



Genelleştirilmiş Kuantum Işınlama Protokolü Generalized Quantum Teleportation Protocol

Emir Oğuz Kaya 

Sorumlu Yazar / Corresponding Author: kayao2006@gmail.com

Geliş Tarihi / Received: 06.03.2022

Kabul Tarihi / Accepted: 11.05.2022

Atıf şekli/ How to cite: KAYA,E.O, (2023). Genelleştirilmiş Kuantum Işınlaması Protokolü. DEÜ FMD 25(73), 69-80.

Araştırma Makalesi/Research Article

DOI:10.21205/deufmd.2023257306

Öz

Bu çalışma kapsamında literatürde var olan tek kubit(kuantum bit) ışınlanma/telenakil (quantum teleportation) protokolünün çok kubit sistemlere genellenmesi incelenmiştir. Ardından, birden fazla hedefe telenakil olanakları tartışılarak, buna dair bir protokol önerilmiştir. Geliştirilen teorik çerçeve kapsamında, kubitler üzerinde değişiklik yapan kuantum mantık kapılarının da genellenmesi tartışılmıştır. Söz konusu kuantum mantık kapılarının genel versiyonları oluşturulmuş olup, literatürdeki özel durumlar için çalışmaları gösterilmiştir. Işınlanmanın çok kubit-çok hedefe genellenmesi sonucu kurulan teorik çerçevede oluşan denklemlerin bir örüntü içerdiği belirlenmiş olup, bu örüntü aracılığı ile karmaşık tensör çarpımları ile tek tek uğraşmaksızın da protokolün gerçekleştirilebileceği bir yol önerilmiştir.

Çalışma kapsamında çok kubit - tek hedef, çok kubit - çok hedef protokollerine yönelik Python bilgisayar programları oluşturulmuştur. Oluşturulan programların, sunulan teorik çerçevenin ön gördüğü sonuçları başarılı bir şekilde ürettiği gözlenmiştir. Bu programlar aracılığı ile, uzun ve hata yapma olasılığı yüksek matematiksel işlemlerin kısa sürede ve hatasız yapılabilmesinin olanağı yaratılmıştır. Oluşturulan program sonuçları aynı zamanda, yukarıda bahsedilen örüntünün varlığını kanıtlamaktadır.

Anahtar Kelimeler: Kuantum ışınlaması(telenakil), Kuantum bit, Kuantum mantık kapısı

Abstract

Within the scope of this study, generalization of the single qubit (quantum bit) teleportation protocol to multi-qubit systems has been examined. Then, the possibilities of teleporting to more than one target were discussed and a protocol for this was proposed. Within the scope of the developed theoretical framework, the generalization of quantum logic gates that modify qubits is also discussed. General versions of these quantum logic gates have been created and they have been shown to work for special cases in the literature. It has been determined that the equations formed in the theoretical framework established as a result of the generalization of the teleportation to many qubits and many targets, contain a pattern, and a way to carry out the protocol without dealing with complex tensor products one by one is proposed through this pattern.

Within the scope of the study, Python computer programs were created for multi-qubit - single target, multi-qubit - multi-target protocols. It has been observed that the created programs successfully produce the results predicted by the theoretical framework presented. Through these

programs, it is possible to perform long and error-free mathematical operations in a short time. The generated program results also prove the existence of the above-mentioned pattern.

Keywords: Quantum Teleportation, Qubit, Quantum Logic Gate

1. Giriş

1993 yılında Charles H. Bennett [1] iki nokta arasında kuantum ışınlamasını önerdiğinden beri kuantum ışınlaması çok ilgi çeken ve araştırılan bir konu olmuştur. Gerek teorik [2-24,29-33,36], gerek deneysel [25-28, 34-35] ilerlemeler kaydedilmiştir.

