

Elastik zemine oturan kirişlerin ayırık tekil konvolüsyon ve harmonik diferansiyel quadrature yöntemleriyle analizi

Ömer CİVALEK*, Çiğdem DEMİR

Akdeniz University, Faculty of Engineering, Civil Engineering Department, Division of Mechanics,
Antalya-TURKIYE

Özet

Winkler elastik zemine oturan kirişlerin statik, burkulma ve serbest titreşim hesabı sunulmuştur. Kirişe ait yönetici diferansiyel denklem burkulma ve titreşim hesabında, harmonik diferansiyel quadrature (HDQ) yöntemi ve ayırık tekil konvolüsyon yöntemleriyle standart bir özdeğer denkleminde indirgenerek çözülmüştür. Statik hesap için kirişe ait eğilme denklemi bir lineer denklem takımına indirgenmiştir. Düğüm nokta sayısı ve bazı parametrelerin sonuçlar üzerine etkisi incelenmiş, elde edilen sonuçlar analitik ve diğer sayısal çözüm yöntemleriyle karşılaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Elastik zemine oturan kiriş, titreşim, burkulma, sayısal analiz.

The analysis of beams on elastic foundation by the methods of harmonic differential quadrature and discrete singular convolution

Abstract

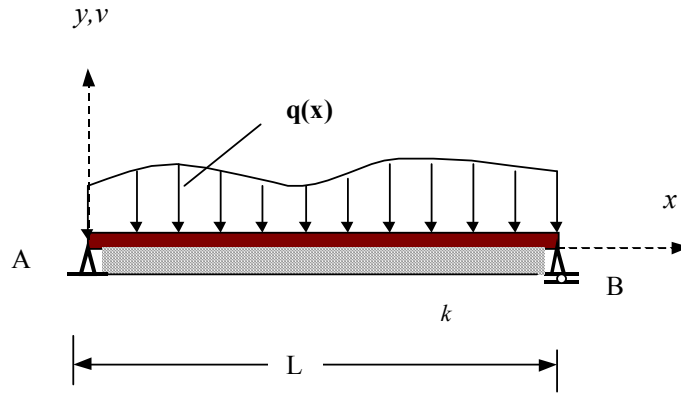
Static, buckling and free vibration analyses of beams on Winkler foundation are presented. For buckling and free vibration, the governing equation of beams has been solved by reducing a standard eigenvalue equation using the harmonic differential quadrature and discrete singular convolution methods. For static analysis, however, the bending equation is reduced a set of linear algebraic equation. The effects of grid numbers and some parameters on results are investigated, and the obtained results are compared with the results of produced by analytical and other numerical methods.

Keywords: Beams on elastic foundation, vibration, buckling, numerical analysis.

* Ömer CİVALEK, civalek@yahoo.com, Tel: (242) 310 63 19, Fax: (242) 310 63 06

1. Giriş

Elastik zemine oturan yapılar; mühendisliğin pek çok alanında geniş bir kullanım alanına sahiptir. Demiryolu mühendisliği, sıvı ve gaz iletim hatlarında kullanılan borular, kıyı ve liman yapıları, füze rampaları, hava alanları, uçak-uzay ve petro-kimya endüstrisinde bazı uygulamalar, biyomekanik ve diş hekimliği bu alanlardan bazılarıdır. Uygulama amacına göre bu yapılar kiriş, dikdörtgen plak, dairesel plak veya kabuk olabilmektedir. Temas halinde olduğu zemin ise elastik veya in-elastik davranışa sahip olabilir. Kiriş, plak veya kabuk gibi yapı elemanlarının oturduğu zemin için; Winkler, Pasternak, Vlasov, Kerr ve bazı diğer modeller geliştirilmiştir [1-7]. Hetenyi [8]. tarafından yazılan kitap elastik zemine oturan kirişlerin çeşitli çözüm yöntemlerini vermektedir. Günümüze kadar; sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanlar, Ritz, Galerkin, diferansiyel quadrature yöntemleri ile elastik zemine oturan kiriş (Şekil 1) problemi statik, burkulma ve titreşim hesabı için çözülmüştür [6-21].



Şekil 1. Elastik zemine oturan kiriş

Elastik zemine oturan yapılar hakkında detaylı bir referans listesi Civalek tarafından [30] verilmiştir. Yazar, benzer problemde statik analiz için yapay sinir ağları ve bulanık mantık kullanmıştır [31]. Bu çalışmada ise, harmonik diferansiyel quadrature (HDQ) ve ayrık tekil konvolüsyon (ATK) yöntemleri kısaca tanıtılarak elastik zemine oturan kirişe ait serbest titreşim, burkulma ve eğilme probleminin sayısal çözümü verilmiştir. Elde edilen sonuçlar karşılaştırılmış, her iki yöntemin performansı irdelenmiştir.

