

TITO SİSTEMLERİN KÖŞEĞEN BASKINLIK VE KARARLILIK PROBLEMİ: STATİK KÖŞEĞEN KONTROLÖR DURUMU

İlhan MUTLU (*mutlui@itu.edu.tr*)

İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik Elektronik Fakültesi, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye

Mehmet Turan SÖYLEMEZ (*soylemezm@itu.edu.tr*)

İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik Elektronik Fakültesi, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü, İstanbul, Türkiye

ÖZET

Bu çalışmada, statik köşegen bir ön kontrolör ile kontrol edilen İki Girişli İki Çıkışlı (TITO) sistemlerin köşegen baskınlığı ve kararlılığı problemleri ele alınmıştır. Bu amaçla, öncelikle standart köşegen baskınlık tanımına ağırlık katsayıları eklenmiştir. Ardından, ağırlıklandırılmış köşegen baskınlığın sağlanması ve istenen baskınlık oranlarının elde edilebilmesi için kontrolör parametrelerinin sağlanması gereken gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir. Elde edilen teorik sonuçlar da kullanılarak istenen bir frekansta kapalı çevrim sistemi köşegen baskın kılan kontrolör parametre bölgelerinin belirlenmesine yönelik bir algoritma önerilmiştir. Önerilen bu algoritma herhangi bir frekans kısıtı içermediğinden kolaylıkla belirli bir frekans aralığında köşegen baskınlığı sağlayan parametre bölgelerinin belirlenmesi amacıyla da kullanılabilir durumdadır. Köşegen baskınlığın sağlanması en genel durumda kararlılığın da sağlandığı anlamına gelmediğinden bu çalışma kapsamında köşegen baskınlık kavramının yanı sıra kararlılık probleminin de üzerinde durulmuştur ve bu tarz sistemleri kararlı kılan kontrolör parametrelerinin belirlenmesine yönelik Lyapunov eşitliği temelli yeni bir yaklaşıma değinilmiştir. Son olarak da elde edilen teorik sonuçların doğruluğunun ve önerilen algoritmanın etkinliğinin gösterilmesi amacıyla örnek bir TITO sistem ele alınmıştır. Yapılan hesaplamalar ve benzetimler, beklenildiği gibi teorik sonuçların doğruluğunu gösterir niteliktedir.

Anahtar Kelimeler: *Çok Girişli Çok Çıkışlı Sistemler, Köşegen Baskınlık, Kararlılık, İki Girişli İki Çıkışlı Sistemler, Lyapunov Eşitliği.*

DIAGONAL DOMINANCE AND STABILITY PROBLEM OF TITO SYSTEMS: THE CASE OF STATIC DIAGONAL CONTROLLERS

İlhan MUTLU (*mutlui@itu.edu.tr*)

Istanbul Technical University, Electrical - Electronics Faculty, Control and Automation Engineering Department, Istanbul, Turkey

Mehmet Turan SÖYLEMEZ (*soylemezm@itu.edu.tr*)

Istanbul Technical University, Electrical - Electronics Faculty, Control and Automation Engineering Department, Istanbul, Turkey

ABSTRACT

Diagonal dominance and stability problems of Two Input Two Output (TITO) systems were discussed within the scope of this study for the case of static diagonal controllers. For this purpose, firstly, weighting factors were added to the standard definition to achieve better diagonal dominance ratios. After that, necessary and sufficient conditions on controller parameters were derived analytically in order to achieve closed loop diagonal dominance. Then, using the derived theoretical results, an algorithm was proposed to determine the controller parameter regions that achieve closed loop weighted diagonal dominance at a given fixed frequency. While the algorithm was proposed for fixed frequencies, it can be easily extended for a given frequency range as the derived theoretical results do not include any frequency limitation. In general, achieving diagonal dominance does not mean whether the closed loop system is stable or not. For this reason, a new Lyapunov Equation based approach was presented to determine the stabilizing controller parameter regions. Lastly, a case study is discussed in order to verify the effectiveness of the proposed algorithm and derived theoretical results. As expected, calculations and simulations show that the theoretical and practical results are consistent.

Keywords: *Multi Input Multi Output Systems, Diagonal Dominance, Stability, Two Input Two Output Systems, Lyapunov Equation*

1. GİRİŞ

Endüstriyel kontrol sistemlerinin büyük bir bölümü birden fazla giriş ve çıkış içerdiğinden bu tür sistemler için etkin kontrolörlerin tasarlanması pratik açıdan bakıldığında fazlasıyla kritik bir konudur (Vasquez ve Morilla, 2002). Bu tür sistemlerdeki karmaşık çevrimlerin bir sonucu olarak en genel durumda herhangi bir giriş değişkeni tüm çıkışları etkilemektedir. Bu tarz etkileşimler nedeniyle belirli bir çıkışın performansı iyileştirilirken kolaylıkla istenmeyen bir etki olarak farklı bir çıkışın performansı bozulabilmektedir.

Bazı özel durumlarda farklı giriş-çıkış çiftleri arasındaki etkileşimler harcanan kontrol enerjisini düşürmeye yönelik kullanılabilir de genellikle Çok Girişli Çok Çıkışlı (MIMO) sistemlerde farklı giriş ve çıkışlar arasındaki etkileşimler bu tarz sistemlerin kontrolünü zorlaştıran etkenler olarak kabul edilmektedir (Aström ve diğerleri, 2002). Etkileşimlerin önemli boyutlara ulaştığı durumlarda SISO sistemler için geliştirilen ve merkezi olmayan kontrol yöntemleri uygulanamaz hale gelmektedir. Bu tür kontrol yapıları ise uygulamada genel olarak basit yapıları, daha az ayarlama parametresi barındırmaları ve sensör ve/veya eyleyici arızalarına karşı daha dayanıklı olmaları nedeniyle tercih edilmektedirler (Vu ve Lee, 2008). Farklı giriş-çıkış çiftleri arasındaki etkileşimlerin fazla olduğu durumlarda, bu tür kontrolörlerin uygulanabilmesi için tasarımcı öncelikle etkileşimleri ortadan kaldıran (köşegenleştirilen) veya azaltan (köşegen baskın kılan) bir ön kontrolör tasarımına gitmelidir.

Literatürde köşegen dışındaki terimlerin etkilerini tamamen ortadan kaldırmaya yönelik birçok çalışma mevcuttur. (Cai ve diğerleri, 2008)'de değinildiği gibi bu yöntemlerin en önemlileri olarak basitleştirilmiş, ideal ve tersinir köşegenleştirme sıralanabilir. Önerilen bu yöntemler bazı özel durumlarda uygulanabilir olsalar da

en genel durumda kararlılık ve nedensellik temelli problemler içermektedirler. Bu tür yöntemlerin geniş bir sistem sınıfına uygulanamamasına ek olarak sistem parametrelerinde meydana gelebilecek bir belirsizlik durumunda da tam olarak köşegenleştirilmeden söz edilememektedir.