Temelde protokolün nasıl çalıştığına ve ilerlemelere değinilmesi gerekir. Bir X noktasında Emir, Y noktasında Yunus olsun. Emir elindeki kuantum durumunu Yunus'a ulaştırmak istiyor. Ama bu işlemde üçüncü bir kişiye, Z noktasında Zeynep'e, ihtiyaç olacak. Zeynep dolaşık kubitler üretecek ve bunları X ve Y noktalarına ulaştıracak. Emir bazı işlemler ve ölçümler sonucunda elde ettiği çıktıyı Y noktasına klasik kanalla gönderecek, Yunus da gerekli kuantum mantık kapıları Z noktasından gelen kubitte uygulayacak ve X-Y noktaları arasında ışınlama gerçekleşmiş olacaktır.

Bu tür ek katılımcı (Zeynep) ışınlanma protokolünü kontrol edebilir ve bu nedenle bu ışınlama işlemi, Karlson ve Bourennane tarafından tasarlanan kontrollü kuantum ışınlanma (CQT) olarak bilinir [12]. 1998'den bu yana [12], birkaç araştırmacı tarafından CQT için çok sayıda şema önerilmiştir.

Li [19] önerilen ışınlanma şemaları dört kubit ve beş kubitlik küme (Z'den gelen durumlar) durumları kullanarak üç ve dört kubit durumundan oluşan durumların ışınlamasını araştırmıştır. Yang[24] ışınlama üzerinde bir iyileştirme önermiştir. Verma[29] çoklu küme (cluster) durumları kullanmayı önererek üç ve dört kubitli durumlar için telenakili araştırmıştır.

M. H. Sang, beş-kubit küme durumunu kullanarak çift yönlü kuantum ışınlanması için bir şema önerdi [31]. Y. H. Li dokuz kubit dolaşmış bir durum kullanarak çift yönlü kuantum kontrollü ışınlanmanın uygulanması önermiştir [32]. Fatahi ve Naseri, bir (N + 1) - kubit küme durumu kullanılarak bir N-kubit dolaşmış durumun yeni bir kuantum ışınlanması araştırmıştır. Basit bir örnek olarak

da önerilen protokolün 6-kubit dolaşık bir durumun kuantum kanalı olarak 7-kubit küme durumu üzerinden ışınlanmasıyla incelemiştir[33].

Yang ve ekibi, bir ağdaki birçok aracının kontrolü yoluyla bir göndericiden uzaktaki bir alıcıya çok kubitli kuantum bilgilerini ışınlanmanın bir yolunu sunmuştur[41].

Bolokian ve ekibi, rastgele sayıda kullanıcı için yeni bir kuantum ışınlanma protokolü önerilmiştir[42].

Bu çalışmada X noktasından Y noktasına ışınlanmak istenen N karmaşıklıkta bir durumun ışınlama protokolü incelenecek ve yukarıdaki çalışmaların hemen hepsini kapsaması amaçlanan bir N kubit için genel kuantum ışınlama protokolü oluşturulmuştur. Bunun yanında bu durumu sadece Y noktasına değil, olası başka noktalara da ışınlayabilmesine yönelik olarak M hedefe yönelik ışınlama için de bir genelleme sunulacaktır.

Çalışmada buna yönelik tek kubitlik bir durumu X noktasından Y_1 ve Y_2 noktalarına ışınlaması, iki kubitin X noktasından Y_1 ve Y_2 noktalarına ışınlamasına örnek verilmiştir. Proje kapsamındaki çalışmalar için Python yazılım dilinde kod yazılmıştır.

2. Materyal ve Metot

Işınlanmanın genelleştirilmesinin yapılabilmesi için en basit düzeyde protokolün nasıl çalıştığını ve kubit sayısı arttıkça nasıl değişimlerin olduğunu incelemeli ve bu değişimin N-kubitte nasıl olduğuna bakılmalıdır. Bunun için en temel ve basit ışınlama protokolü olan tek hedefe tek kubitlik sistemin ışınlanması ele alınarak başlanması uygun bulunmuştur.

