



Akış Problemleri İçin Lattice Boltzmann Yöntemi ve Uygulamaları

Zekeriya Özcan¹, Özgür Ekici^{2,*}

¹ Mercedes-Benz Türk A.Ş. Kamyon Fabrikası, Aksaray

² Makina Mühendisliği Bölümü, Hacettepe Üniversitesi, Ankara

Başvuru: 29/04/2016 Düzeltme: 15/06/2016 Kabul: 27/06/2016

ÖZ

Bu çalışmada Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği (HAD) içerisinde yer alan bir sayısal yöntem olan Lattice Boltzmann Yöntemi (LBM) ele alınmıştır. Lattice Boltzmann yönteminin diğer geleneksel HAD yöntemlerinden temel farklılığı, bir akış probleminde gerçekleşen fiziksel olayları hangi düzeyde incelediğiyle ilgilidir. Söz konusu yöntemde akış problemleri, “mezoskopik” olarak adlandırılan bir ara ölçekte istatistiksel mekanik teknikleri kullanılmak suretiyle, aslında fiziksel olarak bir arada bulunmayan akışkana ait partiküllerin topluluklar halinde hareket ettiği ve bu hayali partikül topluluklarının akış süreci boyunca birbirini takip eden “serbest akış” ve “çarpışma” evrelerinden geçtiği varsayımına göre modellenir. Bu çalışmada Lattice Boltzmann yöntemi kullanılarak bazı temel akış problemlerinin modelleri gerçekleştirilmiş ve bu çalışma kapsamında oluşturulan orijinal kod kullanılarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlardan, Lattice Boltzmann yönteminin düşük Mach sayısı yaklaşımıyla, sıkıştırılmaz akışları yeterli bir hassasiyetle benzeştirdiği görülmüştür. Ek olarak gevşeme parametresinin literatürde de önerilen 0,6 ile 1,9 aralığında olmaması durumunda geçerli sonuçlar elde edilemediği anlaşılmıştır. Ayrıca teorik olarak ikinci dereceden yakınsaklığa sahip Lattice Boltzmann yönteminin çözümlerdeki genel yakınsaklık derecesinin uygulanan sınır koşullarından direkt olarak etkilendiği ve 1 ile 2 arasında değerler verdiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Partikül Mekaniği, İstatistiksel Mekanik, Maxwell-Boltzmann Dağılımı, Oyuk Akışı, Kanal Akışı, Basamak Üzerinden Kanal Akışı.

The Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows and Its Applications

ABSTRACT

A numerical method in Computational Fluid Dynamics (CFD), which is called “Lattice Boltzmann Method (LBM)”, is studied in this paper. The main difference between LBM and conventional CFD methods is how they investigate physical phenomena occurring in a flow problem. In Lattice Boltzmann method, flow problems are simulated in a mid-scale, called “mesoscopic”, by using the statistical mechanic techniques to form fictive particle groups. Then, these particle groups are considered to be moving (free streaming) and colliding (collision) where these consecutive behaviors of particle groups represent the fluid flow. In this study, some benchmark CFD problems are modelled and solved by the utilization of LBM with an in-house code generated for this study. It is observed that the Lattice Boltzmann solvers can simulate incompressible fluid flows accurately by taking the “Low Mach Number Approximation” into consideration. In addition, it is found that no reasonable results are achieved if the relaxation parameter is out of the suggested range, which is in between 0,6 and 1.9. Furthermore, it is shown that the theoretical order of convergence of Lattice Boltzmann Method is directly affected by the applied boundary conditions, resulting in the order of convergence between 1 and 2.

Keywords: Particle Mechanics, Statistical Mechanics, Maxwell-Boltzmann Distribution, Lid-Driven Cavity Flow, Channel Flow, Backward Facing Step Flow.

*İletişim yazarı, e-mail: ozgur.ekici@hacettepe.edu.tr

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Akışkanlar mekaniği problemleri, doğaları gereği çoğunlukla doğrusal değildirler. Bu sebeple böylesine problemlerde analitik çözüm ancak belirli kabuller ve sınır koşulları altında (Örn: Navier-Stokes Denklemlerinin analitik çözümleri: Couette Akışı, Poiseuille Akışı gibi görece basit akışlar için) mümkün olabilmektedir. Analitik yöntemlerin çözüm alanının kısıtlı olması ve deneysel yöntemlerin maliyeti göz önüne alındığında sayısal yöntemlerin kullanılmasına yönelik bir motivasyon ortaya çıkmaktadır. Sayısal yöntemlerin Akışkanlar Mekaniği alanındaki uygulamaları çözümlerin gerçekleştirildiği ölçeklere göre iki ana gruba ayrılabilir: makroskobik yöntemler ve mikroskobik yöntemler.

Makroskobik yöntemde esas olan süreklilik yaklaşımıdır. Süreklilik yaklaşımında enerji, kütle ve momentumun korunumu kanunlarını sonsuz küçüklükte bir kontrol hacmine uygulayarak adi veya kısmi diferansiyel denklemler elde edebilmek ve sonrasında farklı sayısal yöntemler kullanılarak bu denklemleri çözmek mümkündür. Mikroskobik yöntemde ise Moleküler Dinamik (MD) prensipleri uyarınca akışkanı oluşturan her bir partikülün hareketinin izlenmesi esastır. Özellikle küçük ölçeklerde, makro yaklaşıma göre gerçek sonuçlara yaklaşım açısından daha hassas bir yöntem olsa da moleküler dinamik yöntemlerinin veriler için kaynak gereksinimlerinin çok daha fazla olması dolayısıyla standart bir akışkanlar mekaniği problemini MD yöntemleriyle çözebilecek sistemler henüz mevcut değildir.

Moleküler/mikro düzey ile makro düzey arasında geçişin sağlanabilmesi için "İstatistiksel Mekanik" yöntemlerinin kullanılması bu noktada makul bir seçenek oluşturmaktadır. Çünkü makro düzeyde, tekil partiküllerin davranışlarının bir önemi yoktur, önemli olan sonuçta ortaya çıkan etkilerdir. Dolayısıyla her bir partikülün konum ve hızlarının bilinmesine gerek yoktur. Lattice Boltzmann yöntemi, ölçek olarak sözü edilen iki yöntemin arasında kabul edilebilir. Yöntemin temel prensibi, mikro ölçek ile makro ölçek arasında, her bir partikülün davranışını değil bir partiküller topluluğunun davranışını ele almak suretiyle bir bağ oluşturmaktır. Makro ile mikro ölçek arasındaki bu ölçeğe de "Mezo Ölçek (İng. *Meso-scale*)" adı verilmektedir. Bunu sağlayan da "Dağılım Fonksiyonu (İng. *Distribution Function*)"dur. Dağılım fonksiyonu bu partiküller topluluğunun davranışlarını tanımlayan bir fonksiyondur [1-2].

Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği (HAD) konusunda kod verifikasyonu ve validasyonu bakımından referans kabul edilen Oyuuk Akışı (İng. *Cavity Flow*) ve Basamak Üzerinden Kanal Akışı (İng. *Backward Facing Step Flow*) için uluslararası literatürde Navier-Stokes bazlı çalışmaların [3-5] yanı sıra Lattice Boltzmann Yöntemi ile çeşitli tarihlerde gerçekleştirilmiş çalışmalar bulunmaktadır [6-9]. Ancak sözü edilen referans HAD problemlerinin LBM ile çözümüne ilişkin ulusal literatürde yazarların bilgisi dâhilinde bir çalışma olmamakta, yalnızca Navier-Stokes bazlı çözümler olarak ön plana çıkmaktadır [4]. Mevcut çalışma ile hem

konu hakkında ulusal literatüre katkı sağlamak, hem de klasik Navier-Stokes çözümlerine alternatif bir nümerik yöntem olan Lattice Boltzmann yönteminin uygulanmasını çalışma kapsamında oluşturulan orijinal kod kullanılarak test etmek amaçlanmıştır.

2. TEORİK ÖZET (THEORETICAL SUMMARY)

Lattice Boltzmann yönteminde varsayılan partikül topluluklarının hareketlerini tanımlayan dağılım fonksiyonları söz konusudur. Dağılım fonksiyonlarının kökeni ise Maxwell'in gaz mekaniğine dair yaptığı çalışmalara dayanmaktadır.