Bu nedenlerden dolayı, bu çalışma kapsamında köşegenleştirme koşulları ile kıyaslandığında daha zayıf bir koşul olarak öne çıkan ancak çok daha geniş bir sistem sınıfına uygulanabilir durumda olan köşegen baskınlık kavramı ele alınacaktır. Satır (veya sütun) köşegen baskınlığının sağlanabilmesi için köşegende bulunan terimin genliği ilgili satır (veya sütun) da bulunan diğer tüm terimlerin genlikleri toplamına eşit veya daha büyük olmalıdır. Bunun bir sonucu olarak köşegen baskınlık koşullarının sağlandığı sistemlerde bir girişin önemli ölçüde sadece bir çıkışla etkileşim halinde olduğu ve diğer girişlerin o çıkış üzerinde sınırlı bir etkisinin olduğu söylenebilir.

Kontrol mühendisliği açısından bakıldığında ise köşegen baskınlık kavramının önemine ilk olarak Nyquist tasarım yöntemini MIMO sistemlere genişleten Rosenbrock'un öncü çalışmasında vurgu yapılmıştır (Rosenbrock, 1969). (Owens, 2002)'de değinildiği gibi bu çalışmanın ardından köşegen baskınlığın sağlanmasına yönelik çeşitli yöntemler öne sürülmüştür (Hawkins, 1972), (Ford ve Daly, 1979). Son yıllarda ise köşegen baskınlık problemi farklı matematiksel yaklaşımlarla ele alınarak çözüme de yine farklı yollardan gidilmiştir (Chungtai ve Munro, 2004), (Labibi ve diğerleri, 2006) , (Mutlu ve Söylemez, 2015) .

Dinamik sistemler için sağlanması gereken bir diğer ve belki de en önemli özellik de kararlılıktır. Köşegen baskınlık kriteri genlik üzerinden tanımlandığından bu kriterin sağlanması en genel durumda kararlılığın da sağlanacağı anlamına gelmez. SISO sistemlerle karşılaştırıldığında MIMO sistemlerin karakteristik polinomları çok daha karmaşık bir yapıdadır. SISO için önerilen

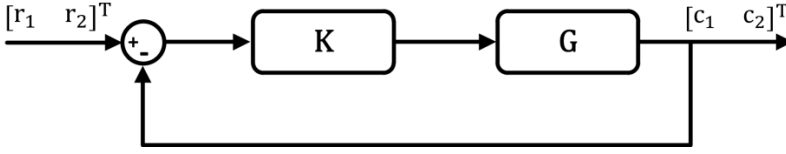
Parametre Uzayı Yaklaşımı, D-Ayrıştırması, Hermite-Biehler Yaklaşımı vb. yaklaşımların aksine direkt olarak MIMO sistemlerin kararlılık probleminin ele alındığı çalışma sayısı ise oldukça sınırlıdır. Bu çalışma kapsamında bu tarz sistemleri kararlı kılan kontrolör parametrelerinin belirlenmesine Lyapunov Eşitliği temelli bir yaklaşıma öne sürülecektir.

(Lui ve Gao, 2012)'de değinildiği gibi pratikte birçok MIMO sistem, TITO alt sistemlere ayrıştırılabilir durumdadır. Bu nedenle, pratik açıdan bakıldığında TITO sistemler için köşegen baskınlık ve kararlılık açısından etkin yöntemlerin ortaya konulması büyük önem arz etmektedir.

Bu çalışma kapsamında ise kontrolörün statik köşegen yapıda olduğu durum için TITO sistemlerin köşegen baskınlığı ve kararlılığı problemleri ele alınmıştır. İstenen baskınlık oranlarının kapalı çevrimde elde edilebilmesi için sağlanması gereken gerek ve yeter koşullar analitik olarak belirlenmiştir. Elde edilen koşullar herhangi bir frekans kısıtı içermemektedir. Bu sonuçlar kullanılarak köşegen baskınlığı sağlayan parametre bölgelerinin belirlenmesine yönelik bir algoritma önerilmiştir. Bu algoritma her ne kadar istenen sabit bir frekans için önerilmiş olsa da kolaylıkla belirli bir frekans bölgesine genişletilebilir durumdadır. Bu tarz sistemleri kararlı kılan parametre bölgelerinin belirlenmesi için ise Lyapunov eşitliği temelli ve frekans taramasına gerek duyulmayan bir yöntemle değinilmiştir.

2. KÖŞEGEN KONTROLÖRLER İÇİN KÖŞEGEN BASKINLIK KOŞULLARININ BELİRLENMESİ

Daha önceden de değinildiği gibi pratik açıdan bakıldığında birçok MIMO sistem TITO alt sistemlere ayrıştırılabilir durumdadır bu nedenle TITO sistemler literatürde sıklıkla ele alınan sistem türlerinin başında gelmektedir. Bu çalışma kapsamında ele alınan kontrol düzeneği ise Şekil 1'de verildiği gibidir.



Şekil 1: Bu çalışma kapsamında ele alınan kontrol yapısı

Burada G , TITO sistemin transfer fonksiyonu matrisini, K ise statik köşegen kontrolörü temsil etmektedir. Dolayısıyla G ve K

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda $g_d = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ olarak tanımlandığında kapalı çevrim transfer fonksiyonu matrisi kolaylıkla

$$T = (I + GK)^{-1}GK \\ = \frac{1}{\det(I + GK)} \begin{bmatrix} k_1g_{11} + k_1k_2g_d & k_2g_{12} \\ k_1g_{21} & k_2g_{22} + k_1k_2g_d \end{bmatrix} \quad (2)$$

olarak belirlenebilir. İlgilenilen bu kontrol sistemi yapısında köşegen baskınlığın sağlanabilmesi için köşegendeki terimin genliğinin ilgili sütun veya satırdaki köşegende bulunmayan terimin genliğine eşit veya büyük olması gerekmektedir. Köşegen baskınlık açısından bakıldığında (2)'nin paydasında yer alan $\det(I + GK)$ ifadesini ilgili frekanslarda sıfır yapan kontrolörler tüm genlik değerlerini sonsuz yapar ve kapalı çevrim transfer fonksiyonu matrisi elemanları arasında karşılaştırma yapmak mümkün olmaz. Bu nedenle ilgilenilen frekans değerinde $\det(I + GK)$ ifadesini sıfır yapan kontrolör parametre eğrisi veya düzlemi sistemi o frekansta köşegen baskın kılan bölgeye dahil edilmemelidir

2.1. Sütun Köşegen Baskınlığı ve Ağırlık Katsayıları

Herhangi bir A matrisinde köşegendeki tüm terimlerin genlikleri ilgili sütundaki diğer terimlerin genlikleri toplamına eşit veya bu

toplamdan daha büyük ise bu matrise sütun köşegen baskın bir matris denir. Tanım itibarıyla sütun köşegen baskınlığın sağlanabilmesi için köşegendeki terimin genliğinin ilgili sütunda köşegende olmayan terimlerin genlikleri toplamına eşit olması yeterlidir. Ancak, pratik açıdan bakıldığında bu koşulun sağlanması her zaman tatmin edici sonuçlar vermeyebilir.