2. Diferansiyel quadrature (DQ) yöntemi

Diferansiyel quadrature yöntemi; bir fonksiyonun verilen bir ayrık noktadaki bir uzay değişkenine göre kısmi türevi, o değişken bölgesinin bütün ayrık noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı bir lineer toplamı ile ifade edilir [24], şeklinde tanımlanan düşünceye dayanır. Yeter yaklaşıktaki sonuçlar elde etmek için daha az sayıda düğüm kullanan diferansiyel quadrature yöntemi; fizik ve mühendislikte karşılaşılan başlangıç değer ve sınır değer problemleri için farklı bir yaklaşım ortaya koymuştur. Kuvvet polinomlarının kullanılması ile tek boyutlu bir $\psi(x)$ fonksiyonunun birinci türevini $x_i (i=1,2,\dots,N)$ noktalarında N ayrık nokta için göz önüne alırsak i inci ayrık nokta için birinci türev;

$$\psi_x(x_i) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N a_{ij} \psi(x_j); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

olacaktır. Burada x_j değişken bölgesindeki ayrık noktaları, $\Psi(x_j)$ bu noktalardaki fonksiyon değerlerini ve a_{ij} birinci dereceden türev için bu değerleri fonksiyon değerlerine bağlayan ağırlık katsayılarını ifade eder. Ağırlık katsayılarının hesabı, karşılık gelen koordinat yönlerinde fonksiyonel yaklaşımlar ile gerçekleştirilir. Test fonksiyonu yada yaklaşım fonksiyonu olarak bilinen bu fonksiyonların seçiminde süreklilik şartına dikkat edilmelidir. Benzer zorunluluk sonlu elamanlar yöntemindeki enterpolasyon fonksiyonlarının seçiminde de vardır. Ancak DQ yönteminde, seçilen fonksiyonlarının Ritz yönteminde olduğu gibi sınır şartını sağlaması zorunluluğu yoktur. Yaklaşım fonksiyonları, alan değişkenlerinin olası kararlı yani uniform durumlarını tanımlayabilmeli ve diferansiyel denklemdeki ya da sınır şartlarındaki mevcut en yüksek dereceli diferansiyele kadar türevinin alınabilmesi gerekir. Yani süreklilik şartı için, bir koordinat yönündeki düğüm sayısı, diferansiyel denklemdeki karşılık gelen bağımsız değişkene göre en yüksek dereceli türevin bir fazlasına eşit olmalıdır [25]. Kuvvet polinomları kullanımında (1) denklemi tam olarak alındığında, test fonksiyonu olarak $(N-1)$ veya daha küçük dereceden seçilen polinom fonksiyonu için;

$$\Psi_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

verilen denklem (1)'de yerine yazılırsa aşağıda belirtildiği formda bir lineer denklem takımı verir.

$$(k-1)x_i^{k-2} = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j^{k-1} \quad (3)$$

Benzer işlemler iki ve daha fazla dereceden türev ifadeleri için de yazılabilir. Böylece, her bir dereceden türev için ağırlık ifadeleri birinci dereceden türev ifadesinden farklı olmaktadır. İkinci dereceden türev için metot

$$\psi_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N B_{ij} \psi(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

olarak verilir. Burada b_{ij} ikinci dereceden türev için ağırlık katsayısıdır. Denklem (4) birinci dereceden ağırlık katsayıları cinsinden

$$\psi_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{jk} \psi(x_k) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

olarak yazılır. Denklem (2) ile verilen polinom fonksiyon uygulanırsa ikinci dereceden türev ifadesi

$$(k-1)(k-2)x_i^{k-3} = \sum_{j=1}^N B_{ij} x_j^{k-1} \quad (6)$$

olmaktadır. Bu denklem yukarıda verilen (3) denklemine benzer yaklaşımla çözülür. Bununla birlikte N düğüm nokta sayısı 22 den büyük olunca elde edilen yukarıdaki denklemde x in kuvvetlerinden oluşan matris bir Vandermonde matrisi olup sistemin çözümü tek olur ve matrisin tersini almak bir hayli güçleşir.

3. Harmonik diferansiyel quadrature (HDQ)

Harmonik diferansiyel quadrature yönteminde ağırlık katsayılarının hesaplanması için önerilen test fonksiyonu trigonometrik yada harmonik formda olduğundan metot harmonik diferansiyel quadrature olarak önerilmiştir. Bu fonksiyon [26]

$$u(x) = [1, \sin(d), \cos(d), \dots, \sin \frac{N-1}{2}(d), \cos \frac{N-1}{2}(d)] \quad (7)$$

olarak verilmektedir. Burada $d=\pi x$ tir. Bu yöntemde birinci ve ikinci mertebeden ağırlık katsayıları;

$$A_{ij} = \frac{(d/x)P(x_i)}{2P(x_j) \sin\left[\frac{x_i - x_j}{2}\right](d/x)}, \quad j \neq i \text{ için} \quad (8)$$

olur. Burada;

$$P(x_j) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \sin\left(\frac{x_i - x_j}{2} \frac{d}{x}\right), \quad j=1, 2, \dots, N \text{ için} \quad (9)$$

olur. Eğer $j = i$ için birinci mertebeden ağırlık katsayısı hesaplanacak olursa ifade [27];

$$A_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij}, \quad j=1, 2, \dots, N \text{ için} \quad (10)$$

olarak verilir. Benzer olarak ikinci mertebeden ağırlık katsayıları;

$$B_{ij} = A_{ij} \left[2 A_{ii} - \frac{d}{x} \operatorname{ctg} \frac{x_i - x_j}{2} \left(\frac{d}{x}\right) \right], \quad j \neq i \text{ için} \quad (11)$$

$$B_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N B_{ij}, \quad j = i \text{ için} \quad (12)$$

olur. Düğüm noktaları için eşit aralıklı noktalar ile işlem kısmen daha kolay ve uygulaması daha basittir. Çalışmada; koordinat yönünde eşit aralıklı seçilen

$$x_i = \frac{i-1}{N-1} ; i = 1, 2, \dots, N \quad (13)$$

grid noktaları yada aşağıda verilen eşit olmayan aralıklı

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right] \quad (14)$$

Chebyshev-Gauss-Lobatto düğüm nokta dağılımı kullanılmıştır.

