Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi B-Teorik Bilimler
Anadolu University Journal of Science and Technology B- Theoretical Sciences
Cilt: 3 Sayı: 2 - 2015
Sayfa: 45 - 52
DOI: 10.20290/btdb.55979

ARAŞTIRMA MAKALESİ /**RESEARCH ARTICLE**

Gülhan HASANOV [1], Yagub SARDAROV [2], Memmedağa MEMMEDLİ [3]

BİR BULANIK MANTIK ÇIKARSAMA KURALI

ÖZ

Makalede bulanık veriler temelinde karar verme problemine ait bulanık çıkarsama kuralları ile ilgili bir metot geliştirilmiştir. Genelde bulanık verilerle karar verme problemlerinde bulanık ilişkiler matrisine dayalı nümerik metotlar kullanılır. Bu makalede söz konusu problem için yeni bir analitik metot ileri sürülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Bulanık mantık, Bulanık kümeler, Bulanık sayı, Kompozisyonlu çıkarsama kuralı.

A FUZZY INFERENCE RULE

ABSTRACT

A method which concerns with fuzzy inference rules relating to decision making problem based on fuzzy data is improved in this article. Generally, numerical methods based on fuzzy relationship matrix are used in decision acceptance problems with fuzzy data. In this article, a new analytic method is presented for this problem.

Keywords: Fuzzy logic, Fuzzy sets, Fuzzy number, Compositional rule of inference.

[1, 2] Azerbaycan Devlet Petrol Akademisi, Bilgisayar Teknolojisi ve Programlama, Bakü, Azerbaycan.
[3,] Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Eskişehir, Türkiye.
E-posta:mmammadov@anadolu.edu.tr
Geliş: 28 Kasım 2013 **Düzeltme**: 30 Nisan 2014 **Kabul:** 5 Haziran 2014

1. GİRİŞ

Bulanık ilişkiler bulanık sistemler teorisinde önemli rol oynar. Bulanık ilişkiler yaklaşımı karmaşık sistemlerin incelenmesinde, modellenmesinde, karar verme sürecinde, teknolojik süreçlerin kontrolünde vb. kullanılır.

Karar verme problemi hedefe ulaşmak için bir çaba ve uğraşma yönünün seçimi olarak düşünülebilir. Çoğu zaman bu sorunu verilerin azlığı ve belirsizlik durumlarında çözmek zorunda kalırız. Bu amaçla önce sürecin modeli belirlenmelidir. Bulanıklık durumunda söz konusu model dilsel kurallar biçiminde yapılır. Örneğin,

"eğer $\tilde{x}_{1i}, \tilde{x}_{2i}, ..., \tilde{x}_{ni}$ ise, bu durumda $\tilde{y}_i$ 'dir", $i = 1, 2, ..., n$.

Uygulamalarda çoğunlukla bulanık ilişkiler matrisi yerine aşağıdaki bulanık kurallar tablosu (BKT) kullanılır:

$$(\tilde{x}_{1i}, \tilde{x}_{2i}, ..., \tilde{x}_{ki}, ..., \tilde{x}_{ni}) \rightarrow \tilde{y}_i \ , \ \mathrm{i} = \overline{1, N} \ ,$$

burada:

$$\tilde{x}_{ki} = \{(x_k, \mu_{ki}(x_k)) \big| x_k \in X_k\}; \ \tilde{y}_i = \{(y, \mu_i(y)) \big| y \in Y\}.$$

Ancak, tüm durumları bir dilsel kurallar biçiminde ifade etmek mümkün olmamaktadır. Bu durumda basit dilsel kurallar tablosu (DKT) yardımıyla karar verilebilir. Bu amaçla L. Zadeh'in bileşimli çıkarsama kuralı kullanılır. Bu kural matematiksel olarak şöyle yazılabilir (deKleer 1986, Doyle 1979):

$$\tilde{x}_1^t \circ \tilde{x}_2^t \circ \cdots \circ \tilde{x}_k^t \circ \cdots \circ \tilde{x}_n^t \circ R(x_1, x_2, ... x_k, ..., x_n, y) = \tilde{y}^t, \qquad (1)$$

burada:

$\tilde{x}_k^t = \{(x_k, \mu_k^t(x_k)) \big| x_k \in X_k\}$ - bulanık sayı değişkenlerinin aldığı güncel değerler;

$$R(x_1, x_2, ... x_k, ..., x_n, y) = \{\mu(x_1, x_2, ... x_k, ..., x_n, y) \big| (x_1, x_2, ... x_k,$$

$..., x_n, y) \in (X_1, X_2, ..., X_k, ... X_n, Y)\}$ - bulanık ilişkiler matrisi (BİM);

$\tilde{y}^t = \{(y, \mu^t(y)) \big| y \in Y\}$ - bulanık sayılar fonksiyonunun aldığı değerler;
" $\circ$ " – minimaks işleminin sembolüdür.
(1) ve yukarıdaki açıklamalar temel alınarak aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\mu^t(y) = \max_{x_1 \in X_1} \min\{\mu_1^t(x_1), ... \max_{x_k \in X_k} \min\{\mu_k^t(x_k), ...$$
$$..., \max_{x_n \in X_n} \min\{\mu_n^t(x_n), \mu(x_1, ..., x_k, ..., x_n, y)\} ...\}. \qquad (2)$$

BKT yardımıyla ise BİM şöyle hesaplanabilir (deKleer 1986):

$$\mu(x_1, x_2, ... x_k, ..., x_n, y) = \max_{i \in [1, N]} \min\{\mu_{1i}(x_1), \mu_{2i}(x_2), \ ... \ , \mu_{ki}(x_k), ..., \mu_{ni}(x_n), \mu_i(y)\} \ . \qquad (3)$$

Zadeh'in bileşimli çıkarsama kuralı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir. Örneğin, eğer

$$R(x,y)=\begin{pmatrix}0.3 & 0.6 & 0.5\\ 0.2 & 0.4 & 0.6\end{pmatrix},\qquad x^t=\{(x,\mu^t(x)\};\qquad \mu^t(x)=(0.1;\ 0.7)\ \text{ise,}$$

$x^t \circ R(x,y)=y^t=\{(y,\mu^t(y)\}$ işleminin sonucu, aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\mu^t(y_1)=\max\{\min\{0.1;0.3\},\min\{0.2;0.7\}\}=0.2$$
$$\mu^t(y_2(=\max\{\min\{0.1;0.6\},\min\{0.7;0.4\}\}=0.4$$
$$\mu^t(y_3(=\max\{\min\{0.1;0.5\},\min\{0.7;0.6\}\}=0.6$$
$$x^t \circ R(x,y)=y^t=(y_1,\ \ y_2,\ \ y_3)$$
$$\mu_t(y)=\{0{,}2\ ,\ 0.4,\ 0.6\}.$$

Böylece, (2) formülü ile gerekli bilinen $(\tilde{x}_1^t,\tilde{x}_2^t,\cdots,\tilde{x}_k^t,\cdots,\tilde{x}_n^t)\rightarrow\tilde{y}^t$ önermesi bulunur.
L. Zadeh'in çıkarsama kuralı süreci kısa olarak şöyle yazılabilir:

$$\text{BKT}\rightarrow\text{BİM}\rightarrow\tilde{y}^t.$$

2. PROBLEMİN TANIMLANMASI ve ÇÖZÜMÜ

Şimdi, BKT $\rightarrow$ BİM$\rightarrow$ $\tilde{y}^t$ çıkarsama sürecinin, onunla aynı sonuç veren ama uygulaması daha kolay olan

$$\text{BKT}\rightarrow\tilde{y}^t \tag{4}$$

kuralı ile gerçekleşebiliyor olduğunu ispat edelim.