Köşegen baskınlık oranının istenen bir seviyenin üstüne çıkarmak için tanıma ağırlık katsayılarının eklenmesi önerilebilir. Bu katsayıların 1'e eşit olduğu durumlarda standart köşegen baskınlık koşullarına karşı düşülürken 1'den büyük olduğu durumlar ise köşegendeki terim genliğinin köşegende bulunmayan terimin belirli bir katından büyük olduğunun garanti altına alındığı parametre bölgeleri belirlenebilir.

Kapalı çevrim transfer fonksiyonu (2) ile verilen bir kontrol sistemi için $\det(I + GK)$ ifadesinin sıfır olmadığı varsayımı altında ağırlıklandırılmış sütun köşegen baskınlığının elde edilebilmesi için sağlanması gereken koşullar

$$|k_1g_{11} + k_1k_2g_d| \geq \alpha_{c1}|k_1g_{21}| \quad (3)$$

$$|k_2g_{22} + k_1k_2g_d| \geq \alpha_{c2}|k_2g_{12}| \quad (4)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada α_{c1} ve α_{c2} sırasıyla ilk ve ikinci sütunların ağırlık katsayılarını temsil etmektedir ve 1'den büyük veya eşit olmalıdır. Bu katsayıların bire eşit olduğu durumda standart köşegen baskınlığı koşuluna karşı düşülürken birden büyük olduğu durumlarda ise verilen koşullar ağırlıklandırılmış köşegen baskınlığı koşullarını temsil etmektedir.

(3) ve (4) ifadeleri incelendiğinde her iki eşitsizliğin de iki tarafının sırasıyla k_1 ve k_2 parantezine alınabileceği belirlenir. Bu sadeleştirme işlemi gerçekleştirildikten sonra elde edilen ifadelerin genlikleri, ilgili transfer fonksiyonlarının reel ve imajiner kısımları kullanılarak genelliği kaybetmeden

$$\begin{aligned} & (Re(g_{11} + k_2 g_d))^2 + (Im(g_{11} + k_2 g_d))^2 \\ & \geq \alpha_{c1}^2 \left((Re(g_{21}))^2 + (Im(g_{21}))^2 \right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & (Re(g_{22} + k_1 g_d))^2 + (Im(g_{22} + k_1 g_d))^2 \\ & \geq \alpha_{c2}^2 \left((Re(g_{12}))^2 + (Im(g_{12}))^2 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

olarak yazılabilir. Bu iki koşuldaki karesel ifadeler açıldığında ise verilen sistem ve kontrol yapısı için sütun köşegen baskınlığının sağlanabilmesi için iki adet karesel eşitsizliğin sağlanması gerektiği sonucu elde edilir. Sonuçta (2) ile ifade edilen kapalı çevrimli sistemin istenilen herhangi bir frekansta ağırlıklandırılmış sütun köşegen baskınlığını sağlaması ancak ve ancak

$$a_{wc1} k_2^2 + b_{wc1} k_2 + c_{wc1} \geq 0 \quad (7)$$

$$a_{wc2} k_1^2 + b_{wc2} k_1 + c_{wc2} \geq 0 \quad (8)$$

şeklindeki iki karesel eşitsizliği sağlaması ile mümkün olur. (7) ve (8)'deki a_{wci} , b_{wci} ve c_{wci} ifadeleri Ek-A'da verilen katsayı terimleridir. Bu ifadeler en genel durumda frekansa bağlı birer fonksiyon olmakla birlikte ilgilenilen herhangi bir frekans değeri için her bir terim sabit bir değer almaktadır. Bu nedenle herhangi bir frekans değeri için sütun köşegen baskınlık koşullarını sağlayan parametre bölgelerinin belirlenmesi iki adet karesel ifadenin çözümüne indirgenmiş olur.

2.2. Satır Köşegen Baskınlığı ve Ağırlık Katsayıları

Herhangi bir matrisin satır köşegen baskın olarak ifade edilebilmesi için ilgili matrisin köşegeninde bulunan tüm terimlerin genliğinin o satırda bulunan ve köşegende olmayan terimlerin genlikleri toplamından büyük veya eşit olmalıdır.

Önceki bölümde yapılan varsayım altında (2) ile verilen kapalı çevrim sistemin istenen satır köşegen baskınlığı oranlarını yakalayabilmesi için sağlanması gereken koşullar

$$|k_1 g_{11} + k_1 k_2 g_d| \geq \alpha_{r1} |k_2 g_{12}| \quad (9)$$

$$|k_2 g_{22} + k_1 k_2 g_d| \geq \alpha_{r2} |k_1 g_{21}| \quad (10)$$

şeklinde. Burada α_{r1} ve α_{r2} sırasıyla ilk ve ikinci satırların ağırlık katsayılarıdır ve burada istenen köşegendeki terimlerin genliğini ilgili satırdaki terimin α_{r1} ve α_{r2} katından büyük kılan kontrolör parametrelerinin belirlenmesidir. Ağırlık katsayıları sütun baskınlığında olduğu gibi 1'den büyük veya eşit olmalıdır.

(9) ve (10) ifadeleri incelenecek olursa ilk olarak her iki eşitsizliğin sağ ve sol taraflarındaki ifadelerin k_1 ve k_2 parantezlerinde yazılabileceği görülür. Bu durumda $g_{11}^* = \frac{g_{11}}{g_{12}}$, $g_{22}^* = \frac{g_{22}}{g_{21}}$, $g_{d12}^* = \frac{g_d}{g_{12}}$ ve $g_{d21}^* = \frac{g_d}{g_{21}}$ tanımlamaları yapıldığında ve $|g_{12}| \neq 0$, $|g_{21}| \neq 0$, $|k_1| \neq 0$ ve $|k_2| \neq 0$ varsayımları altında kapalı çevrim sistemin satır köşegen baskın olabilmesi için sağlanması gereken koşullar

$$|g_{11}^* + k_2 g_{d12}^*| \geq \alpha_{r1} \left| \frac{k_2}{k_1} \right| \quad (11)$$

$$|g_{22}^* + k_1 g_{d21}^*| \geq \alpha_{r2} \left| \frac{k_1}{k_2} \right| \quad (12)$$

olarak yazılabilir. Bu noktada eşitsizliklerin sağ ve sol taraflarındaki ifadelerin reel ve imajiner kısımları kullanılarak (11) ve (12) ile verilen koşullar

$$\left(\text{Re}(g_{11}^* + k_2 g_{d12}^*) \right)^2 + \left(\text{Im}(g_{11}^* + k_2 g_{d12}^*) \right)^2 \geq \alpha_{r1}^2 \frac{k_2^2}{k_1^2} \quad (13)$$

$$\left(\operatorname{Re}(g_{22}^* + k_1 g_{d21}^*) \right)^2 + \left(\operatorname{Im}(g_{22}^* + k_1 g_{d21}^*) \right)^2 \geq \alpha_{r2}^2 \frac{k_1^2}{k_2^2} \quad (14)$$