Süreç, yukarıdaki X,Y ve Z üzerinden anlatılabilir. Emir'in Yunus'a ışınlamak istediği tek kubitlik sistemi vardır.

$$|\chi\rangle = \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \end{pmatrix}$$

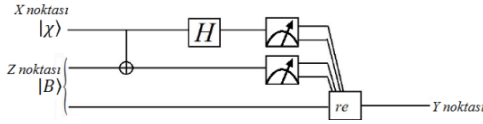
İşlemin gerçekleştirilmesi için Zeynep'in dolaşık bir kubit çifti oluşturması gerekir. İşlemi sağlayan durumlardan biri olduğu için şimdiki örnekte aşağıdaki Bell durumu tercih edilmiştir:

$$|B\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Bu iki dolaşık iki kubitte biri X'e biri Y'ye gönderilir.

$$|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle_X \otimes |0\rangle_Y + |1\rangle_X \otimes |1\rangle_Y]$$

Devre şeması aşağıdaki şekilde çizilir:



Şekil 1: Tek kubit-tek hedef ışınlama devre şeması

Figure 1: One-qubit one-target teleportation quantum circuit scheme

Z noktasından X noktasında gönderilen kubit, ışınlanacak kubit ile tensör çarpılıp önce CNOT sonra Hadamard kapısından geçirilir ($H(CNOT(|\chi\rangle \otimes |B\rangle))$) ve X noktasındaki kubitler üzerinden yapılan gözlemden elde edilen iki bitlik veriler klasik kanal ile Y noktasına ulaştırılır. Yunus da gelen veriye göre elindeki tek kubitlik sistemi gerekli kuantum mantık kapısı (re) tarafından etkiler ve X noktasında Emir'in ışınlamak istediği durum ışınlanmış olur. Devreyi aşağıdaki gibi parsellenmesi uzun vadede sürecin anlaşılmasını kolaylaştıracaktır:

$$|\chi\rangle \otimes |B\rangle = |\psi_1\rangle$$

$$CNOT(|\chi\rangle \otimes |B\rangle) = |\psi_2\rangle$$

$$H(CNOT(|\chi\rangle \otimes |B\rangle)) = |\psi_3\rangle$$

$|\psi_3\rangle$ ketinde X noktasındaki kubitlere göre durumları gruplanır ve elde edilen durumlar üzerinden gerekli kuantum mantık kapıları elde edilir. $|\psi_3\rangle$ durumu:

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= |00\rangle \otimes (R_0|0\rangle + R_1|1\rangle) \\ &\quad + |01\rangle \otimes (R_0|1\rangle + R_1|0\rangle) \\ &\quad + |10\rangle \otimes (R_0|0\rangle - R_1|1\rangle) \\ &\quad + |11\rangle \otimes (R_0|1\rangle - R_1|0\rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= (|0\rangle_X \otimes |0\rangle_X) \otimes \overbrace{(R_0|0\rangle_Y + R_1|1\rangle_Y)}^{\sigma_x|\chi\rangle} \\ &\quad + (|0\rangle_X \otimes |1\rangle_X) \otimes \overbrace{(R_0|1\rangle_Y + R_1|0\rangle_Y)}^{\sigma_x|\chi\rangle} \\ &\quad + (|1\rangle_X \otimes |0\rangle_X) \otimes \overbrace{(R_0|0\rangle_Y - R_1|1\rangle_Y)}^{\sigma_z|\chi\rangle} \\ &\quad + (|1\rangle_X \otimes |1\rangle_X) \otimes \overbrace{(R_0|1\rangle_Y - R_1|0\rangle_Y)}^{i\sigma_y|\chi\rangle} \end{aligned}$$

Böylece gerekli kuantum mantık kapıları aşağıdaki tablodaki gibi elde edilir.