(3) ifadesini (2)'de kullanırsak, aşağıdakileri yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\mu^t(y) &= \max_{x_1\in X_1}\min\{\mu_1^t(x_1),\ldots\max_{x_k\in X_k}\min\{\mu_k^t(x_k),\ldots\\ &,\max_{x_n\in X_n}\min\{\mu_n^t(x_n),\max_{i\in[1,N]}\min\{\mu_{1i}(x_1),\ldots,\mu_{ki}(x_k),\ldots\mu_{ki}(x_k)\}\ldots\}=\\ &=\max_{i\in[1,n]}\min\{\max_{x_1\in X_1}\min\{\mu_1^t(x_1),\mu_{1i}(x_1)\},\ldots,\max_{x_k\in X_k}\min\{\mu_k^t(x_k),\\ &\mu_{ki}(x_k)\},\ldots,\max_{x_n\in X_n}\min\{\mu_n^t(x_n),\mu_{ni}(x_n)\},\mu_i(y)\}=\\ &=\max_{i\in[1,n]}\min\{a_{1i},\ldots,a_{ki},\ldots,a_{ni},\mu_i(y)\}=\max_{i\in[1,n]}\min\{a_i,\mu_i(y)\}\ ,\end{aligned}\tag{5}$$

burada:

$$a_{ki}=\max_{x_k\in X_k}\min\{\mu_k^t(x_k),\mu_{ki}(x_k)\}\ ;\ a_i=\min\{a_{1i},\ldots,a_{ki},\ldots,a_{ni}\}\ .$$

(5)'den sonuç olarak (4) bulanık çıkarsama kuralı elde edilmiş olur, böyle ki,

$$\begin{aligned}&\text{a) } a_{ki}=\max_{x_k\in X_k}\min\{\mu_k^t(x_k),\mu_{ki}(x_k)\}\\ &\text{b) } a_i=\min\{a_{1i},\ldots,a_{ki},\ldots,a_{ni}\}\\ &\text{c) } \mu_i^t(y)=\min\{a_i,\mu_i(y)\}\\ &\text{d) } \mu^t(y)=\max_{i\in[1,N]}\mu_i^t(y)\ .\end{aligned}\tag{6}$$

BKT'yi oluşturan bulanık sayılar şu özelliklere sahiptirler (Şekil 1):

a) BKT'de aynı koşullu iki kural olamaz, aksi durumda tabloda birbirine zıt olan kurallar bulunurdu.

b) BKT'yi oluşturan bulanık sayıların üyelik fonksiyonları ancak diğer iki sayının üyelik fonksiyonunu kesir ve kesişim aynı α seviyesinde gerçekleşir.

Bu iki özellikten şu sonuç elde edilebilir:

x_k^t $(k=1,2,...,n)$ güncel giriş durumlarına bağlı olarak, öyle bir $P \in [0,N]$ alt kümesi var ki, yalnız $i \in P$ olduğunda $a_{ki} > \alpha$ eşitsizliği doğru oluyor.