2.1 Maxwell-Boltzmann Dağılım Fonksiyonu (Maxwell Boltzmann Distribution)

Önceki bölümde de belirtildiği üzere Moleküler Dinamik (MD) yöntemleriyle her bir partikülün izlenmesi suretiyle çözümün elde edilmesi, makro bir sistem için olanak dışıdır. Dolayısıyla ortalama değerler gündeme gelmektedir. Maxwell'in burada ileri sürdüğü tez, her bir partikülün her bir zaman aralığındaki konum ve hızlarının bilinmesinin gerekli olmadığı üzerinedir [10]. Maxwell gaz dinamiğine ilişkin çalışmaları sonucu ideal bir gazın denge halinde özel bir dağılım fonksiyonuna sahip olduğunu ortaya koymuştur. Maxwell dağılım fonksiyonu aslında bir olasılık fonksiyonu olup, parçacık grubunun belirli bir zaman aralığındaki hız dağılımı olasılığını hesaplar. Matematiksel olarak,

$$f(c) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} c^2 e^{-\frac{mc^2}{2kT}} \quad (1)$$

şeklinindedir. Bu fonksiyon bir dağılım olasılık fonksiyonudur ve fiziksel uygulamalarda sıcaklık dağılımı, basınç dağılımı şeklinde uygulama alanları da bulabilmektedir. Böyle bir hız dağılımında tekil bir partikülün anlık spesifik hızını tespit etmek imkansızdır, çünkü partikül hızları geniş bir aralıkta sürekli olarak değişim göstermektedirler. Burada daha anlamlı olacak şey, anlık bir hızdan ziyade belli bir hız aralığındaki parçacıkların tespit edilmesidir. Dolayısıyla eşitlik (1)'de verilen Maxwell dağılım denkleminin belli bir hız aralığında integrasyonu gereklidir. Ludwig Boltzmann daha sonra yaptığı çalışmalarla Maxwell denklemini genelleştirmiş ve ideal gazın denge durumuna ulaşması konusunu açıklamıştır [11]. Maxwell dağılım denkleminin özel bir formu olan Boltzmann dağılım denklemini aşağıda yer almaktadır:

$$f(c) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mc^2}{2kT}} \quad (2)$$

2.2 Boltzmann Taşıma Denklemi (Boltzmann Transport Equation)

Dağılım fonksiyonu, bir önceki bölümde bahsedildiği gibi, akışkan partiküllerinin belirli bir zamanda (t) belirli bir hızla (c) belirli bir yönde hareket edebilme olasılıklarını temsil eder. Yani; $f(r, c, t)$ dağılım fonksiyonu olmak üzere söz konusu fonksiyon bir t zamanında, r ile r+dr konum aralığında c ile c+dc aralığındaki hızlarla bulunma ihtimali olan partiküllerin sayısını ifade etmektedir. Eğer bu partikül sistemine

dışarıdan bir F kuvveti uygulanırsa, birim kütleli gaz molekülünün hızı c 'den $c + Fdt$ 'ye, konumu ise r 'den $r + cdt$ 'ye ulaşacaktır. Eğer gaz molekülleri arasında herhangi bir çarpışma olmazsa, dışarıdan kuvvet uygulanmadan önceki gaz moleküllerinin sayısı ile kuvvet uygulandıktan sonraki gaz molekülleri sayısı eşit olacaktır. Dolayısıyla da matematiksel olarak,

$$f(r + cdt, c + Fdt, t + dt) - f(r, c, t)drdc = 0 \quad (3)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $f(r, c, t)$ kuvvet uygulanmadan önceki partikül sayısını, $f(r + cdt, c + Fdt, t + dt)$ terimi ise kuvvetten sonraki partikül sayısını ifade etmektedir. Denklem bu haline akışın

$$f(r + cdt, c + Fdt, t + dt) - f(r, c, t)drdc = \Omega(f)drdc \quad (4)$$

Bu eşitlik, fiziksel olarak şöyle yorumlanabilir: Dağılım fonksiyonundaki toplam değişim miktarı, moleküllerin çarpışma oranlarına eşittir. Dışarıdan kuvvet etkisinin olmadığı bir sistem için Boltzmann denklemi eşitlik (4) aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \nabla f = \Omega \quad (5)$$

Burada c ve ∇f birer vektördür. Buradaki problem, denklemden de anlaşılacağı üzere Ω 'nın f 'in bir fonksiyonu olması, dolayısıyla eşitlik (5) ile verilen denklemin analitik çözümü mümkün olmayan bir integro-diferansiyel denklem haline gelmesidir [2]. Bu sebeple çarpışma durumunu modellemek için, teorisin geliştirilmeye başlanmasından itibaren, çeşitli matematiksel modeller ortaya konmuştur. Bu modeller fiziksel olarak gerçekleştiği varsayılan çarpışma olayının benzetimi için kullanılırlar. Kullanılan çarpışma modeli, benzetimin (simülasyonun) kararlılığı ve hassasiyetini doğrudan etkilemektedir. Bu bağlamda süreç içerisinde kararlılık ve hassasiyet düzeyi yüksek fakat kompleks modeller geliştirildiği gibi (Ör. Çoklu gevşeme zamanı içeren model – İng. *Multiple Relaxation Time*) görece daha basit fakat daha efektif ve yaygın kullanılan modeller de geliştirilmiştir. Bu çalışma yapılırken tek “Relaxation Time” içeren Bhatnagar-Gross-Krook çarpışma modeli kullanılmıştır.

“Serbest Akış (İng. *Free Streaming*)” evresi adı verilmektedir [12]. Bu evrede partiküller arasında herhangi bir çarpışmanın vuku bulmadığı varsayılmaktadır.

Eğer moleküller arasında çarpışma da gerçekleşirse $drdc$ aralığında partikül sayısı bakımından bir fark oluşacaktır. Dağılım fonksiyonunun başlangıç ve bitiş durumu arasındaki değişim oranına “Çarpışma Operatörü (İng. *Collision Operator*)” adı verilir ve Ω simgesi ile gösterilir. Sonuç olarak partikül sayısının hesaplanmasında kullanılan genel denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir [1-2, 12]:

2.3 Bhatnagar-Gross-Krook Modeli (Bhatnagar Gross Krook Model)

Çıktılarda büyük sapmalara yol açmaksızın çarpışma operatörü (Ω) terimine basit bir modelle yaklaşmanın söz konusu olabileceği düşüncesiyle bir model ilk defa Bhatnagar-Gross ve Krook (BGK) tarafından 1954 yılında ortaya konulmuştur [13]. Bu modele göre çarpışma operatörü Ω

$$\Omega = \omega(f^{eq} - f) = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f) \quad (6)$$

şeklinde tanımlanır. Burada ω çarpışma frekansı veya sıklığı, τ ise gevşeme (İng. *Relaxation*) süresi/faktördür. Yerel denge dağılım fonksiyonu (İng. *Equilibrium distribution function*) f^{eq} olarak gösterilmiştir ve temeli Maxwell-Boltzmann dağılım fonksiyonudur [13]. Ω çarpışma operatörü BGK Modeli ile yeniden ele alınırsa, harici kuvvetlerin olmadığı Boltzmann denklemi (5) aşağıdaki hali alır:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \nabla f = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f) \quad (7)$$

2.4 BGK Lattice Boltzmann Denklemi ve Kafes (Lattice) Yerleşimleri (Lattice Boltzmann Equation with BGK Model and Lattice Arrangements)

Lattice Boltzmann Yöntemi'nde (7) denklemi süreksiz hale getirilip (İng. *Discretization*) belirli bir kafes (İng. *Lattice*) modeli üzerinde tanımlanmış yönlerde geçerli kabul edilirse, aşağıdaki şekilde yazılabilir [6]:

$$f_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(r, t) = \frac{\Delta t}{\tau} [f_i^{eq}(r, t) - f_i(r, t)] \quad (8)$$

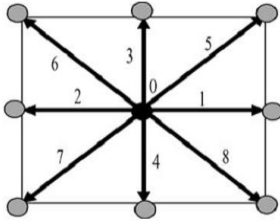
Eşitlik (8) zamana bağlı serbest akış ve çarpışmayı temsil eden terimlerin sayısal olarak açılmasıyla elde edilmiş Lattice-Boltzmann denklemdir, i indisi yönleri temsil etmektedir. Bu temel denklem Lattice-Boltzmann yöntemine dayanan sayısal çözümlerde Navier-Stokes denklemleri yerine kullanılır. Boltzmann denkleminin çoklu ölçek açılımları (İng. *Multi-scale expansion*,

örneğin Chapman-Enskog açılımı) kullanılarak süreklilik yaklaşımını yani Navier-Stokes denklemlerini türetmek de mümkündür [2]. Bu denklemin avantajı, basitliği ve pek çok farklı fiziksel durumda sadece bir denge dağılım fonksiyonu ve kaynak terimi tanımlama yoluyla uygulanabilir olmasıdır. Gerekli durumlarda (8)

denkleminde bir kaynak veya dış kuvvet terimi eklemek oldukça basittir [1-2].

