BEYKENT ÜNİVERSİTESİ FEN VE MÜHENDİSLİK BİLİMLERİ DERGİSİ

Sayı 9(1) 2016, 117 – 136

KARŞILIKLI DEĞİŞMELİ İKİ İNVOLUTİF VE BİR TRİPOTENT MATRİSİN LİNEER BİLEŞİMİNİN TRİPOTENTLİĞİNİN BİR ALTERNATİF KARAKTERİZASYONU

Emre KİŞİ *(ekisi@sakarya.edu.tr)*
Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Sakarya, Türkiye

Elif GÜRER *(elif_gurer18@hotmail.com)*
Sakarya Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Sakarya, Türkiye

ÖZET

Xu ve Xu karşılıklı değişmeli iki involutif ve bir tripotent matrisin lineer bileşiminin tripotentliği problemini blok matrislerden yararlanarak çözmüştür [C. Xu., R. Xu, Tripotency of a linear combination of two involutory matrices and a tripotent matrix that mutually commute, Linear Algebra Appl. 437 (2012) 2091-2109]. Bu çalışmada ise aynı problem daha genel problemlerin çözümlerinde kullanılabilir olan farklı bir yöntem ile çözülmüştür.

Anahtar Kelimeler: *tripotent matris, involutif matris, lineer bileşim.*

Makale Geliş Tarihi: 29.03.2016

Makale Kabul Tarihi: 30.05.2016

BEYKENT UNIVERSITY JOURNAL OF SCIENCE AND ENGINEERING

Volume 9(1) 2016, 117x – 136

AN ALTERNATIVE CHARACTERIZATION OF TRIPOTENCY OF LINEAR COMBINATION OF TWO INVOLUTORY MATRICES AND A TRIPOTENT MATRIX THAT MUTUALLY COMMUTE

Emre KİŞİ *(ekisi@sakarya.edu.tr)*
Sakarya University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Mathematics, Sakarya, Turkey

Elif GÜRER *(elif_gurer18@hotmail.com)*
Sakarya University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Mathematics, Sakarya, Turkey

ABSTRACT

Xu and Xu have solved the problem of tripotency of linear combination of two involutory matrices and a tripotent matrix that mutually commute by utilizing the block matrices [C. Xu., R. Xu, Tripotency of a linear combination of two involutory matrices and a tripotent matrix that mutually commute, Linear Algebra Appl. 437 (2012) 2091-2109]. In this note, the same problem is solved via a different method, which can be used in the solution of the more general problems.

Keywords: *tripotent matrix, involutive matrix, linear combination*.

1. GİRİŞ

$\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_n$, $\mathbf{0}$ ve I_n sırasıyla doğal sayılar kümesi, kompleks sayılar kümesi, $n\times n$ boyutlu kompleks matrisler kümesi, uygun boyutlu sıfır matrisi ve $n\times n$ boyutlu birim matrisi belirtsin. A ve $B\in\mathbb{C}_n$ matrislerinin direkt toplamı $A\oplus B$ ile gösterilsin. $A\in\mathbb{C}_n$ olmak üzere eğer $A^2=A$, $A^2=I_n$, $A^3=A$ ve $A^k=A$ ($k\in\mathbb{N}, k>2$), ise A matrisine sırasıyla idempotent (projektör), involutif, tripotent ve *k*-potent matris denir. Kısalık adına bu matrislerin kümeleri de sırasıyla $\mathbb{C}_n^P$, $\mathbb{C}_n^I$, $\mathbb{C}_n^T$, ve $\mathbb{C}_n^{k-P}$ ile gösterilecektir. Bu özel tipli matrisler uygulamalı bilimlerde önemli bir yere sahiptir. Örneğin, idempotent matrisler istatistik teorisinde bkz [19] ve kuadratik formlarda bkz [8], involutif matrisler kuantum mekaniğinde bkz [1] ve kriptolojide bkz [14], ve *k*-potent matrisler görüntü şifrelemede bkz [21] karşımıza çıkmaktadır.

Yukarıda bahsedilen özel tipli matrislerin lineer bileşimleri ne zaman yine bir özel tipli matris olur? Bu problem bazı yazarlar tarafından farklı matris tipleri için ele alındı ve bu konuda birçok sonuç elde edildi. Xu ve Xu bu sonuçların bir kısmını ve birkaç açık problemi bir tablo biçiminde özetledi [19, Table 1.1]. Biz de, literatürde yer alan sonuçları aşağıda tablolar biçiminde özetlemek istiyoruz. Literatürde ele alınan lineer bileşimler $X_1, X_2,$ ve $X_3\in\mathbb{C}_n$ ve $c_1, c_2,$ ve $c_3\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$X=c_1X_1+c_2X_2 \tag{1}$$

veya

$$X=c_1X_1+c_2X_2+c_3X_3. \tag{2}$$

Tablo 1, (1) lineer bileşimi için verilen sonuçları özetlerken Tablo 2, (2) lineer bileşimi için verilen sonuçları özetlemektedir. Tablolarda $i=1,\ 2$ ve $j=1,\ 2,\ 3$ şeklinde değiştiğine dikkat edelim.