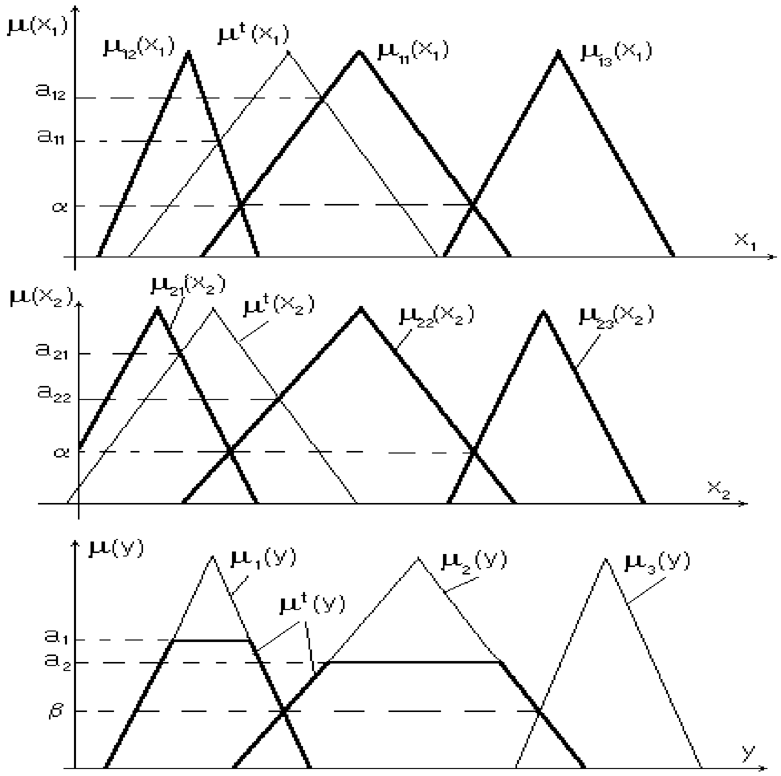
Gerçekte, bileşimli çıkarsama kuralında kullanılan güncel bulanık sayıların üyelik fonksiyonları α seviyesinin üstünde oluyor, yalnız iki bulanık sayının üyelik fonksiyonları ile kesişebilir. Dolayısıyla, eğer BKT'den giriş varsa, bu durumda sonuç çıkarma sürecinde 2^{n-1} sayıda kural olacaktır. Bu kurallar P kümesini oluşturuyor. Bu durumda (6) formülü yerine aşağıdaki formül konacaktır:

$$\mu^{*t}(y) = \max_{i \in P} \mu_i^t(y), \tag{7}$$

burada, $\mu^{*t}(y) = \mu^t(y)$, $y \in Y^\alpha$; $Y^\alpha = \{y \,|\, \mu^t(y) > \alpha\}$.

(6) formülünün bilgisayarda programlanması bir o kadar da kolay değildir. Bu nedenden de bu formülü kolay hesaplanabilir biçime çeviririz.

$\tilde{x}_{ki}$, $\tilde{x}_k^t$ bulanık sayıların üyelik fonksiyonlarının üçgen biçiminde olduğunu varsayalım (Şekil 1).



Şekil 1. Kompozisyonlu çıkarsama kuralının geometrik gösterimi

Bu durumda üyelik fonksiyonları analitik olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilirler:

$$\mu_{ki}(x_k) = 1 - \frac{|x_k - s_{ki}|}{m_{ki}}, \quad \mu_{ki+1}(x_k) = 1 - \frac{|x_k - s_{ki+1}|}{m_{ki+1}}, \quad \mu_k^t(x_k) = 1 - \frac{|x_k - x_k^t|}{m_k^t} \tag{8}$$

Şekil 1 ve (6) formülünden göründüğü gibi s_{ki}, x_k^t, s_{ki+1} ve x_k', x_k'' sayıları için

$$s_{ki} \le x_k' \le x_k^t \le x_k'' \le s_{ki+1} \tag{9}$$

sıralaması geçerlidir. Burada x_k', x_k'' ilk olarak $\mu_{ki}(x_k)$, $\mu_{ki+1}(x_k)$ üyelik fonksiyonlarının güncel $\mu_k^t(x_k)$ üyelik fonksiyonu ile kesişim noktalarıdır. Bu nedenden $\mu_k^t(x_k')$, $\mu_k^t(x_k'')$ değerleri uygun olarak a_{ki} , a_{ki+1} 'e eşit olacaktır: $a_{ki} = \mu_k^t(x_k') = \mu_{ki}(x_k')$ ve $a_{ki+1} = \mu_k^t(x_k'') = \mu_{ki+1}(x_k'')$.