Lattice Boltzmann yönteminde çözüm alanının "Lattice" adı verilen hücresel kafes yapılarına bölünmesi gerekmektedir. Her bir kafes noktasında bir arada oldukları varsayılan hayali parçacık toplulukları, yani dağılım fonksiyonları yerleşik durumdadır. Bu kafes noktalarının sayısı, birbirine bağlanma biçimleri gibi faktörler kafes yerleşimlerine bağlıdır [1-2]. Lattice Boltzmann yönteminde problemin kaç boyutlu olarak ele alındığını ve modeldeki hızların sayısını göstermekte kullanılan terminoloji $D_n Q_m$ şeklindedir. Burada "n" boyut sayısını (1-D, 2-D, 3-D gibi) m ise kullanılan hız modelini ve bağlantı sayısını (3 bağlantı, 5 bağlantı, 9 bağlantı gibi), ortaya koyar. Lattice Boltzmann simülasyonlarında genelde iki boyutlu D2Q5 ve D2Q9 ile üç boyutlu D3Q19 ve D3Q27 gibi modeller kullanılmaktadır. Kullanılan en yaygın modellerden birisi olması ve mevcut çalışma da kullanılması sebebiyle D2Q9 (iki boyutlu, 9 hızlı) modeli kısaca ele alınacaktır.

Merkezinde bir hareketsiz nokta ihtiva eden bu modelde ek olarak 8 hız vektörü bulunmaktadır, modelin şematik gösterimi Şekil 1'de yer almaktadır:



Şekil 1: D2Q9 Modelinin şematik gösterimi (D2Q9 Model - Schematic)

Şekil incelendiğinde, modelin orijin (0,0) noktası olarak 0 numaralı parçacık alınırsa, her bir hız vektörünün x ve y koordinatları aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$c_i(x) = \{0, 1, -1, 1, 0, 1, -1, -1, 1\}$$

$$c_i(y) = \{0, 0, 0, 0, -1, 1, 1, -1, -1\} \quad (9)$$

Yani örneğin 1 numaralı vektör $c_1(1,0)$ şeklinde, 4 numaralı vektör $c_4(0, -1)$ şeklinde hız vektörleri olarak tanımlanmıştır. Bu vektörler ağırlık faktörü (İng. *Weighting Factor*) adı verilen katsayılarla ağırlıklandırılırlar. Dağılım fonksiyonu son tahlilde bir olasılık fonksiyonu olduğundan, bu ağırlık faktörleri aslında belirli çalışmalar sonucunda belirlenmiş ve parçacık gruplarının modeldeki 9 farklı noktaya hareket etme ihtimallerine göre tespit edilmişlerdir. D2Q9 için partikül grubunun ağırlık faktörleri sırasıyla; merkezde kalabilmesi ihtimali için $w_0 = 4/9$, doğu-batı-kuzey ve güney yönler hareketi ihtimalleri için $w_{1-4} = 1/9$, kuzeydoğu-kuzeybatı-güneydoğu-güneybatı yönlerine hareket ihtimaline içinse $w_{5-8} = 1/36$ olarak belirlenmiştir [14].

2.5 Denge Dağılım Denklemi (Equilibrium Distribution Function)

Bir akış problemi için, Lattice-Boltzmann yöntemi kullanılarak difüzyon, adveksiyon, momentum ve enerji denklemleri çözülebilir. Yöntemin farklı problemlere uygulanmasını sağlayan şey, kullanılan f^{eq} denge dağılım fonksiyonlarının farklı olmasıdır.

$$f_i^{eq} = \Phi \omega_i [A + B c_i \cdot u + C (c_i \cdot u)^2 + D u^2] \quad (10)$$

Burada u makroskobik akış hızı vektörü olup, A, B, C, D ise sırasıyla kütle, momentum ve enerjinin korunumu denklemleri uyarınca belirlenmesi gereken sabitlerdir. Φ ise yoğunluk, sıcaklık veya karışım oranları gibi sayısal büyüklükleri temsil eder ve tüm dağılım fonksiyonlarının toplamına eşittir. Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse:

$$\Phi = \sum_{i=0}^n f_i^{eq} \quad (11)$$

Burada ise n kullanılan modeldeki kafes bağlantılarının sayısını gösterir [1-2]. D2Q9 modeli için denge dağılım fonksiyonu aşağıda verilmiştir [7]:

$$f_k^{eq} = w_k \rho(x, t) \left[1 + \frac{c_k \cdot u}{c_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(c_k \cdot u)^2}{c_s^4} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c_s^2} \right] \quad (12)$$

Burada $\rho(x, t)$ kütle korunumu prensibi uyarınca elde edilmiş yoğunluk fonksiyonunu, c_k hız vektörünü, c_s mezo ölçekteki kafes ses hızı'nı, u ise makroskobik hız vektörünü temsil etmektedir. Eşitlik (12) ile verilen denge dağılım fonksiyonunun ancak Mach sayısı düşük tutulduğunda geçerli olduğunu belirtmek gerekir. Lattice Boltzmann yöntemine ilişkin literatürde buna düşük Mach sayısı yaklaşımı (İng. *Low Mach Number Approximation*) adı verilmektedir. Bu durum yöntemin hata miktarının mezo ölçek için tanımlanan Mach sayısının karesiyle orantılı olmasından kaynaklanmaktadır. Bu konuda ayrıntılı bilgi için Lattice Boltzmann yönteminin çok boyutlu bir hata analizi olan ve aynı zamanda LBM'den Navier-Stokes denklemlerinin türetilmesi için kullanılan Chapman-Enskog analizi incelenebilir [15].

2.6 Lattice Boltzmann Yönteminde Mach ve Reynolds Sayıları (Mach and Reynolds Numbers in Lattice Boltzmann Method)

Lattice Boltzmann Yönteminin kararlılığı ve elde edilecek sonuçların hassasiyetini kontrol edebilmek için çeşitli akış parametreleri arasında makro ölçek ve kafes düzeyindeki ilişkiyi kurmak gerekmektedir. Lattice Boltzmann Yöntemi'nde makroskobik akışkan viskozitesi, gevşeme sıklığı (İng. *Relaxation Frequency*) parametresine bağlı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır [1-2]:

$$\nu = \frac{\Delta x^2}{3\Delta t} (\omega - 0.5) \quad (13)$$

Burada Δx hücreler veya kafes noktaları arası uzaklık, Δt ise iki zaman adımı arasında geçen süredir. Pratikteki uygulamalarda Δx ve Δt birim büyüklük kabul edilmektedir. Bu çalışma kapsamında da Δx ve Δt değerleri birim büyüklük olarak ele alınacaktır.

Reynolds sayısı,

$$Re = UL/\nu \quad (14)$$

olarak hesaplanırken, U ve L 'nin makro ölçekte sırasıyla karakteristik hız ve karakteristik uzunluk olduğu bilinmektedir. Eşitlik (13)'de her iki taraf da " UL " ile bölünerek matematiksel bir manipülasyon yapılırsa Mach sayısı veya "Lattice Mach sayısı":

$$Ma = \frac{\Delta x}{L\sqrt{3}}(\omega - 0.5) Re \quad (15)$$

şeklinde elde edilir [1-2].

$L/\Delta x$ değeri, karakteristik uzunluk yönündeki " N " adet kafes noktası sayısını ortaya koyar. Δx birim uzunluk olduğu için LBM uygulamalarında genellikle $L=N$ alınarak işlem yapılır, bu durumda "Lattice Reynolds Sayısı", makro Re sayısı ile aynı değere sahip olacaktır.

Yeterli hassasiyette bir çözüm için Mach sayısının düşük tutulması gerektiğinden eşitlik (15) içinde görülen ω veya L değerleri düşük bir Mach sayısını temin edecek şekilde seçilmelidir. Genel olarak U 'nun, LBM konusunda yapılan kararlılık çalışmalarına dayalı olarak 0.2 birimi aşmayacak şekilde seçilmesi istenmektedir [1-2]. Hassasiyet için düşük Mach sayısını veren parametrelerin seçiminin ardından U ve ν değerleri çözümün kararlılığını sağlayacak bir aralıkta olmak kaydıyla rahatlıkla seçilebilir. Lattice Boltzmann Yöntemi kullanılarak elde edilen sayısal çözümlerin hassasiyeti ve doğrulaması "sayısal sonuçlar" bölümünde irdelenecektir.