Tablo 1. (1) lineer bileşimi ile ilgili sonuçların özeti

	$X_1X_2 = X_2X_1$	$X_1X_2 \neq X_2X_1$
$X \in \mathbb{C}_n^P$	$X_i \in \mathbb{C}_n^P$ [3]	$X_i \in \mathbb{C}_n^P$ [3]
	$X_1 \in \mathbb{C}_n^P, X_2 \in \mathbb{C}_n^T$ [6]	$X_1 \in \mathbb{C}_n^P, X_2 \in \mathbb{C}_n^T$ [6]
	$X_i \in \mathbb{C}_n^T$ [17]	
	$X_1 \in \mathbb{C}_n^P, X_2 \in \mathbb{C}_n^{k-P}$ [9]	$X_1 \in \mathbb{C}_n^P,\ X_2 \in \mathbb{C}_n^{k-P}$ [10]
	$X_i \in \mathbb{C}_n^I$ [18]	$X_i \in \mathbb{C}_n^I$ [18]
$X \in \mathbb{C}_n^I$	$X_i \in \mathbb{C}_n^P$ [18]	$X_i \in \mathbb{C}_n^P$ [18]
	$X_i \in \mathbb{C}_n^I$ [18]	$X_i \in \mathbb{C}_n^I$ [18]
	$X_i \in \mathbb{C}_n^T$ [18]	
	$X_1 \in \mathbb{C}_n^T,\ X_2 \in \mathbb{C}_n^I$ [22]	$X_1 \in \mathbb{C}_n^T,\ X_2 \in \mathbb{C}_n^I$ [22]
$X \in \mathbb{C}_n^T$	$X_i \in \mathbb{C}_n^P$ [4,12]	$X_i \in \mathbb{C}_n^P$ [4,12]
	$X_i \in \mathbb{C}_n^I$ [18]	
	$X_i \in \mathbb{C}_n^T$ [5,17]	
$X \in \mathbb{C}_n^{k-P}$	$X_i \in \mathbb{C}_n^I$ [20]	

Tablo 2. (2) lineer bileşimi ile ilgili sonuçların özeti

	X_j matrisleri karşılıklı olarak değişmeli	$X_1X_2 = X_2X_1$ $X_1X_3 = X_3X_1$ $X_2X_3 \neq X_3X_2$	$X_1X_2 = X_2X_1$ $X_1X_3 \neq X_3X_1$ $X_2X_3 = X_3X_2$	$X_1X_2 = X_2X_1$ $X_1X_3 \neq X_3X_1$ $X_2X_3 \neq X_3X_2$
$X \in \mathbb{C}_n^P$	$X_j \in \mathbb{C}_n^P$ ve $X_1X_2 = X_2X_1 = \mathbf{0}$ [2]	$X_j \in \mathbb{C}_n^P$ ve $X_1X_2 = X_2X_1 = \mathbf{0}$ [2]	$X_j \in \mathbb{C}_n^P$ ve $X_1X_2 = X_2X_1 = \mathbf{0}$ [2]	$X_j \in \mathbb{C}_n^P$ ve $X_1X_2 = X_2X_1 = \mathbf{0}$ [2]
	$X_j \in \mathbb{C}_n^P$ [7]	$X_j \in \mathbb{C}_n^P$ [7,13]	$X_j \in \mathbb{C}_n^P$ [7]	$X_j \in \mathbb{C}_n^P$ [7]
$X \in \mathbb{C}_n^T$	$X_j \in \mathbb{C}_n^I$ [23]			
	$X_i \in \mathbb{C}_n^I$, $X_3 \in \mathbb{C}_n^T$ [23]			

Xu ve Xu [23] de iki involutif ve bir tipotent matrisin (2) formundaki lineer bileşimini blok matrislerden yararlanarak iki matrisli iki lineer bileşime indirgedi ve problemi [5] deki sonuçlardan faydalanarak çözdü. Ancak kullandıkları yöntem üç tripotent matrisin tripotentliği gibi daha genel problemlerin çözümünde kullanılamamaktadır. Bu çalışmada ise [23] deki problem daha genel problemlerin çözümlerinde de kullanılabilir olan farklı bir yöntem ile yeniden çözülmüştür.

2. KARŞILIKLI OLARAK DEĞİŞMELİ İKİ İNVOLUTİF BİR TRİPOTENT MATRİSİN LİNEER BİLEŞİMİNİN TRİPOTENTLİĞİ

Esas sonuçlar verilmeden önce ispatta gerekli olan birkaç temel gerçeğe değinilecektir.

2.1. Ön Bilgiler

T_1, $T_2 \in \mathbb{C}_n^I$ ve sıfırdan farklı $T_3 \in \mathbb{C}_n^T$ matrisleri karşılıklı olarak değişmeli, yani $T_iT_j = T_jT_i$, $i \neq j$ ve $1 \leq i, j \leq 3$, olsun. c_1, c_2 ve c_3 sıfırdan farklı kompleks sayılar olmak üzere,

$$c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3 \tag{3}$$

lineer bileşimini ele alalım. Doğrudan bir hesaplama ile kolaylıkla görülebilir ki (3) lineer bileşiminin tripotent olmasının gerek ve yeter koşulu

$$\begin{aligned}
&(c_1^3T_1^3 - c_1T_1) + (c_2^3T_2^3 - c_2T_2) + (c_3^3T_3^3 - c_3T_3) \\
&+c_1^2c_2(T_1^2T_2 + T_2T_1^2 + T_1T_2T_1) + c_1^2c_3(T_1^2T_3 + T_3T_1^2 + T_1T_3T_1) \\
&+c_1c_2^2(T_1T_2^2 + T_2^2T_1 + T_2T_1T_2) + c_1c_3^2(T_1T_3^2 + T_3^2T_1 + T_3T_1T_3) \\
&+c_2^2c_3(T_3T_2^2 + T_2^2T_3 + T_2T_3T_2) + c_2c_3^2(T_2T_3^2 + T_3^2T_2 + T_3T_2T_3) \\
&+c_1c_2c_3(T_1T_2T_3 + T_1T_3T_2 + T_2T_3T_1 + T_2T_1T_3 + T_3T_1T_2 + T_3T_2T_1) = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4}$$

olmasıdır. Karşılıklı olarak değişmelilik kabulü ile birlikte, eğer $T_i \in \mathbb{C}_n^I$, $1 \leq i \leq 3$, ise, bu durumda (4) lineer bileşimi

$$\begin{aligned}
&(c_1^3 - c_1 + 3c_1c_2^2 + 3c_1c_3^2)T_1 + (c_2^3 - c_2 + 3c_2c_1^2 + 3c_2c_3^2)T_2 \\
&+(c_3^3 - c_3 + 3c_3c_1^2 + 3c_3c_2^2)T_3 + 6c_1c_2c_3T_1T_2T_3 = \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{5}$$