Tablo 1: Tek kubit-tek hedef ışınlamasında sonuç bitlerine göre yapılması gereken işlemler

Table 1: Necessary operations on one-qubit one-target teleportation for result bits

Emir'in Sonuç Biti	Yunus'un İşlemi
00	I_2
01	σ_x
10	σ_z
11	$i\sigma_y = \sigma_z\sigma_x$

2.2. N-Kubit İçin Genelleme

Bu bölümde, önceki bölümde verilen ışınlama süreci, N kubit için genellenecektir. Bu amaç doğrultusunda önce mantık kapılarının genellenmesi sunulacak, ardından da durumların genellenmesi verilecektir.

2.2.1. Gerekli Kapıların İncelenmesi

2.2.1.1. Hadamard Kapısı

Hadamard kapısı genellemesi zaten çalışılmış bir konudur [37][38] ve çok kısa bir yazıyla anlaşılabilir.

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H_{2^k} = H_2 \otimes H_{2^{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}} \\ H_{2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}} \end{pmatrix}$$

2.2.1.2. Pauli Spin Matrisleri

Pauli spin matrisleri 2x2 yapıdadır. Kubit sayıları ikinin üsleri olarak artar. Pauli spin matrislerinin boyutlarının da aynı şekilde artması için tensör çarpımları kullanılabilir ki Pauli spin matrislerinin genellemesi de çalışılmış bir konudur ve Kronecker-Pauli [39][40]matrisleri ile elde edilebilir.

Bunların yanı sıra aşağıda verilen görece basit formülasyon ile elde edilecek matrisler de kuantum ışınlama protokolü için yeterli olabilir.

$$\bigotimes_i \sigma_{j_i}, j \in \{0,1,2,3\}, i = N$$

2.2.1.3. CNOT Kapısı

CNOT kapının genellemesinde karşılaşılabilecek anlaşmazlıklardan ilki aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

İki kubitte etkiyen CNOT $|a, b\rangle \rightarrow |a, a \oplus b\rangle$ işlemini yapar. Bir kontrol kubit(a) ve bir etki kubit(b) vardır. Peki çoklu kubitlerde işlem nasıl olacak? Kontrol kubit ya da kubitlerine ve etki kubit ya da kubitlerine kim karar verecek?

Bu sefer bir a kubitini değil, *kontrol kubitleri grubu*; b kubitini değil, *etki kubitleri grubu* olacaktır. Kontrol kubitleri grubundaki her kubitin etki kubitleri grubundaki hangi kubitte etkiyeceği ise yazım sırasına göre belli olacaktır. Tabii böyle bir kontrol grubuna göre etkilenen bir grubun olması için kontrol ve etki kubitleri grubunda aynı sayıda kubit bulunması gerekir.

$$a \text{ grup} = a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$b \text{ grup} = b_1, b_2, \dots, b_n$$

$$\begin{aligned} & CNOT|a \text{ grup}, b \text{ grup}\rangle \\ &= CNOT|a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n\rangle \\ &= |a_1, a_2, \dots, a_n, a_1 \oplus b_1, a_2 \oplus b_2, \dots, a_n \oplus b_n\rangle \\ &= |a \text{ grup}\rangle \bigotimes_i |a_i \oplus b_i\rangle \end{aligned}$$

Bu genel CNOT için ilk yoldur. Kontrol ve etki kubitlerinin içeriğine ve mod 2 üzerinden toplamlarına göre sonuç verir. Aynı CNOT yapısını verecek başka bir yol ise matris yapısı üzerinden olabilir. CNOT matrisinin yapısındaki örüntü ve bu örüntü üzerinden yapılacak genelleme de aynı etkiyi verecek CNOT kapısına ulaşmamızı sağlar.