(9) eşitsizliğinden aşağıdakileri elde edebiliriz;

$$\begin{aligned} &|x_k' - s_{ki}| = x_k' - s_{ki} \ge 0 \quad ; \quad |x_k' - x_k^t| = x_k^t - s_k' \ge 0 \\ &|x_k' - s_{ki+1}| = s_{ki+1} - x_k'' \ge 0 \quad ; \quad |x_k'' - x_k^t| = x_k'' - x_k^t \ge 0 \end{aligned} \tag{10}$$

(10) ve (8)'den ise

$$\begin{aligned} &\mu_k^t(x_k') = \mu_{ki}(x_k') \Rightarrow x_k' = \frac{x_k^t m_{ki} + m_k^t s_{ki}}{m_{ki} + m_k^t} \\ &\mu_k^t(x_k'') = \mu_{ki+1}(x_k'') \Rightarrow x_k'' = \frac{x_k^t m_{ki+1} + m_k^t s_{ki+1}}{m_{ki+1} + m_k^t} \end{aligned} \tag{11}$$

olduğunu görürüz.

(6) algoritmasında (7)'i dikkate alındığında kompozisyonlu çıkarsama kuralı için aşağıdaki hesaplama adımları geliştirilir:

$$\begin{aligned} &\text{a) } a_{ki} = \mu_{ki}(x_k') = \mu_k^t(x_k') \\ &\text{b) } a_i = \min\{a_{1i}, \ldots, a_{ki}, \ldots, a_{ni}\} \\ &\text{c) } \mu_i^t(y) = \min\{a_i, \mu_i(y)\} \\ &\text{d) } \mu^t(y) = \max_{i \in P} \mu_i^t(y) \end{aligned} \tag{12}$$

Böylece BKT verilmişse, L. Zadeh'in (2) çıkarsama kuralını daha avantajlı (12) algoritması ile değişebiliriz.

Örnek: Tablodaki verilerle bağlı olan bir örnek ele alalım:

Tablo 1. $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ ifadesi

$\tilde{x}$	$\tilde{y}$
Düşük	*Az*
Orta	*Normal*
Hızlı	*Çok*

Tablo 2. $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$ değerleri

$\tilde{x}$	$\tilde{y}$
$\tilde{x}_1 = (s_{11}, m_{11}) = (7{,}4)$	$\tilde{y}_1 = (s_1, m_1) = (3{,}2)$
$\tilde{x}_2 = (s_{12}, m_{12}) = (12{,}5)$	$\tilde{y}_2 = (s_2, m_2) = (5{,}3)$
$\tilde{x}_3 = (s_{13}, m_{13}) = (16{,}2)$	$\tilde{y}_3 = (s_3, m_3) = (8{,}4)$

Tabloya göre $\tilde{x}^t = (x_1^t,\, m_1^t) = (10,\, 3)$; $\tilde{y}^t = (y, \mu^t(y))$. $\mu^t(y)$ üyelik fonksiyonunu hesaplamamız gerekir.

3. ÇÖZÜM

Tablodan görüldüğü gibi, tek bir $\tilde{x}$ girişi vardır ve buna göre de k =1. (9) eşitsizliğine göre $s_{11} \le x_1^t \le s_{12}$ olduğu için, P={1,2}. Algoritmanın aşamaları aşağıdaki gibi gerçekleştirilir:

a) 1. $k = 1,\ \mathrm{I} = 1,\ x_1^t = 10,\ m_1^t = 3,\ s_{1I} = 7,\ m_{1I} = 4$

$$x_1' = \frac{x_1^t m_{1I} + m_1^t s_{1I}}{m_{1I} + m_1^t} = \frac{10 \cdot 4 + 3 \cdot 7}{4+3} = \frac{61}{7}$$