4. Ayrık tekil konvolüsyon yöntemi

Diğer sayısal yöntemlerde olduğu ayrık tekil konvolüsyon yöntemi (ATK) de mevcut bir türev denklemi yani sürekli bir sisteme ait denklemi yaklaşım veya test fonksiyonu (sonlu elemanlarda şekil fonksiyonu) olarak kerneller kullanarak ayırıştırır. Kernel olarak Shannon kernel, Shannon delta kernel, Dirichlet kernel, de la Vallee kernel vb. kullanılır. Tekil bir konvolüsyon

$$F(t) = (T * \eta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(t-x)\eta(x)dx \quad (15)$$

ile tanımlanır. Çalışmada kernel olarak Shannon delta kernel (SDK) ve Lagrange kernel (LK) kullanılmıştır. Shannon kernel

$$\delta_{\Delta, \sigma}(x - x_k) = \frac{\sin[(\pi/\Delta)(x - x_k)]}{(\pi/\Delta)(x - x_k)} \exp \left[-\frac{(x - x_k)^2}{2\sigma^2} \right]; \sigma > 0 \quad (16)$$

olarak tanımlanır. Burada $\Delta = \pi/(N-1)$ her bir düğüm arası aralık ve N düğüm nokta sayısıdır. Burada σ parametresi Gauss zarfı (Gaussian envelope) genişliği olarak bilinir ve $\sigma = rh$ ile hesaplanır. Burada r hesaplamanın başında seçilecek bir parametredir, h ise hesap aralığıdır. ATK yönteminde herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun x_i noktası için x koordinat yönündeki türevi aşağıdaki toplam ile verilir.

$$\left. \frac{d^n f(x)}{d x^n} \right|_{x = x_i} = \sum_{k = -M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(n)}(x_i - x_k) f(x_k); (n=0,1,2,\dots) \quad (17)$$

Burada üst indis n türevin mertebesidir. Ayrık formda bu türev

$$f^{(n)}(x) = \left. \frac{d^n f}{d x^n} \right|_{x = x_i} \approx \sum_{k = -M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(n)}(k\Delta x_N) f_{k,j}. \quad (18)$$

olarak ifade edilir.

4.1. Lagrange kernel (LK)

Bu kernel aşağıdaki şekilde tanımlı olup $i = 0, 1, \dots, N-1$ and $j = -M, \dots, M$ için

$$\mathfrak{R}_{i,j}(x) = \begin{cases} \prod_{k=i-M, k \neq i+j}^{i+M} \frac{x - x_k}{x_{i+j} - x_k}, & x_i - M \leq x \leq x_{i+M}, \\ 0 & \end{cases} \quad (19)$$

şeklindedir. Bu durumda türev katsayıları;

$$W_{i,j}^{(n)} = n \left[W_{ij}^1 W_{ij}^{(n-1)} - \frac{W_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_{i+j})} \right] \quad (20)$$

ile tanımlıdır.

5. Sayısal uygulama

5.1. Titreşim hesabı

Eğilme rijitliği EI olan bir kirişi dikkate alalım. Zemin modül katsayısı k ile tanımlı Winkler elastik zemine oturan uniform elastik bu kirişe ait serbest titreşim denklemi [11];

$$EI \frac{d^4 v}{d x^4} + kv = \rho A \omega^2 v \quad (21)$$

olarak ifade edilir. Denklemden v elastik eğri yani düşey deplasman, A kesit alanı ve ρ kütle yoğunluğudur. Yöntemin (1) denklemine uygulanması ile titreşim denklemi HDQ formunda

$$\frac{EI}{L^4} \sum_{j=1}^N D_{ij} v_j + k(x) v_i = \rho A \omega^2 v_i \quad (22)$$

ile tanımlanır. Sınır koşullarının dikkate alınması ile denklem matris formunda

$$([D] - \lambda^2 [M]) \{\delta\} = 0 \quad (23)$$

olarak yazılır. Denklemin çözümüyle boyutsuz frekans değeri ($\lambda = \omega \sqrt{\rho A L^4 / EI}$) hesaplanır. Sayısal uygulamalarda A , E , I ve ρ değerleri sabit ve 1 olarak alınmıştır. Basit mesnet için S, ankastre mesnet için C ve serbest uç için F kısaltması

kullanılmıştır. Örnek olarak S-C şeklinde tanımlı kiriş $x=0$ ucunda sabit ve $x=L$ ucunda ankastre olarak mesnetlendirilmiş anlamındadır. Bu standart özdeğer probleminin çözümünden elde edilen sonuçlar çeşitli sınır koşulları için karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Çizelge 1. Her iki ucu basit mesnetli kirişin doğal frekans değerinin karşılaştırılması

$k=100$	Düğüm nokta sayısı (N)			
	5	7	9	11
DQ-Bu çalışma	15.0664	14.1081	14.0505	14.0503
ATK- Bu çalışma	15.2355	14.2367	14.1045	14.0503
HDQ-Bu çalışma	15.0656	14.1078	14.0503	14.0502
Analitik sonuç [Ref.11]	14.0502			

Çizelge 2. İki ucu basit mesnetli kirişin ilk üç frekans değerlerinin karşılaştırılması

