmuştur.

Öğrenciler eşlik kriterini hem argümantasyonda hem de kanıtlama sürecinde kullanmaktadırlar. İki süreçte de kullanılan kelimeler ve ifadeler genellikle aynıdır *(“üçgenler* *eştir”, “yükseklikler eşittir”,* vb.). Bu sonuçlara dayanarak öğrencilerin argümantasyon ve kanıtlama süreçleri arasında bilişsel bütünlük olduğu söylenebilir.

Yapısal açıdan ise abdüktif yapıdaki argümantasyon ile dedüktif yapıdaki kanıtlama süreci arasında boşluk olduğu görülmektedir. Ancak öğrenciler bu yapısal boşluğu başarıyla tamamlayabilmişler ve argümantasyondaki abdüktif muhakeme yapısını kanıtta dedüktif yapıya dönüştürebilmişlerdir.

Analiz II

Bu bölümde Ceren ve Nazlı’nın argümantasyon ve kanıtlama süreçlerinin içerikleri ve yapıları Toulmin modeline göre analiz edilerek karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar Analiz I bölümünde elde edilen sonuçlar ile kıyaslanarak yorumlanmıştır. Aşağıda Ceren ve Nazlı’nın çalışma kâğıtlarına ilişkin görüntüye yer verilmektedir.



Şekil 5 Ceren ve Nazlı’nın Üzerinde Çizim ve İşlem Yaptıkları Çalışma Kâğıdı

Analize 20 numaralı ifade ile başlanmıştır. Buraya kadar öğrenciler verilen üçgenin kenarları üzerine istenen özellikteki kareleri çizmekle uğraşmışlar ve oluşan yeni üçgenlerin alanlarını taban uzunluklarını ve yüksekliklerini ölçerek hesaplamayı düşünmüşlerdir. Araştırmacı bu noktada öğrencilere yine müdahale ederek hesaplama yapabileceklerini ancak bunun matematiksel bir kanıtın yerine geçmeyeceğini belirtmiştir. Bu durum öğrencilerin matematiksel kanıtın ne demek olduğunu ve gerekliliklerini bilmedikleri gerçeğini bir kez daha ortaya çıkarmaktadır.

20. Nazlı: Tamam şimdi ne diyor? Bunların alanlarını *(EBF, DCI ve HGA üçgenlerini kastediyor) ABC* üçgeninin alanı ile kıyaslayınız. Yükseklik ölçelim o zaman.

21. Ceren: Ya taban çarpı yükseklik bölü 2 yapalım işte.

22. Nazlı: Tamam, dur şunu indirelim işte bir bakalım *(CK yüksekliğini indirir).* Kaç cm bu? *(Ölçer)* 2.9! Şimdi bunun yüksekliği… *(HAG üçgenine yönelir)* Bunun yüksekliğini nerden indirelim?

23. Nazlı: Şuradan çek işte *(A köşesini gösterir)*!

24. Ceren: Tamam.

25. Nazlı: Kaç cm?

26. Ceren: 2!

27. Nazlı: Tamam dur ben de alanlarını hesaplayayım şurada…

…

34. Nazlı: Tamam yani yaklaşık olarak eşit bunların alanları. Öyle diyelim. Bitti…

…

42. Nazlı: O zaman kanıtlayalım, ne yapalım?

…

46. Ceren: Ya aslında şu 8'leri mi kullansak *(AG ve AB kenarlarını kastediyor)*? Baksana 8-8? Tabanlar aynı olsun. Niye 11.3'e *(HG kenarını kastediyor)* bakıyoruz ki iki saattir?

47. Nazlı: Doğru!

48. Ceren: Bunların yüksekliğini indirelim bir de o zaman *(ABC ve HGA üçgenlerini kastediyor)* çizelim.

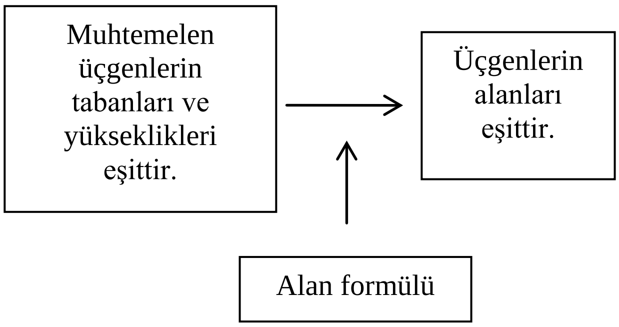
…

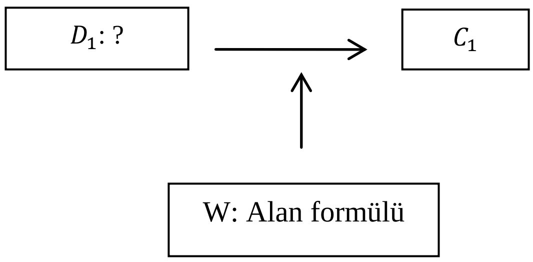
55. Nazlı: Ya yükseklikler de eşit işte *(ölçerek)* ama nasıl diyeceğiz onu? Ölçmeden…?