şeklinde ifade edilebilir. (13) ve (14) ifadelerindeki karesel terimler açıldığında ise satır köşegen baskınlığın elde edilebilmesi için sağlanması gereken koşullar

$$a_{wr1} k_2^2 + b_{wr1} k_2 + c_{wr1} \geq \alpha_{r1}^2 \frac{k_2^2}{k_1^2} \quad (15)$$

$$a_{wr2} k_1^2 + b_{wr2} k_1 + c_{wr2} \geq \alpha_{r2}^2 \frac{k_1^2}{k_2^2} \quad (16)$$

olarak belirlenir. (15) ve (16) ifadelerinde yer alan a_{wri} , b_{wri} , ve c_{wri} , katsayı terimleri Ek-A'da tanımlandığı gibidir. Sonuç olarak (2) ile ifade edilen kapalı çevrim sistemde istenen satır baskınlık oranlarının yakalanması ancak ve ancak (15) ve (16) eşitsizliklerinin sağlanması ile mümkündür.

2.3. Köşegen Baskınlığın Sağlandığı Kontrolör Parametre Bölgelerinin Belirlenmesine Yönelik Bir Algoritma

Elde edilen teorik sonuçlar kullanılarak belirli bir frekansta istenen baskınlık oranlarının sağlandığı parametre bölgelerinin belirlenmesine yönelik bir algoritma önerilebilir. Önerilen bu algoritma kolaylıkla bir frekans aralığına da genişletilebilir. Sabit bir frekans için tüm katsayı terimleri sabitlere karşı düşmektedir. Belirli bir frekans aralığı için ise frekans değeri de bir değişken olur. Bu gibi durumlarda ilgili frekans bölgesi küçük aralıklara bölünerek algoritma adımları tekrar edilebilir.

Bu çalışma kapsamında önerilen algoritmanın adımları şu şekildedir:

Adım 1: $\alpha_{c1} \geq 1$, $\alpha_{c2} \geq 1$, $\alpha_{r1} \geq 1$ ve $\alpha_{r2} \geq 1$ olacak şekilde ağırlık katsayılarını belirle.

Adım 2: İlgili frekans için (7) ve (8) ifadelerini kullanarak sütun köşegen baskınlığı için ilgili koşulların sağlandığı parametre bölgesini belirle.

Adım 3: İlgili frekans için (15) ve (16) ifadelerini kullanarak satır köşegen baskınlığı için ilgili koşulların sağlandığı parametre bölgesini belirle.

Adım 4: Hem sütun hem de satır köşegen baskınlık koşullarının sağlandığı bölgelerin belirlenmesi için Adım 2 ve Adım 3'te belirlenen parametre bölgelerinin kesişimini al.

Adım 5: İlgili frekansta $\det(I + GK) = 0$ yapan $k_1 - k_2$ eğrisini belirle. Eğer bu eğri Adım 4'te belirlenen bölge ile kesişiyorsa köşegen baskın kılan bölgeden çıkart.

Önerilen bu algoritmada ağırlık katsayılarının tümü 1 olarak seçildiği özel durumda standart köşegen baskınlık kriterlerini sağlayan parametre bölgesi belirlenir.

3. KARARLILIK ANALİZİ

Sadece köşegen baskınlık kriterlerinin sağlanması en genel durumda ele alınan sistemin kararlı olup olmadığıyla ilgili olarak direkt bir bilgi içermemektedir. Bu açıdan bakıldığında pratik anlamda tatminkâr sonuçların elde edilebilmesi için köşegen baskınlık ve kararlılık koşullarının birlikte sağlanması gerektiği öne sürülebilir.

Lineer zamanla değişmeyen bir MIMO sistemin kararlı olabilmesi için içerdiği tüm transfer fonksiyonları kararlı olmalıdır. Diğer bir deyişle kararlılığın sağlanabilmesi için karakteristik polinomun kökleri sol yarı karmaşık düzlemde yer almalıdır. Bu çalışma kapsamında ele alınan ve (2) ile ifade edilen kapalı çevrim sistem için karakteristik polinom

$$p_c(s) = 1 + k_1g_{11} + k_2g_{22} + k_1k_2(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) \quad (17)$$

olarak ifade edilebilir.

Kapalı çevrim karakteristik polinomu (17) ile ifade edilen bir sistemin kararlılık analizi farklı yöntemler kullanılarak gerçekleştirilebilir. Kontrolörün statik köşegen yapıda olduğu durumlarda sistemi kararlı kılan kontrolör parametre bölgelerinin belirlenmesine yönelik daha özel ve etkili yöntemler önerilebilir (Üstoğlu, 2009).

Diğer taraftan, bu tarz sistemlerin kararlılığının analiz edilmesinde kullanılabilecek daha genel bir yöntem ise Lyapunov eşitliği temelli yaklaşımdır (Mutlu ve diğerleri, 2016). Bu tarz bir yaklaşımda kararlılık problemi zaman tanım bölgesinde tanımlanmadığından frekans temelli yaklaşımlarda olduğu gibi tarama işlemine de gerek kalmaz. Buna ek olarak, bu çalışma kapsamında önerilen bu yöntem parametre sayısına ve kontrolör türüne bağlı olmadığından karmaşık kontrol çevrimlerinin olduğu çok girişli çok çıkışlı sistemlere de direkt olarak uygulanabilir.