2. $k = 1,\ \mathrm{I} = 2,\ x_1^t = 10,\ m_1^t = 3,\ s_{1I} = 12,\ m_{1I} = 5$

$$x_1'' = \frac{x_1^t m_{1I} + m_1^t s_{1I}}{m_{1I} + m_1^t} = \frac{10 \cdot 5 + 3 \cdot 12}{5+3} = \frac{86}{8}$$

$$a_{11} = \mu_1^t(x_1') = 1 - \frac{|x_1' - x_1^t|}{m_1^t} = 1 - \frac{\left|\frac{61}{7} - 10\right|}{3} = \frac{4}{7}$$

$$a_{12} = \mu_1^t(x_1'') = 1 - \frac{|x_1'' - x_1^t|}{m_1^t} = 1 - \frac{\left|\frac{86}{8} - 10\right|}{3} = \frac{3}{4}$$

b) k=1, olduğu için $a_1 = a_{11}$, $a_2 = a_{12}$.

c) $\mu_1^t(y) = \min\{a_1, \mu_1(y)\} = \min\{\frac{4}{7}, \mu_1(y)\}$

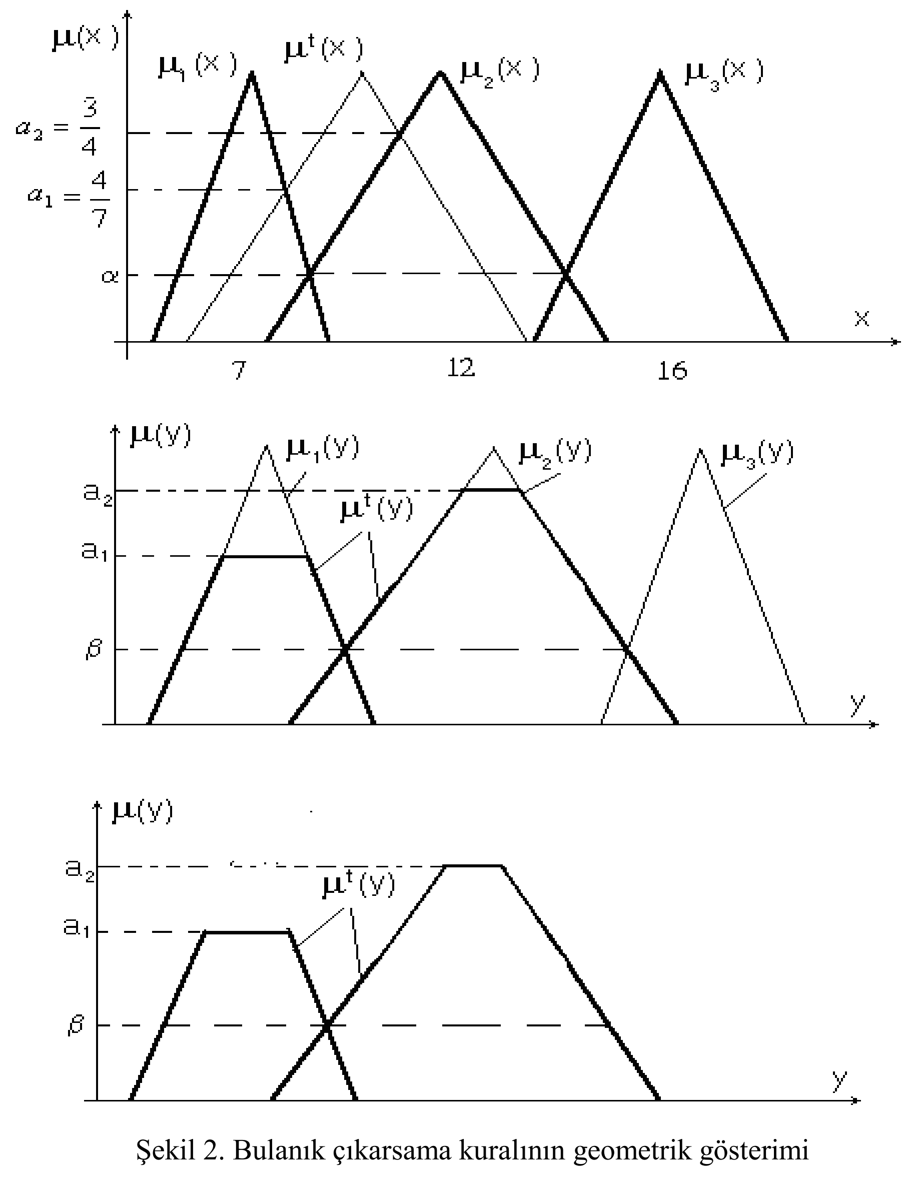
$$\mu_1(y) = 1 - \frac{|y - s_1|}{m_1} = 1 - \frac{|y-3|}{2}$$