biçimini ve eğer $T_i \in \mathbb{C}_n^I$, $1 \leq i \leq 2$, ve $T_3 \in \mathbb{C}_n^T$ ise,

$$\begin{aligned}
&(c_1^3 - c_1 + 3c_1c_2^2)T_1 + (c_2^3 - c_2 + 3c_2c_1^2)T_2 + (c_3^3 - c_3 + 3c_3c_1^2 + 3c_3c_2^2)T_3 \\
&+3c_1c_3^2T_1T_3^2 + 3c_2c_3^2T_2T_3^2 + 6c_1c_2c_3T_1T_2T_3 = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{6}$$

biçimini alır. Her tripotent matris köşegenleştirilebilir ve $\mathbb{C}_n^I \subset \mathbb{C}_n^T$ olduğundan her involutif matris de köşegenleştirilebilir olup [15, Corollary 3.3.10] değişmeli köşegenleştirilebilir matrisler eş zamanlı köşegenleştirilebilirdir [15, Theorem 1.3.21]. Ayrıca, tripotent ve involutif matrislerin spektrumları sırasıyla {1,-1,0} ve {1,-1} kümelerinin alt kümeleridir [11, Proposition 5.5.21]. Tüm bu bilgiler çerçevesinde, $\sum_{i=1}^{12} r_i = n$ olmak üzere bir $S \in \mathbb{C}_n$ tersinir matrisi vardır öyle ki, genelliği bozmaksızın,

$$
\begin{aligned}
S^{-1}T_1S &= I_{r_1} \oplus I_{r_2} \oplus I_{r_3} \oplus I_{r_4} \oplus I_{r_5} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_7} \oplus -I_{r_8} \oplus -I_{r_9} \oplus -I_{r_{10}} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_{12}} = \Lambda_1, \\
S^{-1}T_2S &= I_{r_1} \oplus I_{r_2} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_4} \oplus -I_{r_5} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_7} \oplus I_{r_8} \oplus I_{r_9} \oplus -I_{r_{10}} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_{12}} = \Lambda_2, \quad (7) \\
S^{-1}T_3S &= I_{r_1} \oplus -I_{r_2} \oplus \mathbf{0}_{r_3} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_5} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus I_{r_7} \oplus -I_{r_8} \oplus \mathbf{0}_{r_9} \oplus I_{r_{10}} \oplus -I_{r_{11}} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}} = \Lambda_3
\end{aligned}
$$

olur. T_i, $1 \le i \le 3$, matrislerinin lineer bileşiminin tripotentliğinin Λ_i, $1 \le i \le 3$, köşegen matrislerinin lineer bileşiminin tripotentliğine denk olduğu açıktır. Bu sebeple, (3) biçimli lineer birleşimin tripotentliğini karakterize etmek yerine Λ_i, $1 \le i \le 3$, köşegen matrislerinin lineer bileşimini karakterize etmek yeterli olacaktır. (7) eşitlikleri Λ_i, $1 \le i \le 3$, köşegen matrislerinin en genel formudur ve tabi ki bazı bloklar, örneğin altıncı sıradaki bloklar, yani $(I_{r_6}, -I_{r_6}, \mathbf{0}_{r_6})$ blok üçlüsü, gözükmeyebilir. Bu gerçekten hareketle Λ_i, $1 \le i \le 3$, matrislerinin lineer bileşimlerinin tripotentliğinin karakterizasyonu, tüm olası blok üçlülerinin ele alınıp karşılık gelen lineer denklem sistemlerinin çözülmesiyle elde edilebilir. Örneğin, sadece ilk blok üçlüsü, yani

$$\Lambda_1 = I_{r_1}, \Lambda_2 = I_{r_1}, \text{ ve } \Lambda_3 = I_{r_1}, \tag{8}$$

gözüksün. Bu durumda, $c_1\Lambda_1 + c_2\Lambda_2 + c_3\Lambda_3 = (c_1 + c_2 + c_3)I_{r_1}$ lineer bileşiminin tripotent olmasının gerek ve yeter koşulu $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ veya -1 veya 0 olmasıdır. Böylece (8) durumundan $r_1 = n$ olmak üzere $c_1 + c_2 + c_3 \in \{1, -1, 0\}$ ve $I_n = T_1 = T_2 = T_3$ sonucu elde edilir. Eğer sadece ilk ve ikinci blok üçlüsü, yani

$$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus I_{r_2}, \Lambda_2 = I_{r_1} \oplus I_{r_2}, \text{ ve } \Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_2} \tag{9}$$

olsaydı, bu durumda $c_1\Lambda_1 + c_2\Lambda_2 + c_3\Lambda_3 = (c_1 + c_2 + c_3)I_{r_1} \oplus (c_1 + c_2 - c_3)I_{r_2}$ lineer bileşiminin tripotent olmasının gerek ve yeter koşulu $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ veya -1 veya 0 ve $c_1 + c_2 - c_3 = 1$ veya -1 veya 0 olurdu. Bu son lineer denklem sistemi çözülerek $r_1 + r_2 = n$ olmak üzere $(|c_1 + c_2|, |c_3|) \in \{(1/2, 1/2), (0, 1)\}$ ve $I_n = T_1 = T_2 \ne T_3$ sonucu elde edilir. Böylece, bu şekilde devam edilerek (3) lineer bileşiminin karakterizasyonu elde edilebilir. Ancak, görüldüğü üzere ele alınması gereken $2^{12} - 1 = 4095$ farklı durum vardır ve bu sayıda lineer denklem sistemini çözmek zaman alıcıdır. Şimdi (7) eşitliğine geri dönelim. Eğer (7) deki Λ_i, $1 \le i \le 3$, köşegen matrislerine dikkatlice bakılırsa tüm blok üçlülerinin bir eksi katlı hali, örneğin altıncı sıradaki blok üçlüsünün $(I_{r_6}, -I_{r_6}, \mathbf{0}_{r_6})$ eksi katlı hali dokuzuncu sıradaki blok üçlüsü $(-I_{r_9}, I_{r_9}, \mathbf{0}_{r_9})$, olduğu görülmektedir. Eğer ilk blok üçlüsü eksi katlısı ile birlikte ele alınırsa, yani