Lineer zamanla değişmeyen MIMO bir sistem $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $k \in \mathbb{R}^p$ olmak üzere kapalı çevrimde $\dot{x} = A(k)x$ şeklinde ifade edilebilir. Burada k kontrolör parametrelerini temsil etmektedir. Bu durumda kolaylıkla ispatlanabilir ki $\dot{x} = A(k)x$ sisteminin asimptotik kararlı olabilmesi sadece ve sadece

$$A^T(k)P + PA(k) = -Q \quad (18)$$

Lyapunov eşitliğini sağlayan (kesin) pozitif tanımlı Q ve P matrislerinin var olmasına bağlıdır. (Laub, 2004)'da değinildiği gibi Kronecker çarpımları kullanılarak (18)

$$(I \otimes A^T(k) + A^T(k) \otimes I) \text{vec}(P) = -\text{vec}(Q) \quad (19)$$

şeklinde yazılabilir. Burada \otimes Kronecker çarpımını temsil etmektedir. $\text{vec}(\cdot)$ gösterimi ise ilgili matrisin sütunlarının alt alta eklenmesinden elde edilen vektörü ifade etmektedir. Bu durumda M matrisi

$$M(k) = (I \otimes A^T(k) + A^T(k) \otimes I) \quad (20)$$

şeklinde tanımlanarak P matrisinin tüm terimleri

$$vec(P) = M^{-1}(k)vec(-Q) \quad (21)$$

eşitliğinden belirlenebilir. (21)'den doğrudan elde edilebilecek ilk sonuç P matrisinin tüm terimlerinin paydalarının $M(k)$ 'nin determinantına bağlı olduğudur. P 'nin kesin pozitif tanımlı bir matris olabilmesi için tüm öncü minörlerinin pozitif olması gerekmektedir. Öncü minörlerin pay ve payda ifadeleri düşünüldüğünde kararlılık sınırlarını belirlemek için $2n$ adet eşitliğin çözülmesi gerektiği sonucu çıkar. Ancak P 'nin tüm elemanlarının paydası M 'nin determinantına eşit olduğundan bu sayı $n+1$ 'e düşürülebilir. k kontrolör değişkenleri kümesinden parametreler içeren $n+1$ adet lineer olmayan eşitliğin çözülmesi hesaplama karmaşıklığı açısından bakıldığında halen büyük bir yük getirmektedir. Bu noktada A, P ve M matrisleri arasındaki ilişkiler daha detaylı olarak analiz edildiğinde kararlılık sınırlarının belirlenmesine yönelik daha etkili sonuçlar elde edilebilir. (Mutlu ve diğerleri, 2016)'nde belirtildiği gibi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ler A 'nın özdeğerleri olmak üzere

$$|M(k)| = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (\lambda_i + \lambda_j) \quad (22)$$

özelliği de kullanılarak kararlılık sınırlarının belirlenmesi için sadece $|M(k)|$ 'yi sıfır ve sonsuz yapan parametre değerlerinin belirlenmesinin yeterli olduğu iddia edilebilir. Diğer bir deyişle kararlı kılan kontrolör parametre bölgelerinin belirlenebilmesi $n+1$ adet eşitliğin çözülmesi yerine

$$|M(k)| = 0 \text{ ve } |M(k)| \rightarrow \infty \quad (23)$$

şeklindeki M 'nin determinantına bağlı iki adet eşitliğin çözülmesi yeterlidir. Öne sürülen bu yöntem frekans tarama gereksinimini ortadan kaldırması bakımından önemlidir. Buna ek olarak kontrolörün türüne ve parametre sayısına ait bir sınır getirmediğinden çok geniş bir kontrol sistemi sınıfına kolaylıkla uygulanabilir haldedir.

4. BENZETİM SONUÇLARI

Bu çalışma kapsamında elde edilen teorik sonuçların etkinliğinin sınanması amacıyla ele alınacak TITO sistem

$$G = \begin{bmatrix} \frac{(6 - 2s)}{(2 + 5s)} & \frac{(1 + 4s)}{(2 + 7s)(1 + 10s)} \\ 1.5 & 2 \\ \frac{1.5}{(2 + 5s)} & \frac{2}{(1 + 10s)} \end{bmatrix} \quad (24)$$

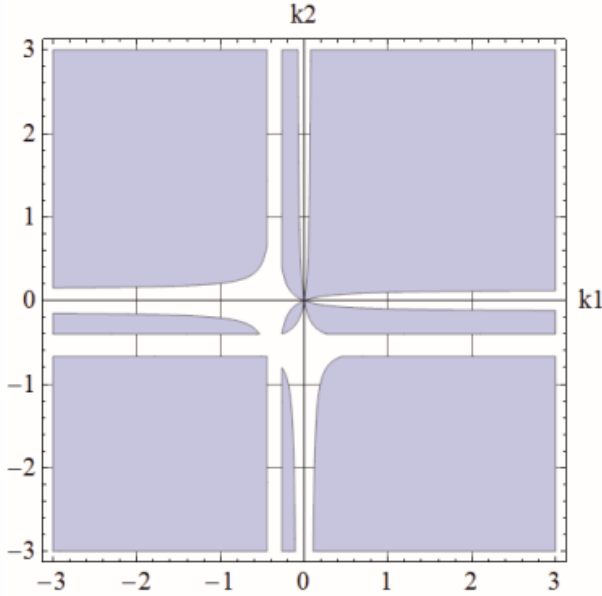
şeklinde ifade edilebilir. Çok daha karmaşık sistemlerin yerine (24) ile ifade edilen sistemin seçilmesinin nedeni elde edilen sonuçların kolaylıkla görselleştirilebilmesinin hedeflenmesidir. Literatürde var olan başlıca köşegenleştirme yöntemleri (Cai ve diğerleri, 2008)'de değinildiği gibi ideal, basitleştirilmiş ve tersinir köşegenleştirme olarak sıralanabilir. Bu yöntemler ayrıntılı olarak incelendiğinde köşegen bir sistem elde edebilmek için transfer fonksiyonu matrisini oluşturan transfer fonksiyonlarının terslerinin ve/veya çarpımlarının ön kontrolörün elemanı olduğu görülür. (24) ile ifade edilen TITO transfer fonksiyonu matrisindeki transfer fonksiyonlarından bazıları sağ yarı düzlem sıfırı içerdiğinden ve kesin nedensel olduğundan tersleri alındığında tam köşegenleştiren ön kontrolörün gerçekleştirilmesinde nedensellik ve kararlılık temelli problemler ortaya çıkacaktır. Dolayısıyla bu çalışma kapsamında ele alınan ve (24) ile ifade edilen sistemin literatürde var olan tam köşegenleştirme yöntemlerinin direkt olarak uygulanmasına engel olacak karmaşıklık seviyesinde olduğu belirtilebilir. Tüm bunlara ek olarak, pratik açıdan bakıldığında birçok dinamik sistem birinci veya

ikince mertebeden sistemler olarak modellenebilmesi (24) ile ifade edilen sisteminde seçilmesinde etkin bir rol oynamıştır.

Bu çalışma kapsamında ele alınan sistemi hem köşegen baskın kılan hem de kararlığı garanti altına alan parametre bölgelerinin hesaplanmasında sembolik hesaplamalarda büyük kolaylıklar sağlayan Mathematica paket programı kullanılmıştır.

Pratik açıdan bakıldığında köşegen baskınlığın tüm frekans değerlerinde sağlanması istenir ancak bunun mümkün olmadığı durumlarda sistemin çalışma frekansında ve/veya ilgilenilen frekans aralığında köşegen baskın kılınabilmesi de anlamlı hale gelir.