C_1: Üçgenlerin alanları eşittir.

D_1: Üçgenlerin tabanları aynıdır.

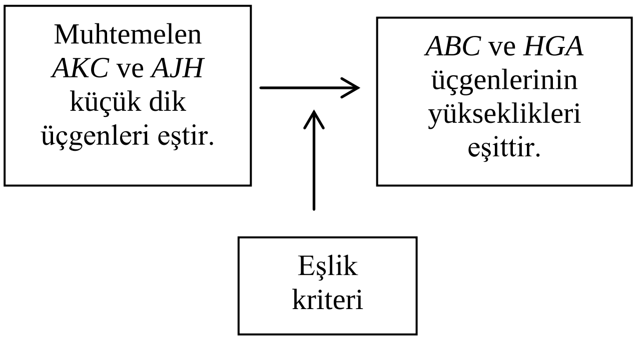
Üçgenlerin yükseklikleri aynıdır.

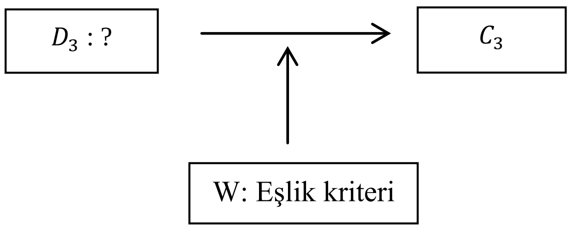




Öğrencilerin ölçme yaptığı ve ölçüm sonuçlarına göre üçgenlerinin alanlarını eşit buldukları bu kısım argümantasyon sürecini temsil etmektedir. Bu süreçte iddia, veri tanımlanmadan önce ortaya konulduğu ve gözlenen bir gerçekten başlayarak iddianın yapımını sağlayan bir çıkarım yapıldığı için argümantasyonun yapısı abdüktiftir.

Analize 71 numaralı ifadeden devam edilmektedir. Öğrenciler buraya kadar yüksekliklerin eşit olduğunu göstermek için çeşitli yollar denemişlerdir. Bu bölümde söz konusu yüksekliklerin eşit olduğunu göstermek için eşlik kriterini kullanmaya çalışmaktadırlar.

<table>
<tr>
<td>71. Ceren: Şuradaki dik üçgenlerden bir şey çıkar mı (AKC ve AJH küçük dik üçgenlerini gösteriyor)? Bak aslında 90°nin karşısı burada 4 (AKC üçgenini gösteriyor), bunda da 4 (AJH üçgenini gösteriyor)!
72. Nazlı: Bunlar da eşit olmaz mı o zaman (HJ ve CK yüksekliklerini gösteriyor)? Pisagor’dan mı bulsak?
73. Ceren: O zaman yine ölçüme girer ama… Ölçmek falan gerek yani, direk cetvelle ölçmek gibi olacak. Baştaki gibi…
74. Nazlı: Açılara bir şey diyelim…
….
82. Ceren: Z falan var aslında. Paralellik yok mu şurada (IM ve LC kenarlarını gösteriyor)? Açılardan gitsek?
83. Nazlı: Çok karıştı. Burası 4, burası da 4. Hipotenüsler aynı.
84. Ceren: Ya bence aynı bunlar da eşit işte. 90°lerin karşısı aynı. Bunlar da aynı olur.
85. Nazlı: Bence de. Aynı görünüyor zaten, belli yani.
86. Ceren: Şunların alanlarını arıyorduk biz (ABC ve HGA üçgenlerini gösteriyor)…</td>
<td>C_3: ABC ve HGA üçgenlerinin yükseklikleri eşittir.
D_3: AKC ve AJH küçük dik üçgenleri eştir.