İki kubitte etkiyen CNOT kapısının matris formu:

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki genelleştirmeye de uygun olarak dört kubitte etkiyen CNOT kapısının matris formu:

$$\begin{aligned} & CNOT \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_2 \otimes I_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 \otimes \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \otimes I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_x \otimes \sigma_x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Şimdi örüntü açıkça görülmektedir ($\sigma_0 \equiv I_2, \sigma_1 \equiv \sigma_x$).

$$2 \text{ qubit } CNOT = \sigma_0 \otimes (|0\rangle\langle 0|) + \sigma_1 \otimes (|1\rangle\langle 1|)$$

$$\begin{aligned} & 4 \text{ qubit } CNOT \\ &= (\sigma_0 \otimes \sigma_0) \otimes (|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0|) \\ &+ (\sigma_0 \otimes \sigma_1) \otimes (|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1|) \\ &+ (\sigma_1 \otimes \sigma_0) \otimes (|1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|) \\ &+ (\sigma_1 \otimes \sigma_1) \otimes (|1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|) \end{aligned}$$

Yazımı kolaylaştırması için aşağıdaki gibi bir matris tanımlanabilir:

$$\Sigma_{\cup_{j=0}^{N-1} i_j} = \bigotimes_k \sigma_{i_k}$$

Bazı değerler için açılımı:

$$\Sigma_{010} = \sigma_0 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_0$$

Şimdi bu matris kullanılarak genel CNOT matris formunda yazılabilir.

$$\begin{aligned} CNOT &= \sum_{\cup_{i=0}^{N-1} i_i=0}^1 \Sigma_{\cup_{j=0}^{N-1} i_j} \bigotimes_m (|i_m\rangle\langle i_m|) \\ &= \sum_{\cup_{i=0}^{N-1} i_i=0}^1 \bigotimes_k \sigma_{i_k} \bigotimes_m (|i_m\rangle\langle i_m|) \end{aligned}$$

Örneğin bu yazım üzerinden 8 kubit için CNOT matris formunda kolaylıkla yazılabilir:

$$CNOT = \begin{pmatrix} \Sigma_{000} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{001} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{010} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Sigma_{100} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{011} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{101} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{110} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Sigma_{111} \end{pmatrix}$$

2.2.2. Emir'in Durumunun Genelleştirilmesi

Genel ve N-kubit ışınlaması söz konusuysa tabii ki ışınlanacak durum da genelleştirilmelidir. Durumun N kubit için yazılmasında herhangi bir zorluk yoktur. Ortaya çıkan vektörde her elemanın (ihtimal genliği sıfır değil ise) sıfırdan farklı olması gerekir. Genel olarak kabataslak bir yazım aşağıdaki gibi olur:

$$|\chi\rangle = \sum_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_{\alpha}=0}^1 R_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_{\alpha}} \bigotimes_{\alpha} |i_{\alpha}\rangle$$

Normalizasyon koşulu sağlanmalıdır:

$$\langle\chi|\chi\rangle = \sum_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_{\alpha}=0}^1 |R_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_{\alpha}}|^2 = 1$$

Bilgisayar ile yapılacak hesaplamalarda ve gerekli kuantum mantık kapılarının listesinin çıkartılmasında, genel olarak ışınlamada Emir'in durumunun Yunus'un eline geçmesini sağlamak için bu kadar bir genelleştirme yeterli olabilir ama durumun genellemesinden bahsediliyorsa, durumun içeriğinden de ve bu içeriğin genelleştirilmesi yapılmalıdır.

Işınlanacak durumun içeriğinin genellemesi ilk başta anlamsız gelebilir, neticede herhangi bir kubit sayısına sahip durumun ışınlaması için genelleştirme yapılması nicelik anlamında genelleştirmenin tamamlandığı anlamına gelir ama *rastgele fiziksel bir sistemin* ışınlaması sağlanması ile niteliksel olarak da bir genelleme yapılabilmiş olacaktır ve *gerçekten en genel ışınlama protokolünün* yazılması sağlanmış olacaktır.

Peki rastgele fiziksel bir sistemin ışınlaması nasıl olacaktır? Bunun cevabı verilmesi durumunda çok karmaşık sistemlerin ışınlaması da mümkün olacaktır. Işınlama bütün parçacık

kombinasyonları için de geçerli olacaktır ve belki daha makrokozmetik fiziksel sistemlerin ışınlanması için de temel oluşturabilir.