$$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}}, \Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}}, \text{ ve } \Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}}, \tag{10}$$

olursa, bu durumda $r_1 + r_{11} = n$ olmak üzere $c_1 + c_2 + c_3 = \{1, -1, 0\}$, $T_1 = T_2 = T_3$ ve $T_i \in \mathbb{C}_n^I$, $1 \le i \le 3$, sonucu elde edilir. Benzer şekilde (9) durumunda da bloklar eksi katlı halleri ile birlikte ele alınırsa, yani

$$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}}, \Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}}, \text{ ve } \Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}}, \tag{11}$$

olursa, bu durumda $r_1 + r_2 + r_{10} + r_{11} = n$ olmak üzere $\left(|c_1 + c_2|, |c_3|\right) \in \{(1/2, 1/2), (0,1)\}$, $T_1 = T_2 \ne T_3$ ve $T_i \in \mathbb{C}_n^I$, $1 \le i \le 3$, sonucu elde edilir. (10) ve (11) durumlarından elde edilen sonuçlar ile sırasıyla (8) ve (9) durumlarından elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında, c_i, $1 \le i \le 3$, skalerleri ile ilgili sonuçların aynı olduğu, ancak (10) ve (11) durumlarının T_i, $1 \le i \le 3$, matrisleri ile ilgili sonuçlarının sırasıyla (8) ve (9) durumlarının T_i, $1 \le i \le 3$, matrisleri ile ilgili sonuçlarını örttüğü görülmektedir. Dolayısıyla, Λ_i, $1 \le i \le 3$, köşegen matrislerinde blok üçlüleri eksi katlı halleri ile birlikte ele alınarak sonuçlar daha genel matrisler için elde edilebilir. Bununla beraber, çözülecek olan lineer denklem sistemleri oluşturulurken, bu birbirinin eksi katı olan blok üçlülerinden sadece birine karşılık gelen lineer denklemin sol yanını almak yeterli olacaktır. Bu nedenle, Λ_i, $1 \le i \le 3$, köşegen matrislerini oluştururken blok üçlüleri eksi katlı halleri ile birlikte ele alınacak, ancak lineer denklem sistemleri oluşturulurken birbirinin eksi katı olan blok üçlülerinden sadece biri dikkate alınacaktır. Yani, bu son kabul ile birlikte 6 farklı, birbirinin eksi katı olmayan, blok üçlüsü dikkate alınacaktır. Bunların önce birer birer, sonra ikişer ikişer ve en son altışar altışar alınarak oluşturulan $2^6 - 1 = 63$ farklı durumun ele alınması bize (3) lineer bileşiminin tripotentliğinin karakterizasyonunu verecektir. Ancak, görüldüğü üzere karakterizasyon üç bilinmeyenli lineer denklem sistemlerinin çözümlerine dayalıdır, ve üçten fazla denklem içeren lineer denklem sistemlerinin çözümleri, üç tane denklem içeren lineer denklem sistemlerinin çözümlerinin arakesitleri ile elde edilebilmektedir. Dolayısıyla, üçten fazla denklem içeren lineer denklem sistemlerini ele almaya gerek yoktur. Böylece, (3) lineer bileşiminin tripotentliğinin karakterizasyonunu için $\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}=41$ farklı durumu ele almak yeterli olacaktır.

Artık esas sonuçlar verilebilir.

2.2. Esas Sonuçlar

Esas sonuçların [23] de ele alınan karşılıklı olarak değişmeli iki involutif bir tripotent matrisin lineer bileşiminin tripotentliği problemi için bir alternatif ispatı üzerine olduğu belirtilmişti. Açıklık adına sonuçlar [23] de verildiği gibi aşağıdaki iki ayrık durum için verilecektir; yani Teorem 1' de tüm T_i, $1 \le i \le 3$, matrislerinin involutif olduğu durum ve Teorem 2' de T_i, $1 \le i \le 2$, matrislerinin involutif ve T_3'ün bir tekil tripotent matris olduğu durum, şeklinde verilmektedir.

Sonuçlar iki farklı teorem halinde verilmiş olduğu halde kanıtları tek bir ispat altında verilecektir. [23] çalışmasının ispatında kullanılan yöntem sadece bu problem için geçerlidir. Halbuki, bu çalışmadaki yöntem ile karşılıklı olarak değişmeli üç tripotent matrisin tripotentliği gibi daha genel problemler de çözülebilmektedir. Ayrıca, Kişi [23] de bazı eksik sonuçların olduğunu belirtti [16]. Bu eksik sonuçlar da bu çalışmada içerilmektedir.

Teorem 1: $T_i \in \mathbb{C}_n^I$, $1 \le i \le 3$, karşılıklı olarak değişmeli matrisler ve c_i, $1 \le i \le 3$, sıfırdan farklı kompleks sayılar olmak üzere $T = c_1T_1 + c_2T_2 + c_3T_3$ olsun. Bu durumda, T matrisinin tripotent olmasının gerek ve yeter koşulu, $i \ne j, i \ne k, j \ne k$ ve $i, j, k = 1, 2, 3$ olmak üzere aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır:

a) $c_i + c_j \pm c_k \in \{1, -1, 0\}$ ve $T_i = T_j = \pm T_k$, *b)* $\left(\left|c_i \pm c_j\right|, \left|c_k\right|\right) \in \left\{\left(1/2, 1/2\right), \left(0,1\right)\right\}$ ve $T_i = \pm T_j \neq \pm T_k$,

c) $(\pm c_i, c_j, c_k) \in \left\{\begin{matrix}(-1,1,1),(-1/2,1/2,1),(-1/2,1,1/2),(1/2,-1/2,-1),\\(1,-1,-1),(1/2,-1,-1/2),(1,-1/2,-1/2),(-1,1/2,1/2)\end{matrix}\right\}$

, ve $\pm T_i + T_j + T_k = \pm T_1 T_2 T_3$.