Bu gruptaki öğrenciler diğer grubun aksine, argümantasyon sürecindeki abdüktif yapı ile kanıt sürecindeki dedüktif yapı arasındaki yapısal boşluğu dolduramamışlardır. Argümantasyon sürecinden kanıt sürecine geçecekleri kritik noktaya kadar gelmişler ancak matematiksel olarak küçük dik üçgenler arasındaki eşliği kuramamışlardır. Bu dik üçgenlerin eş olduklarını varsayarak devam etmişler; kendilerini spontane devam eden argümantasyon sürecinin akışına bırakmışlar ve dedüktif kanıt yapamamışlardır.</td>
</tr>
</table>

Bu örnekte argümantasyon ve kanıtlama süreçleri arasındaki yapısal sürekliliğin öğrencilerin kanıt yapmasını engellediği görülmüştür. Bu durumun en önemli sebebi, öğrencilerin iddialarını matematiksel teoremlere ya da daha önceden bildikleri kurallara dayandırmadan yalnızca, varsayımları üzerinden doğrulamaya çalışmalarıdır. Dedüktif bir kanıt süreci görülmediği için argümantasyon ve kanıtlama süreçleri içerik açısından karşılaştırılamamıştır.

Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada bir geometri problemi kullanılarak lise son sınıf öğrencilerinin argümantasyon ve kanıtlama süreçleri arasındaki ilişkiler içerik ve yapı yönünden Toulmin modeline göre analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Pedemonte (2001; 2003; 2007a)'nin çalışmalarında elde ettiği sonuçlar ile paralellik göstermektedir.

İlk grubun analiz sonuçlarına göre, öğrencilerin hem argümantasyon hem de kanıtlama süreçlerinde benzer dilsel ve matematiksel öğeler kullanarak iki süreç arasında bilişsel bütünlük kurdukları görülmüştür. Yapısal açıdan ise öğrencilerin argümantasyon sürecinde kullandıkları abdüktif yapıyı, kanıtlama sürecinde dedüktif yapıya dönüştürebildikleri saptanmıştır. Bu bağlamda, iki süreç arasında içerik açısından bilişsel bütünlük olduğu ancak yapısal süreklilik olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

İkinci gruptan elde edilen verilerin analizinde ise öğrencilerin argümantasyon sürecindeki abdüktif yapıyı kanıtlama sürecinde dedüktif yapıya dönüştüremedikleri ve iki süreç arasında yapısal süreklilik kurdukları gözlenmiştir. Bunun bir sonucu olarak öğrencilerin kanıtlama sürecini tamamlayamadıkları görülmüştür. Bu öğrencilerin, iddialarını desteklemek için eşlik kriteri gibi bazı matematiksel dayanaklar kullanmak yerine, düşündüklerinin doğru olduğunu varsayarak ilerlemeyi tercih ettikleri görülmüştür.

Sonuç olarak, Pedemonte (2001; 2003; 2007a)'nin elde ettiği bulgulara paralel olarak bu çalışmada da görülmüştür ki, geometri alanında kanıt yapmaya çalışan öğrenciler, argümantasyon ve kanıtlama süreçleri arasındaki yapısal boşluğu doldurup, argümantasyondaki abdüktif yapıyı kanıtlama sürecinde dedüktif yapıya dönüştürebildiklerinde kanıtlama sürecini tamamlayabilmektedirler. Ancak bu iki süreç arasındaki yapısal boşluğu dolduramayan öğrencilerin kanıtlama sürecini tamamlayamadıkları görülmektedir.

Argümantasyon süreci genelde abdüktif yapıda iken; kanıtlama süreci dedüktif yapı gerektirmektedir. Bu bağlamda argümantasyon ve kanıtlama süreçleri arasındaki muhakeme tarzının yapısı ile ilgili bir fark oluşması ve argümantasyondan kanıtlama sürecine geçerken genellikle bir yapı değişikliği yapılması durumu ile karşı karşıya kalınmaktadır. Bu durumda öğrencilerin iki süreç arasındaki yapısal boşluğu doldurarak argümantasyon sürecinde kullandıkları abdüktif yapıyı, kanıtlama sürecinde dedüktif yapıya çevirmeleri gerekmektedir. Ancak bunu yapamayan ve argümantasyon sürecindeki abdüktif muhakeme tarzını kanıtta da devam ettiren öğrencilerin kanıtlama sürecinde zorlandıkları görülmektedir.

Her iki grupta da süreci kaydeden araştırmacının uyarıları olmasa, öğrencilerin şekil üzerindeki ölçme sonuçları ile hesap yaparak, kanıtlama sürecini tamamladıkları yanılgısına düşecekleri dikkat çekmektedir. Uyarıya rağmen hesap yaparak devam etme konusunda ısrar eden öğrenciler, kanıtlama sürecinin bu şekilde tamamlanmasının mümkün olmadığını duyduklarında şaşırmışlardır. Bu durum, lise son sınıf öğrencilerinin kanıtlama sürecinin gerekliliklerini henüz bilmedikleri gerçeğini ortaya çıkarmaktadır. Bu sonuç, Weber (2001)'in değerlendirmeleri ile paralellik göstermektedir. Weber (2001)'e göre, bazı öğrenciler matematiksel kanıtın nasıl yapıldığını ve kanıtlama sürecinin neler gerektirdiğini bilmemektedirler. Bu öğrencilere göre, bir teoremin ya da ifadenin kanıtını yapmak, bu ifadenin ya da teoremin bir veya birkaç örnek üzerinden doğruluğunu göstermekten ibarettir.