Karmaşık bir sistem olarak N parçacık her birinin sahip olduğu N durum düşünülebilir. N parçacıktan oluşan bütün bir sistemin tek bir kuantum durumunda yazılabilmesi ile ışınlama protokolünde ışınlanabilmesi mümkün olur. Dolayısıyla her parçacığın diğer parçacıkların durumlarında bulunabileceğinin ve olası bütün durumların ifade edildiği bir durumun yazılması gerekir. Bunun için Slater determinantı kullanılmalıdır. Kullanılacak matrise sırayla olası kuantum durumları ve parçacıkların permütasyonlarının yazılması gerekir.

$$\begin{pmatrix} \phi_0(r_0) & \phi_1(r_0) & \cdots & \phi_{N-1}(r_0) \\ \phi_0(r_1) & \phi_1(r_1) & \cdots & \phi_{N-1}(r_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(r_{N-1}) & \phi_1(r_{N-1}) & \cdots & \phi_{N-1}(r_{N-1}) \end{pmatrix}$$

Slater determinantının alınması ile aşağıdaki dalga fonksiyonu elde edilir.

$$\psi(\chi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_0(r_0) & \phi_1(r_0) & \cdots & \phi_{N-1}(r_0) \\ \phi_0(r_1) & \phi_1(r_1) & \cdots & \phi_{N-1}(r_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(r_{N-1}) & \phi_1(r_{N-1}) & \cdots & \phi_{N-1}(r_{N-1}) \end{vmatrix}$$

Permütasyon işlemcisi ve Levi-Civita sembolü kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\psi(\chi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\beta=0}^{N-1} \epsilon_{\beta} P_{\beta} \prod_{\gamma=0}^{N-1} \phi_{\gamma}(r_{\gamma})$$

χ durumunu aşağıdaki gibi genel yazımı yapılabilir:

$$|\chi_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left(\sum_{\beta=0}^{N-1} \epsilon_{\beta} P_{\beta}^{\dagger} \prod_{\gamma=0}^{N-1} \phi_{\gamma}^*(r_{\gamma}) \right) |\psi\rangle$$

2.2.3. N-Kubit için Genelleştirilmiş Işınlama(Telenakil)

Yukarıdaki genelleştirmeler yapıldıktan sonra artık sadece parçaları birleştirmek kalmıştır. Yine N=1 kubit ışınlamasındaki süreç izlenecektir.

$$|\chi\rangle \otimes |Z\rangle = |\psi_1\rangle$$

$$CNOT(|\chi\rangle \otimes |Z\rangle) = |\psi_2\rangle$$

$$H(CNOT(|\chi\rangle \otimes |Z\rangle)) = |\psi_3\rangle$$

Yine ψ_3 ifadesinden Emir'in gözlemine göre paranteze alınacaktır ama genel bir denklem yazıldığından bu gruplama doğrudan yapılamayacağından ψ_3 durumun yazılması ve N değerine göre denklem çözüldüğünde Emir'in gözlemine göre gruplama yapılması doğru olacaktır.

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \left(\sum_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha} R_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha} \otimes |i_\alpha\rangle \right) \otimes \left(\frac{1}{2} \sum_{\bigcup_{\rho,\pi=0}^{N-1} j_\rho \cup k_\pi=0} \otimes_{\rho,\pi} |j_\rho, k_\pi\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\bigcup_{\alpha,\rho,\pi=0}^{N-1} i_\alpha \cup j_\rho \cup k_\pi=0} R_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha} \otimes_{\alpha,\rho,\pi} |i_\alpha, j_\rho, k_\pi\rangle \end{aligned}$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\bigcup_{\alpha,\rho,\pi=0}^{N-1} i_\alpha \cup j_\rho \cup k_\pi=0} R_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha} \otimes_{\alpha,\rho,\pi} |i_\alpha, i_\alpha \oplus j_\rho, k_\pi\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\bigcup_{\alpha,\rho,\pi=0}^{N-1} i_\alpha \cup j_\rho \cup k_\pi=0} R_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha} \otimes_{\alpha,\rho,\pi} (H_{2^N} |i_\alpha\rangle) |i_\alpha \oplus j_\rho, k_\pi\rangle$$

Ya da CNOT matris formunda da çarpım işlemi ile işleme katılabilir.