2.7 Lattice Boltzmann Yönteminde Kütle ve Momentum'un Korunumu (Conservation of the Mass and Momentum in Lattice Boltzmann Method)

Makroskobik akışkan yoğunluğu, her bir kafes noktasındaki dağılım fonksiyonlarının toplamına eşittir. D2Q9 modeli için makroskobik yoğunluk [1-2, 12]:

$$\rho = \sum_{k=0}^8 f_k \quad (16)$$

olacaktır. Makroskobik momentum ise c_k kafes hızlarının dağılım fonksiyonlarıyla ağırlıklandırılmış ortalamaları olarak düşünülebilir [1-2, 12]:

$$\rho u = \sum_{k=0}^8 f_k c_k \quad (17)$$

Buradan makroskobik hız:

$$u = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^8 f_k c_k \quad (18)$$

şeklinde elde edilir.

2.8 Lattice Boltzmann Yöntemiyle Sıkıştırılmaz Akışın Modellenmesi (Incompressible Fluid Flow Modelling by Lattice Boltzmann Method)

Lattice Boltzmann yönteminde hangi model kullanılırsa kullanılsın, akışın iki temel evreden geçerek devam ettiği varsayılır. Bu evreler birbirini izleyen serbest akış (İng. Free Streaming) ve çarpışma (İng. collision) evreleridir. Merkezde bulunduğu kabul edilen parçacık topluluğunun çevre düğüm noktalarına hareketleri bu eksenle ele alınır.

Serbest akış evresinde hayali olarak tek bir parçacık gibi kabul edilen partikül topluluğunun denge halinde bulunduğu varsayılan merkez noktadan dağılım vektörlerinin yönleri doğrultusunda herhangi bir engelle karşılaşmaksızın yayılmaya başladıkları kabul edilir. Şekilde D2Q9 modeli için serbest akış evresi şematik olarak gösterilmiştir.

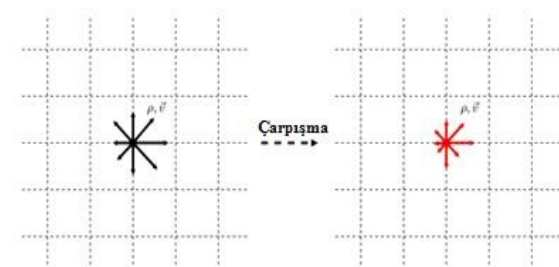


Şekil 2: D2Q9 Modelinde serbest akış evresi (Free Streaming in D2Q9 Model)

Parçacıklar herhangi bir çarpışma yaşamadıkları için bir önceki kafes noktasındaki dağılım fonksiyonu ile bir sonraki kafes noktasındaki dağılım fonksiyonunun büyüklüğü arasında bir fark olmayacaktır. Matematiksel olarak göstermek gerekirse:

$$f_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(r, t) = 0 \quad (19)$$

Çarpışma evresi ise aynı noktaya hareketlenmiş iki parçacık topluluğunun yani bir diğer deyişle onları temsil eden iki dağılım fonksiyonunun o noktada buluşması olarak kabul edilir. Çarpışmanın gerçekleştiği noktada bir yerel denge dağılım fonksiyonu (İng. *Local Equilibrium Distribution Function*) tanımlanır ve bir araya gelip yeni bir hayali parçacık oluşturmuş iki parçacık topluluğunun bu denge noktasından başlayarak dağılım vektörlerinin yönlerinde yeniden serbest akışa geçmesiyle sona erer.



Şekil 3: D2Q9 Modelinde çarpışma evresi (Collision in D2Q9 Model)

Çarpışmanın matematiksel ifadesi:

$$f_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(r, t) = 0 \quad (20)$$

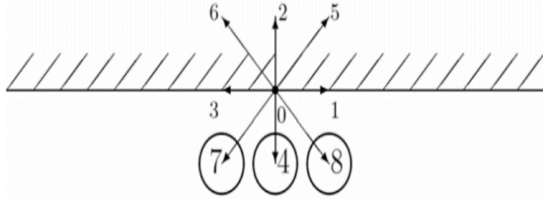
olacaktır. BGK ile modellenmiş çarpışma operatörü ve dolayısıyla çarpışma evresi de eklendiğinde serbest akış-çarpışma evrelerini takip ederek gelişen akışın genel denklemi eşitlik (8)'de verilenin bir başka gösterimiyle aşağıdaki gibi verilebilir:

$$f_i(r + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(r, t) = \frac{1}{\tau} (f_i^{eq}(r, t) - f_i(r, t)) \quad (21)$$

2.9 Sınır Koşulları (Boundary Conditions)

Lattice Boltzmann yönteminin Navier-Stokes tabanlı çözümlere göre dezavantajlarından birisi, sınır koşullarının Navier-Stokes çözümlerindeki gibi kolayca uygulanamamasıdır. Lattice Boltzmann yönteminde sınır noktalarındaki dâhili dağılım fonksiyonlarının doğru bir biçimde belirlenmesi gerekmektedir. Bir diğer deyişle Lattice-Boltzmann yöntemiyle çözüm yaparken, örneğin her bir “serbest akış” evresinden sonra sınır bölgelerinin hemen yanındaki noktalar için dâhili yoğunluk dağılımları bilinmemektedir. Dolayısıyla verilen makroskobik sınır koşullarının bu dağılım fonksiyonlarına uyarlanması gerekmektedir

Kaymazlık koşulu, en basit sınır koşullarından biri olup, duvar yüzeyi üzerinde akışkan hızının sıfır olduğunu belirtir. LBM’de dilimizde “yansıma” olarak ifade edilebilecek olan “Bounce-Back” prensibi, kaymazlık koşulunun geçerli olduğu yüzeylerde akışı modellemek için rahatlıkla uygulanabilir. Yansıma prensibini başarılı bir biçimde uygulamanın en basit yolu söz konusu geometrinin fiziksel sınırları ile kafes yapısının sınırlarını örtüştürmekten geçer [1-2]. Örneğin Şekil 4 incelenebilir, sınır koşulları olmadığına akışkan partikülünün duvara çarptıktan sonra f_8, f_4 ve f_7 dağılım fonksiyonlarının ne olacağı bilinmemektedir.



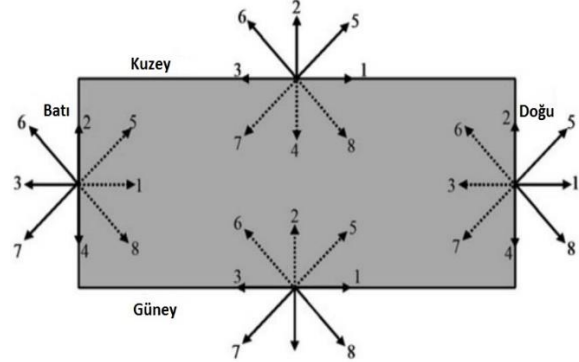
Şekil 4: Yansıma sınır koşulu (alıntıdır [16]) (Bounce Back Boundary Condition, adapted from [16])

Burada yansıma prensibi uygulanırsa, bu dağılım fonksiyonları $f_6 = f_8, f_4 = f_2, f_7 = f_5$ olarak tespit edilecektir. Yapılan çalışmalarda yansıma sınır koşulunun birinci dereceden yakınsaklığa sahip olduğu tespit edilmiştir [1-2, 16]. Sınırlardaki bu durum teorik olarak ikinci dereceden yakınsaklığa sahip olduğu bilinen [1-2] Lattice Boltzmann yönteminin toplam yakınsaklık derecesini, yansıma uygulandığında 2'nin altına düşürmektedir.

Sayısal uygulamalarda bazen bir alanın sınırları belirli bir hızla hareket halinde olabilir. Sınırların bu hareketli hali akışkana da belirli bir momentum kazandıracaktır ki bu durumu yansımanın durağan yapısıyla açıklamak mümkün değildir. Dolayısıyla yansıma denilen sınır koşulunda bu momentum etkisini de içerecek şekilde bazı değişiklikler yapılması gerekmiştir. Zou ve He 1997 yılında yansıma koşulunu sınırların normal yönünde genişletecek bir öneride bulunmuşlardır [17].

Bu çalışmada Zou ve He, sırasıyla makroskobik yoğunluk ve momentumu temsil eden (16) ve (17) denklemlerini dört bilinmeyen ve dört denklem elde etmek amacıyla sınıra normal denge koşullarıyla birlikte uygulamışlardır. Burada, Şekil 5'te gösterildiği üzere her

bir serbest akış evresinden sonraki iç dağılım fonksiyonları bilinmeyen durumda olacaktır.