Teorem 2: $T_i \in \mathbb{C}_n^I$, $1 \leq i \leq 2$, ve sıfırdan farklı tekil $T_3 \in \mathbb{C}_n^T$ matrisi karşılıklı olarak değişmeli ve c_i, $1 \leq i \leq 3$, sıfırdan farklı kompleks sayılar olmak üzere $T = c_1 T_1 + c_2 T_2 + c_3 T_3$ olsun. Bu durumda, T matrisinin tripotent olmasının gerek ve yeter koşulu $i \neq j$ ve $i, j = 1, 2$ olmak üzere aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır:

$a')$ $\left(c_1 \pm c_2, c_3\right) \in \left\{\left(-1,2\right),\left(0,1\right),\left(1,-2\right),\left(0,-1\right),\left(1,-1\right),\left(1,-1\right)\right\}$ ve $T_1 = \pm T_2 \neq \pm T_3$,

$b')$ $\left(c_1 + \left|1/2\right| c_3, c_2 + \left|1/2\right| c_3\right) \in \left\{\begin{matrix}\left(1,0\right),\left(0,1\right),\left(1/2,1/2\right),\left(0,-1\right),\left(-1,0\right),\\\left(-1/2,-1/2\right),\left(1/2,-1/2\right),\left(-1/2,1/2\right),\left(0,0\right)\end{matrix}\right\}$

ve $\left|1/2\right| T_1 + \left|1/2\right| T_2 = T_3$,

$c')$ $\left(c_1 \pm c_2, c_3\right) \in \left\{\left(-1,-2\right),\left(0,-1\right),\left(1,2\right),\left(0,1\right),\left(1,1\right),\left(-1,-1\right)\right\}$ ve $T_1 = \pm T_2 \neq \pm T_3$,

$d')$ $\left(c_1 \pm c_2, c_3\right) \in \left\{\left(0,1\right),\left(0,-1\right)\right\}$ ve $T_1 = \pm T_2 \neq \pm T_3$,

$e')$ $(\pm c_1, c_2, c_3) \in \left\{\begin{matrix}\left(1/2,-1/2,1\right),\left(-1/2,1/2,1\right),\left(3/4,-1/4,1/2\right),\left(-1/4,3/4,1/2\right),\\\left(1/4,1/4,1/2\right),\left(1/2,-1/2,-1\right),\left(-1/2,1/2,-1\right),\left(1/4,-3/4,-1/2\right),\\\left(-3/4,1/4,-1/2\right),\left(1/4,1/4,-1/2\right),\left(3/4,-1/4,-1/2\right),\left(-1/4,3/4,-1/2\right),\\\left(-1/4,-1/4,-1/2\right),\left(1/4,-3/4,1/2\right),\left(-3/4,1/4,1/2\right),\left(-1/4,-1/4,1/2\right)\end{matrix}\right\}$

ve $\pm T_1 + T_2 + T_3 - \left(\pm T_1 + T_2\right) T_3^2 = \pm T_1 T_2 T_3$,

$f')$ $(\pm c_i, c_j, c_3) \in \left\{\begin{matrix}(-2,1,2),(-3/2,1/2,2),(-1,1,1),(-1/2,1/2,1),(2,-1,-2),\\(3/2,-1/2,-2),(1,-1,-1),(1/2,-1/2,-1),(3/2,-1/2,-1),\\(1/2,1/2,-1),(-1/2,-1/2,1),(-3/2,1/2,1)\end{matrix}\right\}$

ve $\mp T_i + T_j + T_3 + \left(T_j \mp 2T_i\right) T_3^2 = \pm 2 T_1 T_2 T_3$,

$g')\quad (\pm c_1, c_2, c_3) \in \begin{Bmatrix} (-1/2,-1/2,2),(1/2,-1/2,1),(-1/2,1/2,1),(1/2,1/2,-2), \\ (1/2,-1/2,-1),(-1/2,1/2,-1),(1/2,1/2,-1),(-1/2,-1/2,1) \end{Bmatrix}$

ve $-3T_3 + 2(T_2 \pm T_1)T_3^2 = \pm T_1T_2T_3$,

$h')\ (\pm c_i, c_j, c_3) \in \begin{Bmatrix} (2,1,-2),(1,1,-1),(3/2,1/2,-1),(-1/2,1/2,1),(-2,-1,2), \\ (-1,-1,1),(1/2,-1/2,-1),(-3/2,-1/2,1),(-3/2,-1/2,2), \\ (-1/2,-1/2,1),(3/2,1/2,-2),(1/2,1/2,-1) \end{Bmatrix}$

ve $\pm T_i + T_j - T_3 + (T_j \pm 2T_i)T_3^2 = \pm 2T_1T_2T_3$,

$i')\quad (\pm c_1, c_2, c_3) \in \begin{Bmatrix} (-1/2,-1/2,-2),(1/2,-1/2,-1),(-1/2,1/2,-1),(1/2,1/2,2), \\ (1/2,-1/2,1),(-1/2,1/2,1),(1/2,1/2,1),(-1/2,-1/2,-1) \end{Bmatrix}$

ve $3T_3 + 2(T_2 \pm T_1)T_3^2 = \mp T_1T_2T_3$.

Teorem 1 ve Teorem 2' nin İspatı: Teoremler ifade edilmeden önce belirtildiği gibi ispatlar bir bütünlük adına birlikte verilecektir. İspatların yeterlilik kısmı Teorem 1 ve Teorem 2 nin tüm şıklarındaki şartların sırasıyla (5) ve (6) eşitliklerinde yerine yazılmasıyla elde edilir. Gereklilik kısmı için önce Λ_i, $1 \le i \le 3$, köşegen matrislerinin tüm olası durumları belirlenmeli ve sonrasında ise bu durumlardan elde edilen lineer denklem sistemleri çözülmelidir. Ön bilgiler kısmında bahsedilen gerçekler göz önünde bulundurularak ele alınması gereken 41 farklı durum aşağıdaki tabloda listelenmiştir.