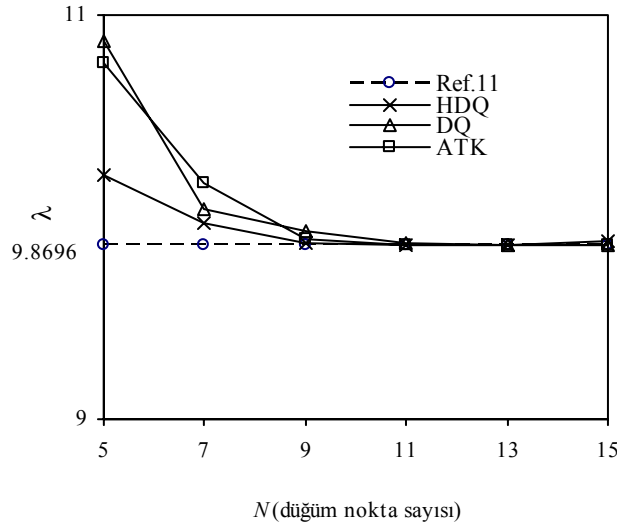
$k=1$ $N=11$	Mod sayısı		
	λ_1	λ_2	λ_3
Analitik sonuç [Ref.11]	9.9201	39.4910	88.8319
HDQ-Bu çalışma	9.9201	39.4911	88.8321
ATK-Bu çalışma	9.9202	34.4910	88.8320
DQ-Bu çalışma	9.9198	39.4908	88.8313

Çizelge 3. İki ucu basit mesnetli kirişe ait frekans değerleri

k	Mod sayısı		
	λ_1	λ_2	λ_3
HDQ			
1	9.9201	39.4911	88.8321
100	14.0503	40.7254	89.3875
10000	100.4858	107.5111	133.7540
ATK			
1	9.9202	39.4910	88.8320
100	14.0503	40.7256	89.3872
10000	100.4861	107.5118	133.7538

Çizelge 1’de 4 farklı düğüm sayısı için diferansiyel quadrature (DQ) ve harmonik diferansiyel quadrature (HDQ) sonuçları değerlendirilmiştir. HDQ; 9 düğüm nokta sayısı ile yeter hassasiyette sonuçlar vermiştir. DQ ise aynı sonuca 11 düğüm noktası ile ulaşmıştır. Özellikle titreşim problemlerinde HDQ yönteminin DQ yönteminden daha iyi sonuçlar verdiğini gösteren çalışmalar literatürde mevcuttur [20-25-28]. Çizelge 2’de her iki kenarından sabit mesnetli olarak dikkate alınan üniform elastik

kirişe ait ilk üç titreşim frekansı sunulmuştur. Düğüm nokta sayısı, $N=11$ alınmış ve elde edilen sonuçlar analitik değerlere [11] çok yakın çıkmıştır. Her iki kenarından sabit mesnetli bir kirişin HDQ ve DQ ile hesaplanan frekans değerinin düğüm nokta sayısına bağlı yakınsaması irdelenmiş ve sonuçlar Şekil 2’de verilmiştir. Birinci moda ait frekans değeri Weaver ve Timoshenko [11] tarafından $\lambda_1=9.8696$ olarak hesaplanmıştır. İlgili şekilden görüleceği üzere düğüm nokta sayısı arttıkça sonuçlar yakınsamaktadır. HDQ yönteminin yakınsaması DQ yöntemine göre daha iyi olup, $N=11$ düğümünden sonra her iki metot benzer sonuçlar üretmektedir. Yani belli bir değerden sonra sonuçlar düğüm noktasından bağımsızdır. Çizelge 3’te farklı zemin yatak katsayıları ($k=1, 100, 10000$) için S-S kirişe ait ilk üç frekans değerleri verilmiştir. Frekans değerleri k değerinin artmasına bağlı olarak artmaktadır. Çizelge 4’te ise farklı mesnet koşulu için ilk üç frekans değeri verilmiştir. Her iki ucun ankastre olarak tutulduğu kirişe ait frekans değerleri diğerlerinden daha büyüktür.



Şekil 2. S-S kirişe ait birinci modun düğüm nokta sayısına bağlı yakınsaması ($k=0$)

Çizelge 4. Farklı mesnet koşuluna sahip kiriş için ilk üç frekans değerinin karşılaştırılması

$k=1$ $N=11$	Mod sayısı		
	λ_1	λ_2	λ_3
HDQ			
S-S	9.9201	39.4910	88.8319
C-C	22.3958	61.6811	120.9103
C-F	3.65546	22.0573	61.7059
ATK			
S-S	9.9202	39.4911	88.8319
C-C	22.3961	61.6814	120.9105
C-F	3.65548	22.0573	61.7063

5.2. Burkulma hesabı

Zemin modül katsayısı değişken olarak $k(x)$ ile tanımlı Winkler elastik zemine oturan uniform elastik kirişe yatay P yükü etkidiğini düşünelim. Siteme ait diferansiyel denklem

$$EI \frac{d^4 v}{d x^4} + P \frac{d^2 v}{d x^2} + k(x)v = 0 \quad (24)$$

olarak ifade edilir. Kirişe ait Denkleme ATK yöntemi tatbik edilince ilgili denklem;

$$EI \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(4)}(k\Delta x) v_{kj} + P \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k\Delta x) v_{kj} + k v_{ij} = 0 \quad (25)$$

olarak yazılır. Denklem boyutsuzlaştırılıp düzenlenirse;

$$(D_x^4 \otimes I_x + D_x^2 \otimes I_x)v = \beta v. \quad (26)$$

ATK formunda denkleme ulaşılır. Burkulma değeri ($\beta = PL^2 / EI$) hesaplanır. Elde edilen sonuçlar çeşitli sınır koşulları için karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