Şekil 5: Serbest akış evresinden sonra sınırlardaki bilinmeyen dağılım fonksiyonları (kesikli çizgiler) (alıntıdır [2]) (Unknown Distribution Functions at Boundaries After the Free Streaming Phase, adapted from [2])

Örneğin kuzey sınırı $U = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$ şeklinde hareketli olarak tanımlanırsa, yukarıda sözü edilen dörtlü denklem sistemi aşağıdaki şekilde yazılarak bilinmeyen dağılım fonksiyonları elde edilebilir:

$$\rho_n = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \quad (22)$$

$$\rho_n u_n = f_1 + f_5 + f_8 - f_6 - f_3 - f_7 \quad (23)$$

$$\rho_n v_n = f_2 + f_5 + f_6 - f_7 - f_4 - f_8 \quad (24)$$

$$f_4 - f_4^{eq} = f_2 - f_2^{eq} \quad (25)$$

Burada denge dağılım denklemleri yerine Maxwell-Boltzmann genel dağılım denklemi yazılıp gerekli cebirsel manipülasyonlar yapıldığında, kuzeydeki hareketli sınırın bilinmeyenleri aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır [17]:

Kuzey sınırı için:

$$\rho_n = \frac{1}{1+v_n} [f_0 + f_1 + f_3 + 2(f_2 + f_6 + f_5)] \quad (26)$$

$$f_4 = f_2 - \frac{2}{3} \rho_n v_n \quad (27)$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2} (f_1 - f_3) - \frac{1}{6} \rho_n v_n - \frac{1}{2} \rho_n u_n \quad (28)$$

$$f_8 = f_6 - \frac{1}{2} (f_1 - f_3) - \frac{1}{6} \rho_n v_n + \frac{1}{2} \rho_n u_n \quad (29)$$

Diğer yönlerdeki sınırlar için de aynı yöntem kullanılabilir.

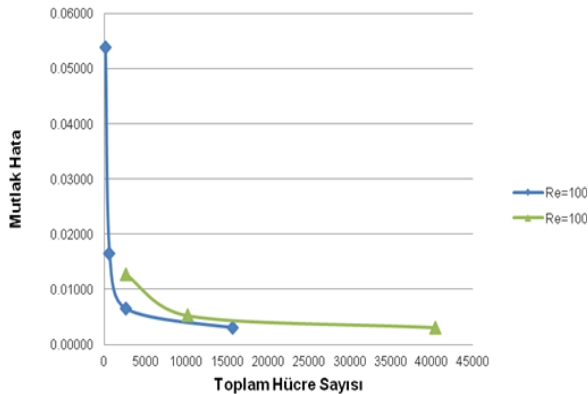
3. SAYISAL SONUÇLAR (NUMERICAL RESULTS)

Bu bölümde Lattice Boltzmann yöntemi kullanılarak elde edilen çözümlerden alınan sonuçlar sunulmaktadır. Yapılan çalışmada Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği'nin iki boyutlu iki temel problemi üzerinde durulmuştur. İlk olarak kapak tarafından hareketlendirilen oyuk akışı (İng. *Lid Driven Cavity Flow*), ikinci olarak da Basamak Üzerinden Kanal Akışı (İng. *Backward Facing Step Flow*).

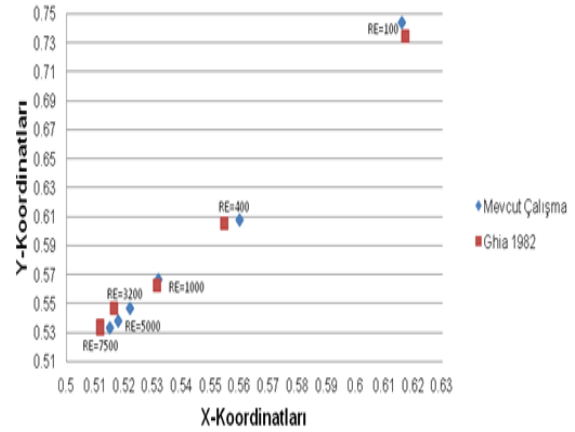
3.1 Kapak Tarafından Hareketlendirilen Oyuk Akışı (Lid-Driven Cavity Flow)

Oyuk akışı problemi aslen iki boyutlu kare bir oyuk içerisinde gerçekleşen viskoz bir akıştır. Söz konusu kare oyuk içerisinde yer alan sıkıştırılmaz akışkan karenin üst kenarı konumunda olan ve sabit bir hızla bir yöne hareket eden kapak vasıtasıyla hareketlendirilmektedir. Bu problem özelinde farklı Reynolds sayılarında ($Re=100, 400, 1000, 3200, 5000$ ve 7500) çözümler gerçekleştirilmiştir. İlk olarak çözümlerde elde edilen sonuçların kullanılan kafes sayısından bağımsız olup olmadığını görebilmek için çeşitli Reynolds sayıları için kullanılan ağ nokta sayısı artırılarak sonuçların değişimi incelenmiş, belirli bir kafes sayısından sonra sonuçların ihmal edilecek düzeyde değiştiği anlaşılmıştır. Referans parametre olarak oyuğun merkezinde oluşan birincil (ana) vorteksin koordinatları incelenmiştir. $Re=100$ ve 1000 için alınan sonuçlar aşağıdaki Şekil 6'da yer almaktadır.

Ağ sayısının çözüme etkisi incelendikten sonra, oyuk akışı problemi için Lattice Boltzmann yöntemiyle elde edilen farklı sonuç çıktıları literatür sonuçlarıyla kıyaslanmıştır. Probleme ilişkin literatürde Ghia ve arkadaşlarının 1982 [3] tarihli makalesi önemli bir yer teşkil etmekte olduğundan elde edilen sonuçlar bu kaynak sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Literatürde oyuk akışı problemiyle ilgili referans parametrelerden ilki kapağın hareketiyle kare şeklindeki boşluk içerisinde oluşan girdaplardan (İng. *Vortex*) boşluğun içerisinde yer alan birincil (ana) girdap (İng. *Primary Vortex*)'ın merkez koordinatlarıdır. Çözümün gerçekleştirildiği aralıktaki Ghia ve LBM sonuçları aşağıdaki Şekil 7'de yer almaktadır. LBM ile elde edilen sonuçlar referans sonuçlardan maksimum %1 civarında sapmalarla örtüşmektedir.



Şekil 6: $Re=100$ ve 1000 için artan kafes/hücre sayısına karşı mutlak hatanın değişimi (Change in Absolute Error at $Re=100$ and 1000 versus Increasing Cell Number)

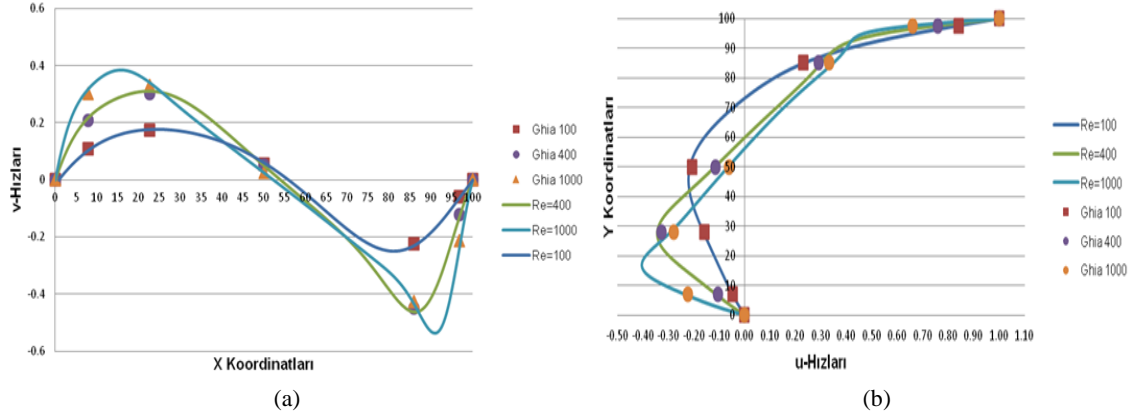


Şekil 7: $Re=100,400,1000,3200,5000$ ve 7500 için Ana Vorteks'in Koordinatları (Coordinates of Primary Vortex for $Re=100,400,1000,3200,5000$ and 7500)