Tablo 1: Λ_i, $1 \le i \le 3$, köşegen matrislerinin tüm olası durumlarının listesi

1)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}}$	2)	$\Lambda_1 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}}$ $\Lambda_2 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}}$ $\Lambda_3 = -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}}$
3)	$\Lambda_1 = I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}}$ $\Lambda_2 = I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}}$ $\Lambda_3 = \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}}$	4)	$\Lambda_1 = I_{r_4} \oplus -I_{r_8}$ $\Lambda_2 = -I_{r_4} \oplus I_{r_8}$ $\Lambda_3 = I_{r_4} \oplus -I_{r_8}$

5)	$\Lambda_1 = I_{r_5} \oplus -I_{r_7}$ $\Lambda_2 = -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$ $\Lambda_3 = -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$	6)	$\Lambda_1 = I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$
7)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}}$	8)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}}$
9)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_4} \oplus I_{r_8}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8}$	10)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_5} \oplus -I_{r_7}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$
11)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$	12)	$\Lambda_1 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}}$ $\Lambda_2 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}}$ $\Lambda_3 = -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}} \oplus \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}}$
13)	$\Lambda_1 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8}$ $\Lambda_2 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus -I_{r_4} \oplus I_{r_8}$ $\Lambda_3 = -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8}$	14)	$\Lambda_1 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_5} \oplus -I_{r_7}$ $\Lambda_2 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$ $\Lambda_3 = -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$
15)	$\Lambda_1 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$	16)	$\Lambda_1 = I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8}$ $\Lambda_2 = I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus -I_{r_4} \oplus I_{r_8}$ $\Lambda_3 = \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8}$
17)	$\Lambda_1 = I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus I_{r_5} \oplus -I_{r_7}$ $\Lambda_2 = I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$ $\Lambda_3 = \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$	18)	$\Lambda_1 = I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$
19)	$\Lambda_1 = I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus I_{r_5} \oplus -I_{r_7}$ $\Lambda_2 = -I_{r_4} \oplus I_{r_8} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$ $\Lambda_3 = I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$	20)	$\Lambda_1 = I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = -I_{r_4} \oplus I_{r_8} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$
21)	$\Lambda_1 = I_{r_5} \oplus -I_{r_7} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = -I_{r_5} \oplus I_{r_7} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = -I_{r_5} \oplus I_{r_7} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$		
22)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}} \oplus \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}}$		

23)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus -I_{r_4} \oplus I_{r_8}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8}$
24)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_5} \oplus -I_{r_7}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$
25)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$
26)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus -I_{r_4} \oplus I_{r_8}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8}$
27)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus I_{r_5} \oplus -I_{r_7}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$
28)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$
29)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus I_{r_5} \oplus -I_{r_7}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_4} \oplus I_{r_8} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$
30)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_4} \oplus I_{r_8} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$
31)	$\Lambda_1 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus I_{r_5} \oplus -I_{r_7} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = I_{r_1} \oplus -I_{r_{11}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$

32)	$\Lambda_1 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8}$ $\Lambda_2 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus -I_{r_4} \oplus I_{r_8}$ $\Lambda_3 = -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}} \oplus \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8}$
33)	$\Lambda_1 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus I_{r_5} \oplus -I_{r_7}$ $\Lambda_2 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$ $\Lambda_3 = -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}} \oplus \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$
34)	$\Lambda_1 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}} \oplus \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$
35)	$\Lambda_1 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus I_{r_5} \oplus -I_{r_7}$ $\Lambda_2 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus -I_{r_4} \oplus I_{r_8} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$ $\Lambda_3 = -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$
36)	$\Lambda_1 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus -I_{r_4} \oplus I_{r_8} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$
37)	$\Lambda_1 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus I_{r_5} \oplus -I_{r_7} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = I_{r_2} \oplus -I_{r_{10}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = -I_{r_2} \oplus I_{r_{10}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$
38)	$\Lambda_1 = I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus I_{r_5} \oplus -I_{r_7}$ $\Lambda_2 = I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus -I_{r_4} \oplus I_{r_8} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$ $\Lambda_3 = \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7}$
39)	$\Lambda_1 = I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus -I_{r_4} \oplus I_{r_8} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}} \oplus I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$
40)	$\Lambda_1 = I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus I_{r_5} \oplus -I_{r_7} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = I_{r_3} \oplus -I_{r_{12}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = \mathbf{0}_{r_3} \oplus \mathbf{0}_{r_{12}} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$

41)	$\Lambda_1 = I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus I_{r_5} \oplus -I_{r_7} \oplus I_{r_6} \oplus -I_{r_9}$ $\Lambda_2 = -I_{r_4} \oplus I_{r_8} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7} \oplus -I_{r_6} \oplus I_{r_9}$ $\Lambda_3 = I_{r_4} \oplus -I_{r_8} \oplus -I_{r_5} \oplus I_{r_7} \oplus \mathbf{0}_{r_6} \oplus \mathbf{0}_{r_9}$

Tablo 1' deki durumların incelenmesi aşağıdadır:

3), 6) ve 18) durumlarında T_3 bir sıfır matrisi olduğundan ele alınmayacaktır.

1) durumunun ele alınmasıyla $c_1 + c_2 + c_3 \in \{1, -1, 0\}$ ve $T_1 = T_2 = T_3$ sonuçları elde edilir. Benzer sonuçlar 2), 4) ve 5) durumlarından elde edilir. Tüm bu sonuçların birleşimi bize Teorem 1'in *a)* şıkkını verir.

7) durumunun ele alınmasıyla,

$$\left(c_1 + c_2, c_3\right) \in \left\{ \begin{matrix} (0,1), (1/2, 1/2), (-1/2, -1/2), \\ (0,-1), (1/2, -1/2), (-1/2, 1/2) \end{matrix} \right\} \quad \text{ve} \quad T_1 = T_2 \neq \pm T_3$$

sonuçları elde edilir. Benzer sonuçlar 9), 10), 13), 14) ve 19) durumlarından elde edilir. Tüm bu sonuçların birleşimi bize Teorem 1'in *b)* şıkkını verir.