Çizelge 5'te verilen sonuçlar yöntemin yaklaşımını kontrol etmek amacıyla sunulmuştur. Kiriş her iki ucundan basit mesnetli olup $k=0$ alınmıştır. Dört farklı düğüm sayısı için Shannon delta kernel (SDK) ve Lagrange kernel (LK) sonuçları karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre ayırık tekil konvolüsyon yöntemi $N=9$ için uygun sonuçlar üretmiştir. Her iki kernel 11 düğüm nokta sayısı için yeter doğruluktadır. Ancak daha önceki çalışmalardan da bilindiği üzere [37-42] Shannon delta kernel (SDK) daha az düğüm noktası ile daha hassas sonuçlar verebilmektedir. Lagrange kernel (LK) kullanıldığı zaman bazı problemlerde denklemin çözümünde stabilite çözümü ortaya çıkmaktadır. Sonuçlardan görüleceği üzere $N=5$ için elde edilen sonuçlar sonlu farklar [23] yöntemine göre bir hayli üstündür. Diferansiyel quadrature (DQ) ve harmonik diferansiyel quadrature (HDQ) ise mevcut yöntem ile hemen hemen uyum içindedir.

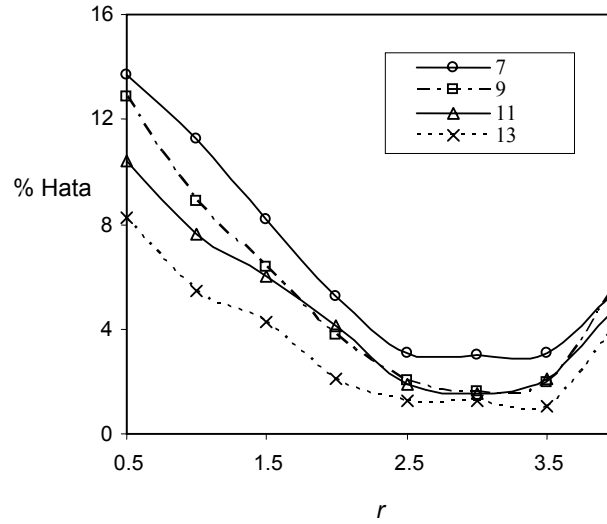
Bu aşamada; ayırık tekil konvolüsyon (ATK) yönteminde çözüm hassasiyetini arttıran en önemli parametre olan r değerinin etkisi incelenmelidir. Bu amaçla $k=10$ ve her iki ucu basit mesnetli kolona ait burkulma değeri analitik sonuçla karşılaştırılmış ve elde edilen hata değerlerinin r parametresine bağlı değişimi Şekil 3'te verilmiştir. Bu şekilde görüleceği üzere; r parametresi 2.4 ile 3.3 arasında daha uygun sonuçlar vermektedir. Yani tek başına düğüm nokta sayısı çözümde hassasiyeti sağlayamamaktadır. Esasında N düğüm nokta sayısı yakınsamayı sağlamakta, r parametresinin uygun seçimi ise hassasiyeti arttırmaktadır. Sonuç olarak r parametresi çalışmada 2.86 olarak alınmıştır. Farklı zemin parametresi için her iki kenarından sabit mesnetli kirişe ait burkulma değerleri Çizelge 6'da verilmiştir. Zemin parametresi büyüdükçe burkulma değeri artmaktadır. Sonuçlar analitik değerlerle [22] uyumaktadır.

İki ucu basit mesnetli ve değişken katsayılı ($k(x) = k[1 - \alpha(x/L)]$) zemine oturan kirişe ait burkulma değerleri Çizelge 7'de farklı zemin yatak katsayısı ($k=500, 1000, 1500,$

2000) için verilmiştir. Çizelge 7’de elde edilen sonuçlar $N=11$ ve $r= 2.86$ için hesaplanmıştır.

Çizelge 5. Her iki ucu basit mesnetli kirişin burkulma değerinin karşılaştırılması

$k=0$	Düğüm nokta sayısı (N)			
	5	7	9	11
ATK-SDK	9.8724	9.8695	9.8696	9.8696
ATK-LK	9.8731	9.8701	9.8697	9.8696
DQ [Ref. 25]	9.843	9.871	-	-
HDQ [Ref.25]	9.851	9.869	-	-
Sonlu farklar [Ref. 23]	11.548	-	-	-
Analitik [Ref.22]	9.8696			