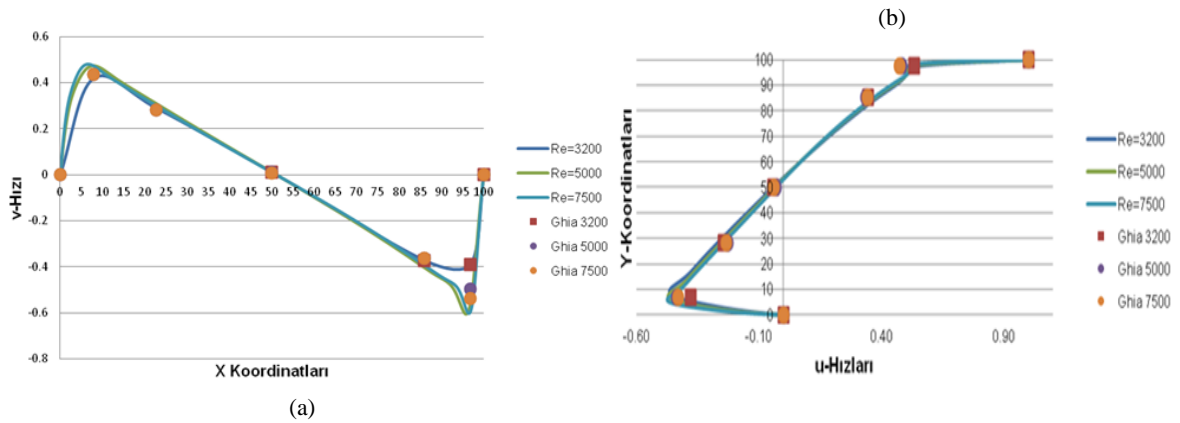
Oyuk akışı problemi için literatürde yer alan bir diğer karakteristik sonuç çıktısı ise, boşluğun geometrik merkez noktasında farklı Reynolds sayıları için hız bileşenlerinin (u ve v hızları) sırasıyla dikey ve yatay yönlerdeki profilleridir. Çalışmanın yapıldığı $Re=100, 400, 1000, 3200, 5000$ ve 7500 sayıları için boşluğun geometrik merkezinde dikey ve yatay yönlerdeki normalize edilmiş hız profilleri (v/u_0 vs x ve u/u_0 vs y) çıkarılmış ve Ghia ve diğerlerinin 1982 tarihli sonuçlarıyla [3] karşılaştırılmıştır.

Şekil 8'deki iki grafikten de görüldüğü üzere nispeten düşük Reynolds sayıları olarak nitelendirebileceğimiz $Re=100, 400$ ve 1000 için geometrik merkezdeki u ve v hız profilleri, Ghia ve diğerlerinin 1982 tarihli çalışmasındaki hız profilleriyle yakın bir uyum göstermektedir. Bu, LBM'nin düşük Reynolds sayılarında Navier-Stokes denklemlerini iyi temsil ettiği tezini destekleyen bir bulgudur.

Şekil 9'da $Re=3200, 5000$ ve 7500 için sonuçların birbirine yakın olması ve grafiklerin nispeten üst üste binmesi dolayısıyla net olarak anlaşılmasa da veriler incelendiğinde Ghia 1982 [3] tarihli sonuçlarla aradaki farkın düşük Reynolds sayılarına kıyasla biraz daha fazla olduğu anlaşılmaktadır. Ancak hata miktarları yüksek Reynolds sayıları için de kabul edilebilir düzeydedir.



Şekil 8 (a), (b): Re=100,400 ve 1000 için geometrik merkezde v ve u hız profilleri (v and u velocity profiles at the geometrical center of cavity for Re=100,400 and 1000)



Şekil 9 (a), (b): Re=3200, 5000 ve 7500 için geometrik merkezde v ve u hız profilleri (v and u velocity profiles at the geometrical center of cavity for Re=3200,5000 and 7500)

Lattice Boltzmann yönteminde çözümün yakınsaklık derecesini (İng. *Order of Convergence*) belirlemek için literatürde önerilmiş bir formülasyon kullanılmıştır [6]. İlgili formülasyon aşağıda yer almaktadır:

$$n \sim \frac{\log[(\sum|\Phi_{4h}-\Phi_{2h}|/N)/(\sum|\Phi_{2h}-\Phi_h|/N)]}{\log(2)} \quad (30)$$

Bu denklemde Φ hesaplamada kullanılan değişkeni, N ise hesaplama yapılan nokta sayısını ifade etmektedir. Bu

$$n \sim \frac{\log[(\sum|\Phi_{4h}-\Phi_{2h}|/N)/(\sum|\Phi_{2h}-\Phi_h|/N)]}{\log(2)} = \frac{\log|-0,06390+0,06605|/|-0,06605+0,07351|}{\log(2)} = 1.79$$

Lattice Boltzmann yöntemi, teorik bölümde de anlatıldığı üzere ikinci dereceden yakınsaklığa sahiptir. Konuya ilişkin detaylı bilgi için literatürde yer alan Chapman-Enskog analizi incelenebilir [15]. Bunun yanı sıra uygulanan sınır koşullarının da toplam yakınsaklık derecesini etkilediği bilinmektedir ve literatürde yer alan

formülasyonun kullanılabilmesi için her bir çözümde hücre sayılarının 2 kat artırılmış olması gerekmektedir. Dolayısıyla h , $2h$ ve $4h$ indisi sırasıyla en kabadan en inceye hücresel ağ yapılarını temsil etmektedir. Oyuğun akışı için yakınsaklık derecesi hesaplanırken oyuğun geometrik merkez noktasındaki u hızı kullanılır ve buna göre Re=1000 için farklı ağ yapılarından elde edilen yakınsaklık derecesi hesaplanırsa:

çalışmalarda [2, 18-19] uygulanan yansımaya sınır koşulunun birinci dereceden yakınsaklığa sahip olduğundan söz edilmektedir. Lattice Boltzmann yönteminin yakınsaklık derecesini ve etkinliğini analiz eden kapsamlı bir makalede [6] yansımaya sınır koşulunun kullanıldığı çözümlerde yakınsaklık derecesinin 1 ile 2

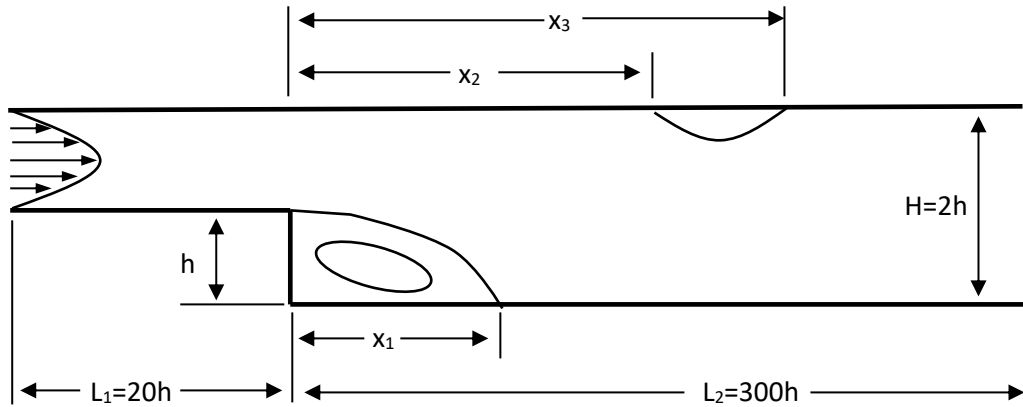
arasında olduğu söylenmektedir. Mevcut çalışma kapsamında elde edilen sonuçlar da (1.79) bu savı doğrular niteliktedir.

3.2 Basamak Üzerinden Kanal Akışı (Flow Over Backward Facing Step)

Akışkanlar mekanikinde pek çok akışta ayrılma (İng. *separation*) ve yeniden sınır tabaka oluşumu gibi olaylarla karşılaşılır. Bu tip akışlara tipik örnekler olarak ısı eşanjörlerinde ve kanallarda gerçekleşen akışlar verilebilir. Bu tür problemler arasında basamak üzerinden kanal akışı problemi (İng. *Backward Facing Step Flow*) geometrisinin basitliğine rağmen Reynolds sayısı, kanal yüksekliği ve basamak yüksekliği gibi parametrelere bağlı olarak içerisinde akış ayrılması, yeniden sınır tabaka oluşumu ve birden çok re-

sirkülasyon bölgesinin oluşumu gibi zengin bir akış fiziği ortamı barındırmasıyla literatürde pek çok çalışmaya konu olmuştur [4-5].

Basamak üzerinden kanal akışı problemi için Lattice Boltzmann yöntemi ile Reynolds 200 ve 600 için iki çözüm gerçekleştirilmiş ve elde edilen sonuçlar Armaly ve diğerlerinin 1983 tarihli deneysel çalışması [5] ve Ercan Ertürk tarafından yapılan 2007 tarihli 2 boyutlu sonlu farklar Navier-Stokes çözümünü içeren çalışmadaki [4] sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Basamak üzerinden kanal akışı probleminde kanala giren akışkanın hız profili paraboliktir ve problem fiziğine ilişkin önemle parametreler Şekil 10'da verilmiştir.