Benzer analizlerin bu kez cebir öğrenme alanına ilişkin bir ifadenin ya da teoremin kanıtlanmasına ilişkin olarak yapılması önerilmektedir. Cebir alanında argümantasyon ve kanıtlama süreçlerinin içerik ve yapı yönünden analiz edilmesi ve karşılaştırılması, sonuçların geometri alanında elde edilen sonuçlarla kıyaslanması yararlı olacaktır.

Argümantasyon sürecinin matematiksel kanıt yapmaya etkisini değişik yönleriyle ele alan çalışmaların, öğrencilerin kanıtlama sürecine ilişkin yaşadıkları zorlukları belirlemeye ve bu zorluklara çözüm üretmeye katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca bu kapsamdaki çalışmalar, okullarda kanıt öğretiminin daha bilinçli yapılması ve öğretmenlerin öğrencilerini matematiksel kanıt yapma sürecinde daha sağlıklı yönlendirmeleri adına önemli ipuçları sunacaktır.

Kaynakça

Arzarello, F., Micheletti, C., Olivero, F. & Rebutti, O. (1998). A model for analyzing the transition to formel proof in geometry. *Proceedings of the PME-22, 2,* 24-31.

Aydoğdu, T. ve Baki, A. (2011). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüşlerinin Nicel Analizi. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 11*(4), 2275-2284.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F. & Pedemonte, B. (2010). “Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation.” *Paper presented at the annual meeting of the Proceedings of the PME 34, Belo Horizonte, Brazil.*

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E. & Mariotti, M. A. (1996). “Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems.” *Paper presented at the annual meeting of the Proceedings of the PME 20, Valencia, Spain.*

Boero, P., Garuti, R. & Mariotti, M. A. (1996). “Some dynamic processes underlying producing and proving conjectures.” *Paper presented at the annual meeting of the Proceedings of the PME 20, Valencia, Spain.*

Dinçer, S. (2011). “Matematik Lisans Derslerindeki Tartışmaların Toulmin Modeline Göre Analizi.” Doktora tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Doruk, M. ve Kaplan, A. (2013). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel İspata Yönelik Görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 2*(1), 241-252.

Douek, N. (1999). Argumentative aspects of proving: analysis of some undergraduate mathematics students’ performances. *Proceedings of PME-23, 2,* 273-280.

Garuti, R., Boero, P. & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of the PME-22, 2,* 345-352.

Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2012). Üniversite Öğrencilerinin Matematiksel İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırma Dergisi, 1*(4), 56- 64.

Güler, G., Özdemir, E. ve Dikici, R. (2012). Öğretmen Adaylarının Matematiksel Tümevarım Yoluyla İspat Becerileri Ve Matematiksel İspat Hakkındaki Görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 20*(1), 219-236.

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi M. G., Boero, P., Ferri F. & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of the PME 21, 1,* 180-195.

Mejia-Ramos, J. P. & Inglis, M. (2008). What are the argumentative activities associated with proof?. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 28*(2),67-72.

Moralı, S., Uğurel I., Türnüklü E. ve Yeşildere S. (2006). Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri. *Kastamonu Eğitim Fakültesi Dergisi*, *14*(1), 147-160.

Pedemonte, B. (2001). Some cognitive aspects of the relationships between argumentation and proof in mathematics. *Proceedings of the PME 25, 4,* 33-40.

Pedemonte, B. (2003). What kind of proof can be constructed following an abductive argumentation?, *Paper presented at the annual meeting of the European Research in Mathematics Education III.*

Pedemonte, B. (2007a). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?, *Educational Studies in Mathematics, 66,* 23-41.

Pedemonte, B. (2007b). Structural relationships between argumentation and proof in solving open problems in algebra. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education/European Research in Mathematics Education (CERME 5),* 643-653.

Pedemonte, B. (2008). Argumentation and algebraic proof. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 40,* 385-400.

Peirce, C. S. (1960). *Collected Papers.* Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Polya, G. (1962). *How to solve it?* New York: Princeton University Press.

Sarı, M. (2011). "Üniversite Öğrencilerinin Matematiksel Kanıt ile İlgili Güçlükleri ve Kanıt Öğretimi." Doktora tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Toulmin, S. (1958). *The Uses of Argument.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101–119.