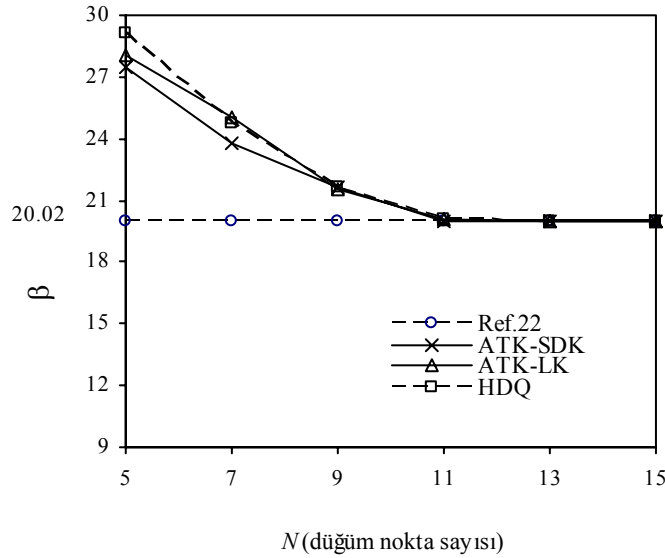
Şekil 3. Konvolüsyon parametresinin yakınsama analizi ($k=10$)

Çizelge 6. İki ucu basit mesnetli kirişin burkulma değerlerinin karşılaştırılması ($N=13$)

$N=11$	Zemin katsayısı		
	$k=1$	$k=100$	$k=10000$
Analitik sonuç [Ref.22]	9.9709	20.002	201.41
DSC-SDK	9.9709	20.003	201.41
DSC-LK	9.9711	20.005	201.43
DQ	9.9710	20.006	201.42
HDQ	9.9709	20.003	201.42

Çizelge 7. İki ucu basit mesnetli değişken katsayılı zemine oturan kirişe ait burkulma değerlerinin karşılaştırılması ($k(x) = k[1 - \alpha(x/L)]$)

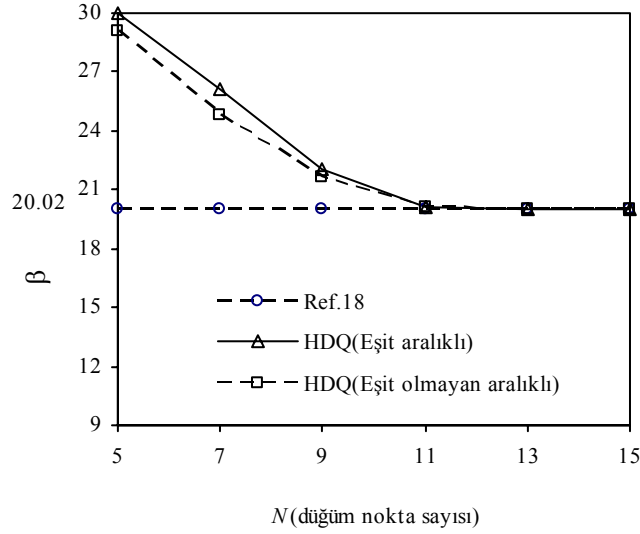
k	α		
	0.2	0.6	0.8
	DQ		
500	4.884	4.754	4.682
1000	5.680	5.507	5.410
1500	6.234	6.032	5.915
2000	6.670	6.446	6.311
	ATK		
500	4.885	4.756	4.684
1000	5.681	5.508	5.409
1500	6.234	6.032	5.918
2000	6.672	6.446	6.312
	DQ		
500	4.884	4.751	4.680
1000	5.681	5.511	5.408
1500	6.234	6.030	5.915
2000	6.675	6.439	6.308



Şekil 4. S-S kirişe ait burkulma yükünün düğüm nokta sayısına bağlı yakınsaması ($k=100$)

Şekil 4'te ise elastik zemine oturan basit mesnetli kirişe ait burkulma yükünün hesabı düğüm nokta sayısına bağlı olarak incelenmiştir. Timoshenko ve Gere [22] tarafından verilen analitik sonuç 20.02 dir. Görüldüğü gibi her iki metot ile $N=11$ için yeter doğrulukta sonuçlar elde edilmiştir. Ancak Shannon kernelin kullanıldığı ayrık tekil konvolüsyon yönteminin yakınsaması az da olsa bir farkla diğerlerine göre daha hızlıdır. Bu aşamada; DQ ve HDQ yöntemlerinde kullanılan düğüm nokta tipinin performansa etkisi incelenmelidir. Bir önceki problem HDQ yöntemi ile Denklem (13) ile verilen eşit aralıklı ve Denklem (14) ile verilen eşit olmayan aralıklı düğüm noktaları için

çözölmüş ve sonuçlar Şekil 5'te verilmiştir. Eşit olmayan düğüm nokta tipi (Chebyshev-Gauss-Lobatto) kısmen daha hızlı yakınsamıştır. Bu düğüm tipinin HDQ yönteminde daha uygun olduğu diğer çalışmalarda da verilmiştir [25-29].



Şekil 5. S-S kirişe ait DQ ve HDQ ile hesaplanan burkulma yükünün düğüm nokta çeşidi açısından incelenmesi ($k=100$)

5.3. Statik analiz

Şekil 1'de verilmiş olan üniform kirişe ait statik çözüm aşağıda DQ formunda verilen denklem çeşitli sayıda düğüm noktası kullanılarak elde edilmiştir.

$$\frac{EI}{L^4} \sum_{j=1}^N D_{ij} v_j + kv_i = -q(x) \quad (27)$$

Çözömlenme neticesinde her iki ucu ankastre kirişin üniform yayılı yük etkisinde elde edilen kirişin orta noktasına ait deplasman ve eğilme değerleri hesaplanmıştır. Sonuçlar Çizelge 8'de Hetenyi [8] tarafından verilen sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Çizelgeden göröüleceği üzere HDQ yöntemi ile $N=7$ kullanılarak kesin değerle uyuşan çizelge elde edilmiştir. Benzer problemin ATK yöntemiyle çözümünden orta nokta deplasmanı $N=7$ düğüm noktası kullanılarak $v_{(orta\ nokta)}=0.8498$ olarak elde edilmiştir. Statik hesap için titreşim ve burkulma analizlerine göre daha az sayıda düğüm noktası yeterli olmuştur. Bu sonuç mekaniğin plak, kabuk veya diğer elemanlarının çözümünde geçerlidir.