Şekil 10: Basamak üzerinden kanal akışının şematik gösterimi (ölçeklendirilmemiştir) (Schematic View of Backward Facing Step Flow – not scaled)

Sonuçları sunmadan belirtilmesi gereken bir nokta; Armaly ve diğerlerinin yaptığı çalışmada deneysel düzenek kurulurken kanal giriş çapı 5.2 birim, toplam kanal çapı ise 10.1 birim olarak seçildiğinden genişlik oranı (H/h) yaklaşık 1.942 olmaktadır. Lattice Boltzmann çözümünde hücresel ağ yapısı kurulurken tamsayılar dışında hücre sayısı kullanmak mümkün olmadığından, 1.942 genişlik oranını sağlamak mümkün olamamıştır. Dolayısıyla Armaly'den alınan sonuçlar referans olarak kullanılırken bu durum * simgesiyle vurgulanmıştır.

Çözümün gerçekleştirildiği Reynolds sayılarından $Re=200$ için yalnızca basamağın yanındaki genişliği (x_1) olan re-sirkülasyon bölgesi görülmekte, $Re=600$ için ise genişliği (x_3-x_2) şeklinde hesaplanan ikinci bir re-sirkülasyon bölgesi daha ortaya çıkmaktadır. Bu re-sirkülasyon bölgelerinin genişliği problemin fiziğinde genişleme oranı (İng. *Expansion Ratio*) denilen ve toplam kanal yüksekliğinin (H) basamak yüksekliğine (h) oranı şeklinde tanımlanan parametreye göre değişiklik arz etmektedir.

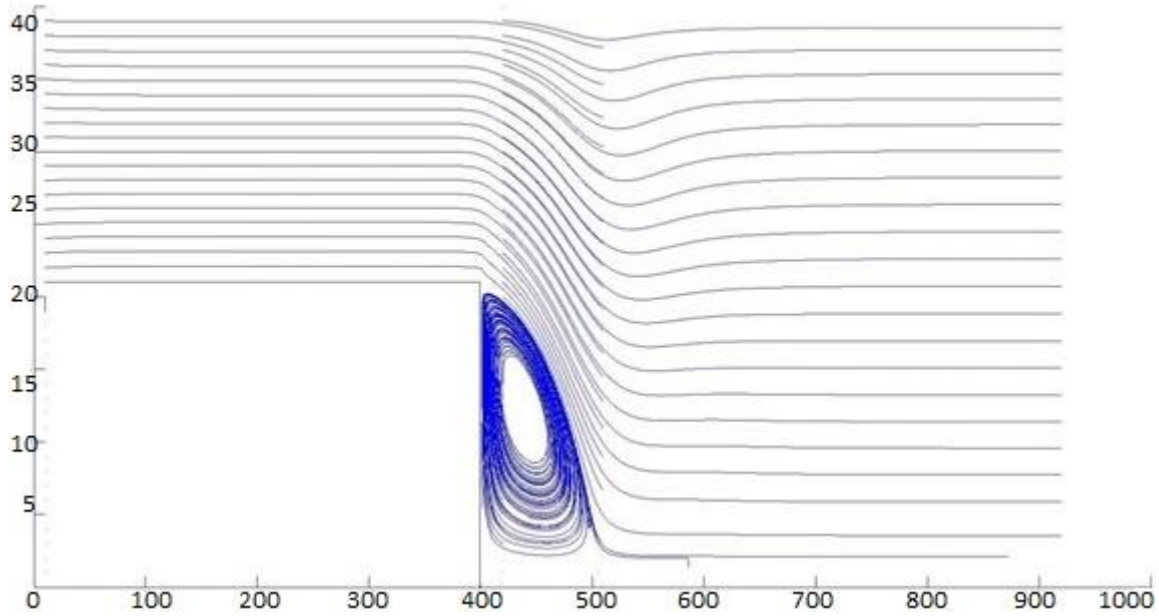
Ertürk 2007 tarihli Navier-Stokes sonlu farklar çözümünde [4] 2.0 genişleme oranı için Reynolds sayısı 200 iken ana sirkülasyon bölgesi olarak da tanımlanan

basamağın hemen yanındaki sirkülasyon bölgesinin genişliğini tayin eden $X1$ değerini basamak yüksekliğiyle normalize ederek sunmuştur. Ana sirkülasyon bölgesi için LBM ve Ertürk'ün sonuçları karşılaştırmalı olarak çizelge 1'de yer almaktadır:

Çizelge 1: $Re=200$ ana sirkülasyon bölgesinin genişliği (Width of Main Re-circulation Region at $Re=200$)

Reynolds Sayısı	LBM x_1 (x_1/h)	Ertürk x_1 (x_1/h)	Yüzde Hata
200	5.1	4.982	% 2.37

Reynolds sayısı 200 iken kanal içerisinde akış çizgileri (İng. *Streamlines*) Şekil 11'deki gibi oluşmaktadır. Şekilden de anlaşılacağı üzere $Re=200$ için yalnızca x_1 genişliği 5.1 olarak verilen ana sirkülasyon bölgesinden söz edilebilmektedir. Bu durum da Armaly ve Ertürk tarafından verilen sonuçlarla paralellik arz etmektedir. Reynolds 600 için ana sirkülasyon bölgesinden başka bir sirkülasyon bölgesi daha mevcuttur.



Şekil 11: Re=200 için kanal içerisindeki akış çizgileri (Streamlines in Channel for Re=200)

Ana sirkülasyon bölgesinin genişliği veya bir diğer deyişle ilk sınır tabaka oluşum noktası için karşılaştırmalı sonuçlar Çizelge 2’de yer almaktadır:

Çizelge 2: Re=600 için ana sirkülasyon bölgesinin genişliği (Width of Main Re-Circulation Region at Re=600)

Çalışmalar	Genişlik oranı (H/h)	x_1/h
Mevcut Çalışma	2.0	10.07
Ertürk	2.0	10.349
Armaly	1.942*	11.4

Çizelge 2 incelendiğinde deneysel ve farklı genişlik oranına sahip bir çalışma olan Armaly [5] ayrı tutulduğunda Ertürk’ün Navier-Stokes sonlu farklar çözümü ile mevcut LBM çalışması arasında yalnızca %2,7 civarında bir sapma olduğu görülmektedir. İkinci

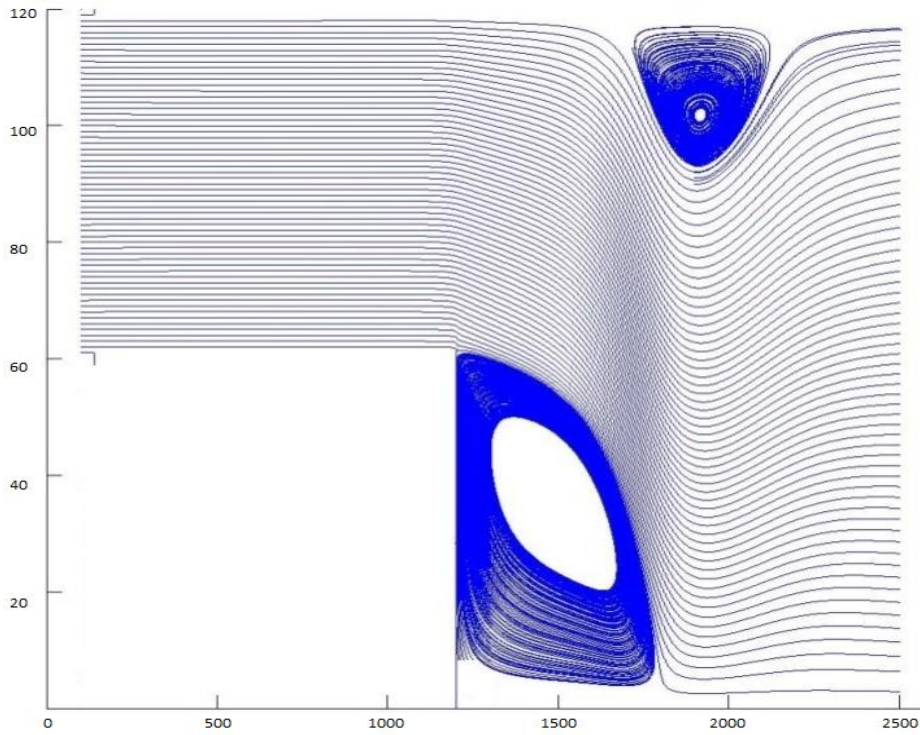
ve üçüncü sınır tabaka oluşum noktaları yani x_2 ve x_3 için karşılaştırmalı sonuçlar ise Çizelge 3’te yer almaktadır:

Çizelge 3: Re=600 için x_2 ve x_3 sınır tabaka oluşum noktaları (Re-attachment Points for Re=600)

Çalışmalar	x_2/h	x_3/h	Yüzde Hata	Yüzde Hata
Mevcut Çalışma	7.95	16.28	%6.32	%2.74
Ertürk	8.486	15.833		

Navier-Stokes sonlu farklar modeline göre çözüm yapan Ertürk’ün sonuçları ile LBM içeren mevcut çalışmanın sonuçları arasında genel olarak %2 ile %6 arasında değişen sapmalar görülmektedir.