8) durumunun ele alınmasıyla,

$$\left(c_1 + c_2, c_3\right) \in \left\{ \begin{matrix} (-1, 2), (0,1), (1,-2), \\ (0,-1), (1,-1), (1,-1) \end{matrix} \right\} \quad \text{ve} \quad T_1 = T_2 \neq \pm T_3 \quad \text{sonuçları}$$

elde edilir. Benzer sonuçlar 20) durumundan elde edilir. Tüm bu sonuçların birleşimi bize Teorem 2'nin $a')$ şıkkını verir.

11) durumunun ele alınmasıyla,

$$\left(c_1 + 1/2\, c_3, c_2 + 1/2\, c_3\right) \in \left\{ \begin{matrix} (1,0), (0,1), (1/2, 1/2), (0,-1), (-1,0), \\ (-1/2, -1/2), (1/2, -1/2), (-1/2, 1/2), (0,0) \end{matrix} \right\}$$

ve $1/2\, T_1 + 1/2\, T_2 = T_3$ sonuçları elde edilir. Benzer sonuçlar 15), 16) ve 17) durumlarından elde edilir. Tüm bu sonuçların birleşimi bize Teorem 2'nin $b')$ şıkkını verir.

12) durumunun ele alınmasıyla,

$$\left(c_1+c_2,c_3\right)\in\begin{Bmatrix}\left(-1,-2\right),\left(0,-1\right),\left(1,2\right),\\ \left(0,1\right),\left(1,1\right),\left(-1,-1\right)\end{Bmatrix}$$ ve $T_1=T_2\neq\pm T_3$ sonuçları

elde edilir. Benzer sonuçlar 21) durumundan elde edilir. Tüm bu sonuçların birleşimi bize Teorem 2'nin c') şıkkını verir.

22) durumunun ele alınmasıyla, $\left(c_1+c_2,c_3\right)\in\left\{\left(0,1\right),\left(0,-1\right)\right\}$ ve $T_1=T_2\neq\pm T_3$ sonuçları elde edilir. Benzer sonuçlar 41) durumundan elde edilir. Tüm bu sonuçların birleşimi bize Teorem 2'nin d') şıkkını verir.

23) durumunun ele alınmasıyla,

$$(c_1,c_2,c_3)\in\begin{Bmatrix}(-1,1,1),(-1/2,1/2,1),(-1/2,1,1/2),(1/2,-1/2,-1),\\ (1,-1,-1),(1/2,-1,-1/2),(1,-1/2,-1/2),(-1,1/2,1/2)\end{Bmatrix}$$

sonuçları elde edilir. $(c_1,c_2,c_3)=(-1,1,1)$ sonucu (5) eşitliğinde yerine koymak bize $-T_1+T_2+T_3=-T_1T_2T_3$ eşitliğini verir. Benzer sonuçlar 24), 29) ve 35) durumlarından elde edilir. Tüm bu sonuçların birleşimi bize Teorem 1'in c) şıkkını verir.

25) durumunun ele alınmasıyla ,

$$(c_1,c_2,c_3)\in\begin{Bmatrix}\left(1/2,-1/2,1\right),\left(-1/2,1/2,1\right),\left(3/4,-1/4,1/2\right),\left(-1/4,3/4,1/2\right),\\ \left(1/4,1/4,1/2\right),\left(1/2,-1/2,-1\right),\left(-1/2,1/2,-1\right),\left(1/4,-3/4,-1/2\right),\\ \left(-3/4,1/4,-1/2\right),\left(1/4,1/4,-1/2\right),\left(3/4,-1/4,-1/2\right),\left(-1/4,3/4,-1/2\right),\\ \left(-1/4,-1/4,-1/2\right),\left(1/4,-3/4,1/2\right),\left(-3/4,1/4,1/2\right),\left(-1/4,-1/4,1/2\right)\end{Bmatrix}$$

sonuçları elde edilir. $(c_1,c_2,c_3)=(1/4,1/4,1/2)$ sonucunu (6) eşitliğinde yerine koymak bize $T_1+T_2+T_3-\left(T_1+T_2\right)T_3^2=T_1T_2T_3$ eşitliğini verir. Benzer sonuçlar 38) durumundan elde edilir. Tüm bu sonuçların birleşimi bize Teorem 2'nin e') şıkkını verir.

26) durumunun ele alınmasıyla,

$$(c_1,c_2,c_3)\in\left\{\begin{array}{l}(-2,1,2),(-3/2,1/2,2),(-1,1,1),(-1/2,1/2,1),(2,-1,-2),\\(3/2,-1/2,-2),(1,-1,-1),(1/2,-1/2,-1),(3/2,-1/2,-1),\\(1/2,1/2,-1),(-1/2,-1/2,1),(-3/2,1/2,1)\end{array}\right\}$$

sonuçları elde edilir. $(c_1,c_2,c_3)=(-2,1,2)$ sonucunu (6) eşitliğinde yerine koymak bize $-T_1+T_2+3T_3+\left(T_2-2T_1\right)T_3^2=2T_1T_2T_3$ eşitliğini verir. Benzer sonuçlar 27), 36) ve 37) durumlarından elde edilir. Tüm bu sonuçların birleşimi bize Teorem 2'nin f') şıkkını verir.

28) durumunun ele alınmasıyla,

$$(c_1,c_2,c_3)\in\left\{\begin{array}{l}\left(-1/2,-1/2,2\right),\left(1/2,-1/2,1\right),\left(-1/2,1/2,1\right),\left(1/2,1/2,-2\right),\\\left(1/2,-1/2,-1\right),\left(-1/2,1/2,-1\right),\left(1/2,1/2,-1\right),\left(-1/2,-1/2,1\right)\end{array}\right\}$$

sonuçları elde edilir. $(c_1,c_2,c_3)=(1/2,1/2,-2)$ sonucunu (6) eşitliğinde yerine koymak bize $-3T_3+2\left(T_1+T_2\right)T_3^2=T_1T_2T_3$ eşitliğini verir. Benzer sonuçlar 40) durumundan elde edilir. Tüm bu sonuçların birleşimi bize Teorem 2'nin g') şıkkını verir.