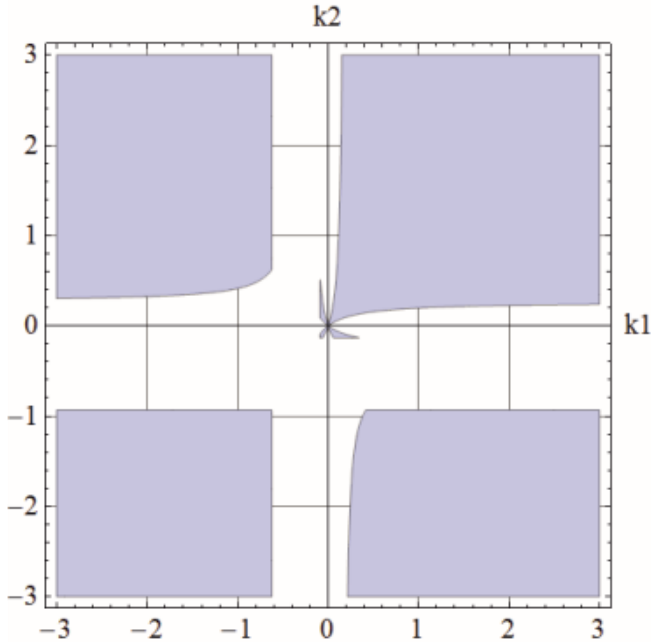
(24) ile ifade edilen TITO sistemi $\omega = 0$ 'da hem satır hem de sütun köşegen baskın kılan statik köşegen kontrolör parametre bölgesi Şekil 2'de verilmiştir. Bu hesaplama için önerilen algoritmada tüm ağırlık katsayıları 1 olarak seçilmiştir ve standart baskınlık koşullarının sağlandığı parametre bölgeleri belirlenmiştir.



Şekil 2. $\omega = 0$ için hem satır hem de sütun köşegen baskınlık koşullarının (standart durum) sağlandığı parametre bölgeleri

Pratik açıdan bakıldığında ise köşegende bulunmayan terimin genliğinin ilgili köşegendeki terime kıyasla önemli bir oranda düşük olması istenir. Bu nedenle bu bölümde ağırlık katsayılarının standart tanıma eklendiği durum da göz önünde bulundurulacaktır. Sütun köşegen baskınlığı için ağırlık katsayıları $\alpha_{c1} = \alpha_{c2} = 3$ ve satır köşegen baskınlığı için de ağırlık katsayıları da $\alpha_{r1} = \alpha_{r2} = 2$ olarak seçilerek hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Böylelikle sütun köşegen baskınlığı için köşegen terimin genliğinin ilgili sütunda köşegende yer almayan terimin genliğinin 3 katına eşit ve daha büyük olduğu kontrolör parametre bölgeleri hesaplanmıştır.

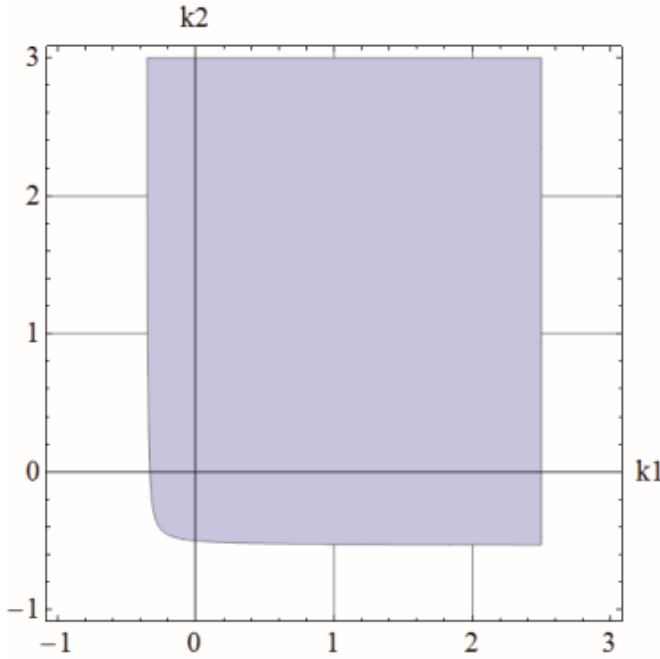
(24) ile ifade edilen TITO sistem için $\omega = 0$ 'da ağırlıklandırılmış köşegen baskınlığı kriterlerinin sağlandığı kontrolör parametre bölgeleri önerilen algoritma kullanılarak Şekil 3'te verildiği gibi belirlenmiştir.



Şekil 3. $\alpha_{c1} = \alpha_{c2} = 3$ ve $\alpha_{r1} = \alpha_{r2} = 2$ için $\omega = 0$ 'da hem satır hem de sütun köşegen baskınlık koşullarının sağlandığı parametre bölgeleri

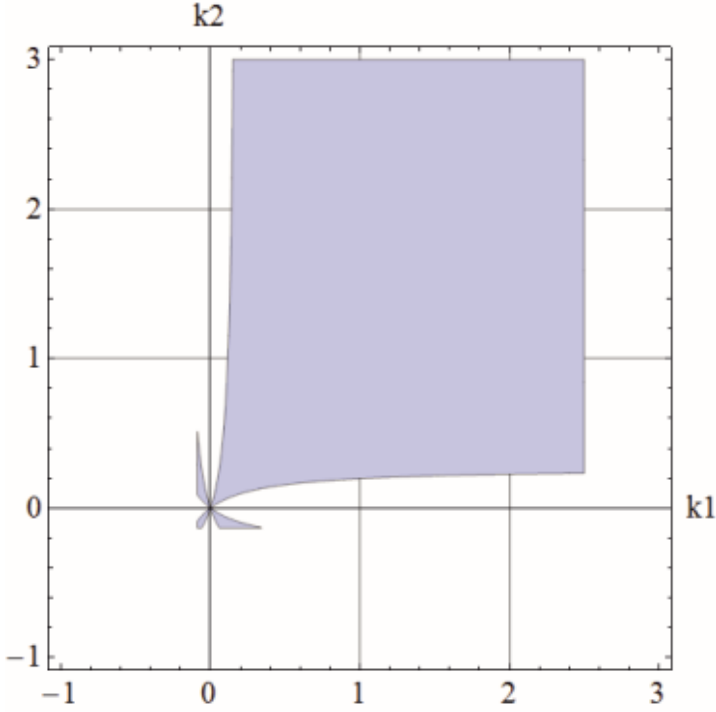
Tüm ağırlık katsayılarının bir olarak seçildiği standart tanımla karşılaştırıldığında (Şekil 2) beklenildiği gibi çok daha sınırlı bölgede istenen koşulların sağlandığı Şekil 3'te görülmektedir.