Ancak titreşim ve burkulma probleminde sonuç üzerinde etkin olan düğüm nokta tipi, statik hesap için çok fazla etkili değildir. Çizelge 8'de sonuçlar eşit aralıklı düğüm noktaları için elde edilmiştir.

Çizelge 8. Her iki ucu ankastre kirişe ait deplasman ve eğilme değerleri

Düğüm nokta sayısı	$v_{(orta\ nokta)}$	$M_{(orta\ nokta)}$
N	$ql^4/1000EI$	$ql^2/10$
5	0.8506	0.1202
7	0.8497	0.1186
9	0.8497	0.1184
11	0.8497	0.1184
13	0.8497	0.1184
Hetenyi [8]	0.8497	0.1184

6. Sonuçlar

Mühendislik sistemlerinin analizinde diferansiyel denklemlerin çözümü büyük bir önem taşır. Elastik zemine oturan kirişlere ait eğilme, titreşim ve burkulma denklemleri günümüze kadar pek çok sayısal yöntem ile çözülmüştür. Kullanım alanına bağlı olarak elastik zemine oturan kirişlerin frekans ve burkulma değerlerinin hesabı tasarımda büyük önem taşır. Sunulan bu çalışmada Winkler elastik zemine oturan uniform kirişin serbest burkulma, titreşim analizi ve statik hesabı yapılmıştır. Burkulma için değişken kesitli kiriş problemi ayrıca çözülmüştür. Çözüm için literatürde son on yıl içinde geniş bir kesim tarafından kabul gören DQ ve HDQ yöntemleri ve henüz 7 yıllık bir geçmişi olan ayrık tekil konvolüsyon (ATK) yöntemi kullanılmış ve karşılaştırılmıştır. Her üç metod ile hassas sonuçlara ulaşılmıştır. Ancak HDQ yöntemi DQ yöntemine göre kısmen daha az düğüm nokta sayısı ile daha hassas sonuçlar üretebilmiştir. ATK yöntemi ise her durumda yeter doğrulukta sonuçları daha az düğüm nokta sayısı ile üretmiştir. Ayrık tekil konvolüsyon için farklı iki kernel seçilerek performansları irdelenmiştir. Düğüm nokta sayısının yakınsamaya olan etkisi vurgulanmış ancak, hassasiyet için ATK yönteminde kullanılan r parametresinin daha önemli olduğu görülmüştür. Eşit olmayan düğüm nokta tipi; titreşim ve burkulma gibi özdeğer problemlerinde HDQ yönteminde yakınsamayı etkilemektedir. Eğilme probleminde ise düğüm nokta tipinin HDQ ve DQ yöntemlerinde sonuçlar üzerine belirgin bir etkisi yoktur.

Kaynaklar

- [1] Vlasov, V.Z., and Leont'ev N.N., Beams, Plates and Shells on Elastic foundations, Translated from Russian to English by Barouch, A., **Israel Program for scientific translations**, Jerusalem, (1966).
- [2] Winkler, E., Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, p. 182, Prague, (1867)
- [3] Pasternak, P.L., New method of calculation for flexible substructures on two-parameter elastic foundation, Gosudarstvennoe Izdatelstoo, **Literaturi po Stroitelstvu Arkhitekture**, pp. 1–56 , Moskau (in Russian), (1954).
- [4] Zimmermann, H., Die Berechnung des Eisen bahnoberbaues, second ed. Berlin, 1930. A.B. Kerr, Elastic and viscoelastic foundation models, **Journal of Applied Mechanics** 31, 491–498, (1964).
- [5] Reissner, E., A note on deflections of plates on viscoelastic foundation, **Journal of Applied. Mechanics, ASME**, 25 (1), 144–145 (1958).
- [6] Ayvaz, Y., Daloğlu, A., and Doğangün, A., Application of a modified Vlasov Model to earthquake analysis of plates resting on elastic foundations, **Journal of Sound and Vibration**, 212 (3), 499-509, (1998).
- [7] Daloğlu, A., Doğangün, A., and Ayvaz, Y., Dynamic analysis of foundation plates using a consistent Vlasov Model , **Journal of Sound and Vibration**, 224(5), 941-951, (1999).
- [8] Hetenyi, M., Beams on elastic foundation, **The University of Michigan Press**, (1946).
- [9] Hetenyi, M., Beams and plates on elastic foundations and related problems, **Applied Mechanics Reviews**, 19, 95-102, (1966).
- [10] Kameswara, Rao. NSV., Das, YC., Anandakrishnan M, Dynamic response of beams on generalized elastic foundation. **International Journal of Solids and Structures**, 11, 255-73, (1975).
- [11] Weaver, W.JR, Timoshenko SP, Young, DH, Vibration problems in engineering, **Fifth Edition, Wiley**, New York, (1990).
- [12] Ayvaz, Y., Daloğlu, A., Earthquake analysis of beams resting on elastic foundations by using a modified Vlasov Model, **Journal of Sound and Vibration**, 200(3), 315-325, (1997).
- [13] Ting, B.Y., Finite beams on elastic foundation with restraints. **Journal of the Structural Division ASCE**, 108, 611-21, (1982).
- [14] Lentini, M., Numerical solution of the beam equation with nonuniform foundation coefficient, **Journal of Applied Mechanics ASME**, 46, 901-4, (1979).
- [15] Kadioğlu, F., Elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli çubukların karışık sonlu eleman yöntemi ile çözümü, **Çukurova Üniversitesi 15. Yıl Sempozyumu**, Adana, 4-7 Nisan, 61-73, (1994).
- [16] Lai, Y.C., Ting, B.Y., Lee W.S., and Becker W.R., Dynamic response of beams on elastic foundation, **Journal of Structural Engineering ASCE**. 118,853-858, 1992.
- [17] Wang, J., Vibration of stepped beams on elastic foundations, **Journal of Sound and Vibration**, 149, 315-322, (1991).
- [18] Rosa Maria A.D., Stability and dynamics of beams on Winkler elastic foundations, **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, 18, 377-88 (1989).
- [19] Yankelevsky, D. Z., Eisenberger, M., Analysis of a beam-column on elastic foundations, **Composite Structures**. 23(3), 351-56, (1986).