$$\mu_2^t(y) = \min\{a_2, \mu_2(y)\} = \min\{\frac{3}{4}, \mu_2(y)\}$$

$$\mu_2(y) = 1 - \frac{|y - s_2|}{m_2} = 1 - \frac{|y-5|}{3}$$

d) $\mu^t(y) = \max\{\mu_1^t(y), \mu_2^t(y)\}$.

Şekil 2'de bu bulanık çıkarsama kuralının geometrik gösterimi verilmiştir.



Şekil 2. Bulanık çıkarsama kuralının geometrik gösterimi

4. SONUÇ

L. Zadeh'in bileşimli çıkarsama kuralından farklı olarak, önerilen algoritma kesikli olmayan DKT' den kesilen bulanık ilişkiler matrisine (BİM) geçmeyi gerektirmiyor ve bu nedenden de daha kesin sonuçlara ulaşmayı sağlıyor.

Göründüğü gibi, önerilen çıkarsama kuralı klasik enterpolasyon metotlarından farklı olarak, girişin güncel durumuna uygun çıkışı hesaplarken kurallar tablosunun tüm ilişki noktalarını değil, güncel duruma yakın ilişki noktalarını kullanan bir kaç mantıksal önermeleri temel alıyor. Bu nedenden de bu bulanık çıkarsama kuralını L. Zadeh'in bileşimli çıkarsama kuralından farklı olarak mantıksal çıkarsama kuralı veya doğrusal enterpolasyon adlandırabiliriz.

a_k - parametresini kullanmakla $\tilde{y}^t = (y, \mu^t(y))$ bulanık çıktının kesin değerini - modunu aşağıdaki formül ile de değerlendirebiliriz (Hasanov 2008):

$$y^* = \frac{\sum_k a_k \cdot s_k}{\sum_k a_k},$$

Burada q_k parametresi $\tilde{Q}_k = \{(q, \mu_{qk}(q)) \mid q \in Q\}$ bulanık sayısının modudur, yani $q_k = \max_{q \in Q} \mu_{qk}(q)$.

Makalede önerilen yeni yöntem bulanık modellerin yapımında ve analizinde kullanılabilir ve birçok avantajlara sahip olabilir.

KAYNAKLAR

DeKleer J. (1986). An Assumption Based Truth Maintenance System. Artificial Intelligence.

Doyle J. (1979). A Truth Maintenance System. Artificial Intelligence.

Hasanov G.S. (2008). *Fuzzy Sayılar ve Tesadüfi Büyüklükler ile Aritmetik İşlemler. Bakü*, 368 (Rus dilinde).

Martins J.P. (1992). *Truth Maintenance System*. In Shapiro S.E. ed.

McAllester D.A. (1978). A Three-Valued Truth Maintenance System. *MIT AI Lab., Memo 473.*

Sardarov Y.B. (2006). Bulanık İlişkiler Bazında Çıkarış Metodu.- *Azerbaycan Milli Havacılık Akademisinin Bilimsel Yayınları. - Bakü, No 2. – . 99-104.*

Zadeh L. (1983). Commonsense Knowledge Representation Based on Fuzzy Logic. *Computer, 16, 61-65.*