(24) ile ifade edilen sistemi kapalı çevrimde kararlı yapan $k_1 - k_2$ parametre bölgesi ise Bölüm 3'te ayrıntılı olarak ele alınan Lyapunov temelli yaklaşımla hesaplanabilir. Bu yöntem kullanılarak elde edilen ve (24) sistemini kapalı çevrimde kararlı kılan kontrolör parametre bölgesi Şekil 4'te verildiği gibidir.



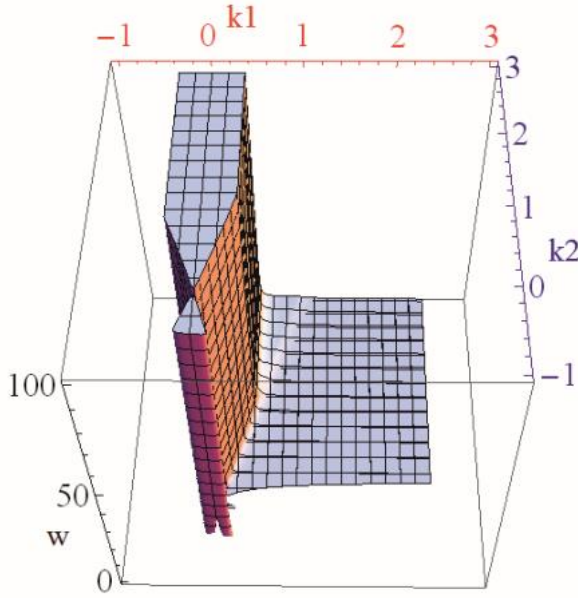
Şekil 4. Kapalı çevrim sistemi kararlı kılan kontrolör parametre bölgesi

Hem kararlılığın hem de istenen baskınlık oranlarının sağlandığı parametre bölgelerinin belirlenebilmesi için ise Şekil 3 ve Şekil 4'ün kesiştiği parametre bölgelerinin bulunması gerekmektedir. $\omega = 0$ için her iki koşulun da sağlandığı parametre bölgeleri Şekil 5'te verildiği gibidir.



Şekil 5. Kapalı çevrim sistemi kararlı kılan ve $\alpha_{c1} = \alpha_{c2} = 3$ ve $\alpha_{r1} = \alpha_{r2} = 2$ için $\omega = 0$ 'da tüm baskınlık koşullarını sağlayan parametre bölgeleri

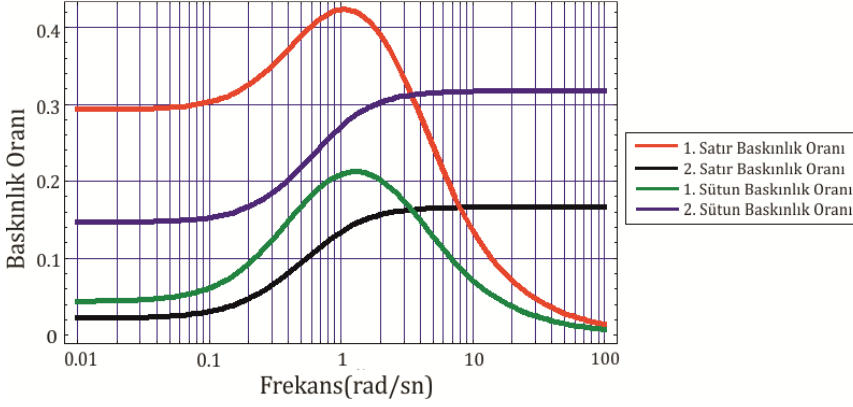
Daha önceden de değinildiği gibi elde edilen sonuçlar kolaylıkla bir frekans aralığına genişletilebilir. Bu çalışmada köşegen baskınlığın sağlanmasının istendiği frekans aralığı $100 \geq \omega \geq 0$ olarak seçilmiş ve bu frekans aralığında kapalı çevrim sistemi hem köşegen baskın kılan hem de kararlılığı sağlayan kontrolör parametrelerinin bölgesi Şekil 6'da verildiği gibi elde edilmiştir.



Şekil 6. Sistemi kararlı kılan ve $100 \geq \omega \geq 0$ için ağırlıklandırılmış ($\alpha_{c1} = \alpha_{c2} = 3$ ve $\alpha_{r1} = \alpha_{r2} = 2$) sütun ve satır köşegen baskınlıklarının sağlandığı bölge

Şekil 6’da görüldüğü gibi düşük frekanslarda çok daha geniş bir parametre bölgesinde tüm koşullar sağlanırken frekans arttıkça köşegen baskınlığın ve kararlılığın birlikte sağlandığı parametre bölgesi daralmaktadır. İlgilenilen frekans bölgelerinde istenen baskınlık oranlarının yakalanıp yakalanmadığından emin olabilmek için köşegen baskınlık oranı çizimlerinden yararlanılabilir. Köşegen baskınlık oranı köşegende bulunmayan terimlerin genlikleri toplamının köşegendeki terimin genliğine oranı şeklinde tanımlandığından dolayı köşegen baskınlığın sağlanabilmesi için bu çizimlerin standart tanım için biri geçmemesi gerekmektedir.

Şekil 6 incelendiğinde, ilgilenilen frekans aralığında tüm koşulların sağlandığı bir parametre çifti $k_1 = 0.25$, $k_2 = 2.5$ olarak seçilebilir. Bu parametre çifti için elde edilen köşegen baskınlık oranı çizimleri Şekil 7’de toplu olarak verilmiştir.



Şekil 7. $k_1 = 0.25$, $k_2 = 2.5$ çifti için elde edilen köşegen baskınlık oranı çizimleri

Bu bölümde sütun ve satır köşegen baskınlıkları için ağırlık katsayıları sırası ile 3 ve 2 olarak seçilmiştir. Dolayısıyla köşegen baskınlık oranı çizimlerinin de sırasıyla $1/3$ ve $1/2$ 'yi aşmaması gerekmektedir. Şekil 7 incelendiğinde, sütun köşegen baskınlık oranının maksimum 0.317 olduğu görülür. Bu değerde de üst sınır olan $1/3$ 'ten beklediği gibi küçüktür. Aynı şekilde satır köşegen baskınlık oranının maksimum 0.423 olduğu belirlenir. Yine bu değer de satır baskınlığı için üst sınır olan $1/2$ 'den beklenildiği gibi küçüktür..

5. SONUÇLAR

Bu çalışma kapsamında TITO sistemleri kapalı çevrimde köşegen baskın kılan statik köşegen kontrolörler için gerek ve yeter koşullar belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlar herhangi bir frekans kısıtlaması içermemektedir. Elde edilen teorik sonuçlar bir algoritmada birleştirilerek istenen bir frekansta köşegen baskınlığı sağlayan parametre bölgelerinin belirlenmesine yönelik bir algoritma önerilmiştir.