30) durumunun ele alınmasıyla,

$$(c_1,c_2,c_3)\in\left\{\begin{array}{l}(2,1,-2),(1,1,-1),(3/2,1/2,-1),(-1/2,1/2,1),(-2,-1,2),\\(-1,-1,1),(1/2,-1/2,-1),(-3/2,-1/2,1),(-3/2,-1/2,2),\\(-1/2,-1/2,1),(3/2,1/2,-2),(1/2,1/2,-1)\end{array}\right\}$$

sonuçları elde edilir. $(c_1,c_2,c_3)=(2,1,-2)$ sonucunu (6) eşitliğinde yerine koymak bize $T_1+T_2-3T_3+\left(2T_1+T_2\right)T_3^2=2T_1T_2T_3$ eşitliğini verir. Benzer sonuçlar 31), 32) ve 33) durumlarından elde edilir. Tüm bu sonuçların birleşimi bize Teorem 2'nin h') şıkkını verir.

34) durumunun ele alınmasıyla,

$$(c_1,c_2,c_3)\in\left\{\begin{array}{l}\left(-1/2,-1/2,-2\right),\left(1/2,-1/2,-1\right),\left(-1/2,1/2,-1\right),\left(1/2,1/2,2\right),\\\left(1/2,-1/2,1\right),\left(-1/2,1/2,1\right),\left(1/2,1/2,1\right),\left(-1/2,-1/2,-1\right)\end{array}\right\}$$

sonuçları elde edilir. $(c_1, c_2, c_3) = (1/2, 1/2, 2)$ sonucunu (6) eşitliğinde yerine koymak bize $3T_3 + 2(T_1 + T_2)T_3^2 = -T_1T_2T_3$ eşitliğini verir. Benzer sonuçlar 39) durumundan elde edilir. Tüm bu sonuçların birleşimi bize Teorem 2'nin $i')$ şıkkını verir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

[1] S.L. Adler, Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields, Oxford University Press Inc., New York, 1995.

[2] O.M. Baksalary, Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are disjoint, Linear Algebra Appl. 388 (2004) 67-78.

[3] J.K. Baksalary, O.M. Baksalary, Idempotency of linear combinations of two idempotent matrices, Linear Algebra Appl. 321 (2000) 3-7.

[4] J.K. Baksalary, O.M. Baksalary, When is a linear combination of two idempotent matrices the group involutory matrix?, Linear and Multilinear Algebra 54(6) (2006) 429-435.

[5] J.K. Baksalary, O.M. Baksalary, H. Özdemir, A note on linear combinations of commuting tripotent matrices, Linear Algebra Appl. 388 (2004) 45-51.

[6] J.K. Baksalary, O.M. Baksalary, G.P.H. Styan, Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a tripotent matrix, Linear Algebra Appl. 354 (2002) 21-34.

[7] O.M. Baksalary, J. Benitez, Idempotency of linear combinations of three idempotent matrices, two of which are commuting, Linear Algebra Appl. 424 (2007) 320-337.

[8] B. Baldessari, The distribution of a quadratic form of normal random variables, Ann. Math. Statist. 38 (1967) 1700–1704.

[9] J. Benitez, N. Thome, Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a t-potent matrix that commute, Linear Algebra Appl. 403 (2005) 414-418.

[10] J. Benitez, N. Thome, Idempotency of linear combinations of an idempotent matrix and a t-potent matrix that do not commute, Linear and Multilinear Algebra 56 (2008) 679-687.

[11] D.S. Bernstein, Matrix Mathematics, Theory, Facts, and Formulas, 2nd ed., Princeton U.P., New Jersey, 2009.

[12] C. Coll, N. Thome, Oblique projectors and group involutory matrices, Appl. Math. Comput. 140 (2003) 517-522.

[13] C.Y. Deng, D.S. Cvetković-Ilić, Y. Wei, Properties of the combinations of commutative idempotents, Linear Algebra Appl. 436 (2012) 202–221.

[14] N.J. Higham, Functions of Matrices, SIAM, Philadelphia, 2008.

[15] R.A Horn. and C.R Johnson, Matrix Analysis 2nd ed., Cambridge U.P., Cambridge, 2013.

[16] E. Kişi, Corrigendum to "Tripotency of a linear combination of two involutory matrices and a tripotent matrix that mutually commute" [Linear Algebra Appl. 437 (9) (2012) 2091–2109], Linear Algebra Appl. 477 (2015) 211–212.

[17] H. Özdemir, M. Sarduvan., A.Y. Özban, N. Güler, On idempotency and tripotency of linear combinations of two commuting tripotent matrices, Appl Math. Comput. 207 (2009) 197-201.

[18] M. Sarduvan, H. Özdemir, On linear combinations of two tripotent, idempotent, and involutive matrices, Appl Math. Comput. 200 (2008) 401-406.

[19] G.A.F. Seber. Matrix Handbook for Statisticians. Wiley, New Jersey, 2007.

[20] M. Tošic, On some linear combinations of commuting involutive and idempotent matrices, Appl. Math. Comput. 233 (2014) 103–108.

[21] Y.Wu,K-Potentmatrices-construction and applications in digital image encryption, in: Recent Advances in AppliedMathematics, AMERICAN-MATH'10 Proceedings of the 2010 American Conference on Applied mathematics, USA, 2010, pp. 455–460.

[22] C. Xu, On the idempotency, involution and nilpotency of a linear combination of two matrices, Linear and Multilinear Algebra 63 (2015) 1664-1677.

[23] C. Xu., R. Xu, Tripotency of a linear combination of two involutory matrices and a tripotent matrix that mutually commute, Linear Algebra Appl. 437 (2012) 2091-2109.