- [20] Eisenberger, M., Clastornik, J., Eisenberger, M., Vibrations and buckling of a beam on variable winkler elastic foundation, **Journal of Sound and Vibration**, 115(2), 233-41, (1987).
- [21] Razaqpur, A.G., Stiffness of beam-columns on elastic foundation with exact shape functions, **Composite Structures**, 24(5), 813-19, (1986).
- [22] Timoshenko S.P., Gere JM. Theory of elastic stability, 2nd ed., **Tokyo: McGraw-Hill**, (1959).
- [23] Chajes, A., Principles of structural stability theory. **New Jersey: Prentice-Hall**, (1974).
- [24] Bert, C.W., Malik, M.,(1996): Differential quadrature method in computational mechanics: A Review., “**Applied Mechanics Review**, 49(1), 1-28.
- [25] Civalek, Ö., Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic Columns, **Engineering Structures, An International Journal**, Vol. 26(2), 171-186, (2004).
- [26] Civalek, Ö., Ülker, M., Harmonic differential quadrature (HDQ) for axisymmetric bending analysis of thin isotropic circular plates, **International Journal of Structural Engineering and Mechanics**, Vol. 17(1), 1-14, (2004).
- [27] Civalek, Ö., Ülker, M., HDQ-FD Integrated methodology for nonlinear static and dynamic response of doubly curved shallow shells, **International Journal of Structural Engineering and Mechanics**, 19(5), 535-550, (2005).
- [28] Civalek, Ö., Geometrically nonlinear dynamic analysis of doubly curved isotropic shells resting on elastic foundation by a combination of HDQ-FD methods, **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, 82(6), 470-479, (2005).
- [29] Civalek, Ö., Harmonic differential quadrature-finite differences coupled approaches for geometrically nonlinear static and dynamic analysis of rectangular plates on elastic foundation, **Journal of Sound and Vibration**, 294, 966-980, (2006).
- [30] Civalek, Ö., Elastik zemine oturan yapıların hesap yöntemlerine genel bir bakış, **Türkiye İnşaat Mühendisleri Odası-TMH, Mühendislik Haberleri**, 432, 45-54, (2004).
- [31] Civalek, Ö., Elastik zemine oturan kirişlerin Nöro-Fuzzy tekniği ile analizi, 7. **Ulusal zemin mekaniği ve temel mühendisliği konferansı**, 22-23 Ekim, Yıldız Üniversitesi., İstanbul, (1998).
- [32] Civalek, Ö., Free vibration analysis of composite conical shells using the discrete singular convolution algorithm, **Steel and Composite Structures**, 6(4), 353-366, (2006).
- [33] Civalek, Ö., Nonlinear analysis of thin rectangular plates on Winkler-Pasternak elastic foundations by DSC-HDQ methods, **Applied Mathematical Modeling**, 31, 606-624, (2007).
- [34] Civalek, Ö., Frequency analysis of isotropic conical shells by discrete singular convolution (DSC), **International Journal of Structural Engineering and Mechanics**, 25(1), 127-131, (2007).
- [35] Civalek, Ö., Nonlinear dynamic response of MDOF systems by the method of harmonic differential quadrature (HDQ), **International Journal of Structural Engineering and Mechanics**, 25 (2), 201-217, (2007).
- [36] Civalek, Ö., Three-dimensional vibration, buckling and bending analyses of thick rectangular plates based on discrete singular convolution method, **International Journal of Mechanical Sciences**, 49-752-765, (2007).

- [37] Civalek, Ö., Numerical analysis of free vibrations of laminated composite conical and cylindrical shells: discrete singular convolution (DSC) approach, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 205, 251–271, (2007).
- [38] Civalek, Ö., Vibration analysis of conical panels using the method of discrete singular convolution, **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 24, 169-181, (2008)
- [39] Civalek, Ö., A parametric study of the free vibration analysis of rotating laminated cylindrical shells using the method of discrete singular convolution, **Thin-Walled Structures**, 45, 692-698, (2007).
- [40] Civalek, Ö., Free vibration and buckling analyses of composite plates with straight-sided quadrilateral domain based on DSC approach, **Finite Elements in Analysis and Design**, 43,1013-1022, (2007).