Köşegen baskınlığa ek olarak bu tarz sistemleri kararlı kılan kontrolör parametrelerinin belirlenebilmesi için farklı türdeki kontrolörlere de uygulanabilir olan Lyapunov Eşitliği temelli yeni bir yaklaşıma değinilmiştir.

Teorik sonuçların doğruluğu örnek bir sistem kullanılarak sayısal hesaplamalar üzerinden gösterilmiştir. Bu çalışma kapsamında elde edilen teorik sonuçlar ve önerilen algoritma kullanılarak bu tür sistemlerdeki etkileşimleri azaltmaya yönelik bir ön kontrolör tasarımı gerçekleştirilebilir. Literatürde parametre belirsizliği durumunu ele alan bir takım çalışmalar olsa da bu tür belirsizlikler durumunda dahi TITO sistemlerin köşegen baskın kılınması doğrultusundaki çalışmaların sınırlı sayıda ve içerikte olduğu söylenebilir. Buna ek olarak bozucu etkiler altında dahi köşegen baskınlığın sağlanabilmesi ve bozucu işaretler üzerindeki koşulların belirlenmesine yönelik de literatürde yeterli çalışma bulunmamaktadır. Bu nedenlerle, bu çalışma kapsamında elde edilen sonuçların daha geniş bir kontrolör türü sınıfına genişletilmesi, parametre belirsizliği durumunda ve bozucu etkiler altında dahi köşegen baskınlığın garanti alınmasına yönelik çalışmalar gelecekte yapılması planlanan çalışmalar arasındadır.

KAYNAKLAR

- [1] Astrom KJ, Johansson KH, Wang QG. “Design of decoupled PI controllers for two-by-two systems”. IEE Proceedings - Control Theory and Applications 149(1):74–81, 2002.
- [2] Cai WJ, Ni W, He MJ, Ni CY. “Normalized Decoupling-New Approach for MIMO Process Control System Design”. Industrial & Engineering Chemistry Research, 47(19): 7347–7356, August, 2008.
- [3] Chughtai SS, Munro N. “Diagonal dominance using lmis”. IEE Proc Control Theory and Application, 151(2):225-233, March 2004.
- [4] Ford MP, Daly KC. “Dominance Improvement by Pseudodecoupling”. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, 126(12):1316-1320, December 1979.
- [5] Gryazina EN, Polyak BT. “Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited” Automatica, 42(1):13–26, January 2006.
- [6] Hawkins DJ. “Pseudo-diagonalisation and the inverse Nyquist array method”. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers , 119(3):337–342, January, 1972.
- [7] Labibi B, Marquez HJ, Chen T. “Diagonal Dominance via Eigenstructure Assignment” International Journal Of Control, 79(7):707-718, July 2006.
- [8] Laub A.J. “Matrix Analysis for Scientists and Engineers. Society for Industrial and Applied Mathematics” ISBN: 0898715768, Philadelphia, PA, USA, 2004.
- [9] Liu T, Gao F. “Industrial Process Identification and Control Design, Chapter 11:Decoupling Control of Multivariable Processes Advances in Industrial Control”. DOI 10.1007/978-0-85729-977-211, Springer-Verlag, London 2012.
- [10] Mutlu İ, Söylemez MT. “Achieving Diagonal Dominance for TITO Systems Using Diagonal Controllers”. European Control Conference, Linz, Austria, 15-17 July, 2015.

- [11] Mutlu İ, Schrödel F, Bajcinca N, Abel D, Söylemez MT. “Lyapunov Equation Based Stability Mapping Approach A MIMO Case Study”. 6th Symposium on System Structure and Control, Istanbul, Turkey, 22-24 June 2016 (Kabul edildi).
- [12] Owens DH. “A Historical View of Multivariable Frequency Domain Control”. 15th IFAC World Congress, Barcelona, Spain, 2002.
- [13] Rosenbrock HH. “Design of multivariable control systems using the inverse Nyquist array”. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers 116(11):1929-1936, November, 1969.
- [14] Üstoğlu İ. Analysis and design of fixed order stabilizing controllers for SISO and TITO systems: A computer algebra point of view. Ph.D Thesis, Control and Automation Engineering Department, Istanbul Technical University, Istanbul, Turkey, 2009.
- [15] Vasquez F, Morilla F. “Tuning Decentralized PID Controllers for MIMO Systems with Decouplers”. 15th IFAC Triennial World Congress, Barcelona, Spain, 2002.
- [16] Vu TNL, Lee M. “Multi-loop PI/PID Controller Design Based on Direct Synthesis for Multivariable Systems”. Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science WCECS 2008, San Francisco, USA, October 22 - 24, 2008.

Ek A- Bölüm 2’de Kullanılan Katsayı Terimleri

Bölüm 2’de kullanılan katsayı terimleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} a_{wc1} &= \left[(Re(g_d))^2 + (Im(g_d))^2 \right] b_{wc1} \\ &= [2Re(g_{11})Re(g_d) + 2Im(g_{11})Im(g_d)] \end{aligned} \quad (a.1)$$

$$\begin{aligned} c_{wc1} &= \left[(Re(g_{11}))^2 + (Im(g_{11}))^2 \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{c1}^2 \left((Re(g_{21}))^2 + (Im(g_{21}))^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (a.2)$$

$$\begin{aligned} a_{wc2} &= \left[(Re(g_d))^2 + (Im(g_d))^2 \right] b_{wc2} \\ &= [2Re(g_{22})Re(g_d) + 2Im(g_{22})Im(g_d)] \end{aligned} \quad (a.3)$$

$$\begin{aligned} c_{wc2} &= \left[(Re(g_{22}))^2 + (Im(g_{22}))^2 \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{c2}^2 \left((Re(g_{12}))^2 + (Im(g_{12}))^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (a.4)$$

$$\begin{aligned} a_{wr1} &= \left[(Re(g_{d12}^*))^2 + (Im(g_{d12}^*))^2 \right] b_{wr1} \\ &= [2Re(g_{11}^*)Re(g_{d12}^*) + 2Im(g_{11}^*)Im(g_{d12}^*)] \end{aligned} \quad (a.5)$$

$$c_{wr1} = \left[(Re(g_{11}^*))^2 + (Im(g_{11}^*))^2 \right] \quad (a.6)$$

$$\begin{aligned} a_{wr2} &= \left[(Re(g_{d21}^*))^2 + (Im(g_{d21}^*))^2 \right] b_{wr2} \\ &= [2Re(g_{22}^*)Re(g_{d21}^*) + 2Im(g_{22}^*)Im(g_{d21}^*)] \end{aligned} \quad (a.7)$$

$$c_{wr2} = \left[(Re(g_{22}^*))^2 + (Im(g_{22}^*))^2 \right] \quad (a.8)$$