Şekil 12’te, Reynolds sayısı 600 iken kanal içerisindeki akış çizgileri verilmiştir. Üst duvar sınırına yakın akış çizgileri incelendiğinde, Re=600 için ana sirkülasyon bölgesine ek olarak oluşan ikinci sirkülasyon bölgesi de belirgin bir biçimde gözükmemektedir.



Şekil 12: $Re=600$ için kanal içerisindeki akış çizgileri (Streamlines in Channel for $Re=600$)

4. SONUÇ (CONCLUSION)

Bu çalışma kapsamında Lattice Boltzmann yönteminin Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği'ndeki konumu ele alınmış, teorik altyapısı irdelenmiş ve iki temel problem özelinde (Oyuk Akışı ve Basamak Üzerinden Kanal Akışı) sayısal uygulamaları gerçekleştirilmiştir. Çözümlerde Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) modeli adı verilen çarpışma operatörü kullanılmıştır. Kodlamalar ve simülasyonlar, yöntemle ilişkin literatürde çeşitli programlama dillerinde yer alan jenerik kodlar veya kod parçalarını probleme göre modifiye edilmesi sonrasında MATLAB programında gerçekleştirilmiştir.

Sonuç olarak görece düşük Reynolds sayıları için sıkıştırılmaz akışlarda Lattice Boltzmann yönteminin Navier-Stokes denklemlerini yeterli hassasiyette temsil ettiği görülmüştür. Ayrıca sayısal yöntemlerin genel bir doğrusu olarak optimum hücre/kafes noktası sayısı ve zaman adımı sayısına kadar daha fazla kafes noktası ve zaman adımıyla sonuçların iyileşmeye devam ettiği gözlemlenmiştir. ω gevşeme parametresi için literatürde önerilen $0.6 < \omega < 1.9$ aralığı dışında geçerli sonuçlar elde edilememiştir.

Lattice Boltzmann yöntemi teorik olarak ikinci dereceden yakınsaklığa sahip olsa da kullanılan sınır koşullarının çözümün toplam yakınsaklık derecesini etkilediği görülmüştür. Örneğin yansıma gibi birinci dereceden yakınsaklığa sahip bir sınır koşuluyla çözümün toplam yakınsaklık derecesi düşmekte ve 1 ile 2 aralığında bir değer elde edilmektedir.

Sayısal çözümlerin gerçekleştirildiği bilgisayarda olduğu gibi tek nokta sistemiyle çalışan işlemciler için hücre sayıları arttığında çözüm süreleri önemli ölçüde uzamaktadır. Lattice Boltzmann yönteminin esasen işlemci paralelizasyonuna uygun olduğu düşünülürse, bu sonuç makul karşılanabilir. Yöntemin getirdiği belirli kısıtlamalar söz konusudur. Örneğin düşük Mach sayısı yaklaşımı dolayısıyla hangi akış problemi olursa olsun belirli bir kafes (lattice) giriş hızı değerinin üzerine çıkılmamaktadır. Bunun yanı sıra kararsızlıkla ilgili kısıtlama dolayısıyla da kinematik viskozite değeri için bir alt sınır mevcuttur. Bu durum artan kafes noktası sayısına bağlı olarak görece yüksek Reynolds sayılarının simülasyon süreleri uzamaktadır.

KAYNAKÇA (REFERENCES)

- [1] Succi, S., **The Lattice Boltzmann Equation: For Fluid Dynamics and Beyond**, Oxford University Press, 2001.
- [2] Mohamad, A., **Lattice Boltzmann Method Fundamentals and Engineering Applications With Computer Codes**, Springer Verlag-London, 2011.
- [3] Ghia, U., Ghia, K.N., Shin, C.T. "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", **Journal of Computational Physics** 48, 387-411, 1982.
- [4] Ertürk, E., "Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Flow Over a Backward-Facing

- Step, Part I: High Reynolds Number Solutions”, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, vol. 37, 633 - 655, 2008.
- [5] Armaly, B.F., Durst, F., Pereira, J.C.F., Schönung, B. “Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow”, **Journal of Fluid Mechanics** 127, 473–96, 1983.
- [6] Yong, G. L., Ching-Long, L., Jianchun, H., “Accuracy and Efficiency Study of Lattice Boltzmann Method for Steady State Flow Simulations”, **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology**, 39:1, 21-43, 2001.
- [7] Hou, S., Zou, Q, Chen, S., Doolen, G., Cogley, A.C., “Simulation of Cavity Flow by the Lattice Boltzmann Method”, **Journal of Computational Physics**, vol. 118, 329-347, 1995.
- [8] Guo, Z., Shi, B., Wang, N., “Lattice BGK Model for Incompressible Navier-Stokes Equation”, **Journal of Computational Physics**, vol. 165, 288-306, 2000.
- [9] Zarghami A., Ahmadi N., “A Stable Lattice Boltzmann Method for Steady Backward-Facing Step Flow”, **Arabian Journal for Science and Engineering**, August 2014, Volume 39, Issue 8, pp 6375-6384.
- [10] Maxwell, J.C., “Illustrations of the Dynamical Theory of Gases”, **Philosophical Magazine** 19, 19-32, **Philosophical Magazine** 20, 21-37, 1890.
- [11] Boltzmann, L., “Über die Mechanische Bedeutung des Zweiten Hauptsatzes der Warmetheorie”, **Wiener Berichte**, 53, 195-220, Vol 1., 1866.
- [12] Chen, S., Doolen G.D., “Lattice Boltzmann method for fluid flows”, **Annual Review of Fluid Mechanics**, Vol. 30: 329-364, 1998.
- [13] Bhatnagar, P.L., Gross, E.P., Krook, M., “A Model for Collision Processes in Gases. I., Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems”, **Physical Review** 94, 511–525, 1954.
- [14] He, X. ve Luo, L.S., “Theory of the lattice Boltzmann method : From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation”, **Phys. Rev. E**, 56, 6811-6818, 1997.
- [15] Chapman S., Cowling T.G., **The mathematical theory of non-uniform gases: An account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction, and diffusion in gases**, Cambridge University Press, 1990.
- [16] Sukop, M.C., Thorne, D.T., **Lattice Boltzmann Modeling - An introduction for Geoscientists and Engineers**, Springer Verlag, 2006.
- [17] Zou, Q., He, X., “On pressure and velocity boundary conditions for the Lattice Boltzmann BGK model”, **Phys. Fluids**, 9, 1592-1598, 1997.
- [18] Chen, S., Wang, Z., Shan, X.W., Doolen G.D., “Lattice Boltzmann Computational Fluid Dynamics in Three Dimensions”, **Journal of Statistical Physics**, vol. 68, 379-400, 1992.
- [19] Ginzbourg, I., Alder, P.M., “Boundary Flow Condition Analysis for the Three Dimensional Lattice Boltzmann Model”, **Journal de Physique II**, vol . 4, 191-214, 1994.

SİMGELER VE KISALTMALAR

F	Kuvvet
m	Kütle
t	Zaman
c	Partikül hız vektörü
r	Konum vektörü
T	Sıcaklık
k	Boltzmann sabiti
Ω	Çarpışma operatörü
ρ	Yoğunluk
τ	Gevşeme faktörü/süresi
ω	Gevşeme parametresi/frekansı
f	Dağılım fonksiyonu
f^{eq}	Denge dağılım fonksiyonu
w	Ağırlık faktörü
c_k	Kafes hızı
c_s	Kafes ses hızı
Ma	Mach sayısı
Re	Reynolds sayısı
μ	Dinamik viskozite
ν	Kinematik viskozite

Kısaltmalar

HAD	Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği
LBM	Lattice Boltzmann Yöntemi
MD	Moleküler Dinamik
BGK	Bhatnagar-Gross-Krook