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\bigcup_{i_\alpha, \rho, \pi=0}^{N-1} i_\alpha \cup j_\rho \cup k_\pi \cup p_n \cup r_m=0} R_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha} \left(\otimes_n \sigma_{p_n} \otimes_m (|r_m\rangle\langle r_m|) \otimes_{\alpha,\rho} |i_\alpha, j_\rho\rangle \right) \otimes_\pi |k_\pi\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\bigcup_{i_\alpha, \rho, \pi=0}^{N-1} i_\alpha \cup j_\rho \cup k_\pi \cup p_n \cup r_m=0} R_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha} H_{2^N} \left(\otimes_n \sigma_{p_n} \otimes_m (|r_m\rangle\langle r_m|) \otimes_{\alpha,\rho} |i_\alpha, j_\rho\rangle \right) \otimes_\pi |k_\pi\rangle$$

CNOT'ın gerçekleştirdiği fonksiyon olarak denkleme katıldığı denklem üzerinden çözüm sonucunda gruplama daha kolay anlatılabilir. Kubit dağılımı aşağıdaki gibidir.

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\bigcup_{\alpha,\rho,\pi=0}^{N-1} i_\alpha \cup j_\rho \cup k_\pi=0} \underbrace{\left(\otimes_{\alpha,\rho} (H_{2^N} |i_\alpha\rangle)_X \otimes |i_\alpha \oplus j_\rho\rangle_X \right)}_{\text{Emir}} \otimes \underbrace{\left(\otimes_\pi R_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha} |k_\pi\rangle_Y \right)}_{\text{Yunus}}$$

Belirtildiği gibi X noktasında gözleme tabi tutulan durumun parantezine alınarak Y noktasına ışınlanacak durum için gerekli kuantum mantık kapıları saptanacaktır.

2.3. M-Hedef için Genelleme

Çalışmanın bu bölümünde, yukarıda anlatılan ışınlama protokollerinin birden fazla hedef için genellenmesi sunulacaktır.

2.3.1. Zeynep'in Durumunun Genelleştirilmesi

Tek hedefe ışınlamada Z noktasından gönderilecek küme durumları X ve Y noktalarına eşit sayıda gönderilir. Çok hedefe ışınlamada ise X ve $\bigcup_{i=0}^{M-1} Y_i$ noktaları vardır.

Çok hedefe ışınlamada tıpkı tek hedefe ışınlamada olduğu gibi, N-kubitlik bir durum X noktasına gönderilir. Ayrıca her bir Y noktasına da N-kubitlik durumlar gönderilir. Bütün bu Y noktalarına giden durumlar ve X noktasına giden durum Z noktasından dolaşık hale getirilerek (küme durumu) gönderilmişlerdir. Böylece X noktasında yapılacak gözlem ile Y noktalarına klasik kanaldan bilgi aktarılacak ve hepsinin kendisine Z noktasından gönderilen duruma göre gerekli kuantum mantık kapısını elindeki duruma etkimesi ile ışınlama sağlanacaktır.

Böylece Z noktasından gönderilecek küme durumu tıpkı Bell durumlarında olduğu gibi farklı gruplara ayrılmalıdır ama genel olarak her gruptan birer temsilcinin toplanması ile aşağıdaki durum elde edilmelidir.

$$|Z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} \sum_{\bigcup_{\mu=0}^M \bigcup_{\nu=0}^{N-1} i_\nu(\mu)=0} \otimes_\mu \otimes_\nu |i_\nu(\mu)\rangle$$

Bunun dışında her grubun ayrı yapısı aşağıdaki gibi olmalıdır.

$$|Z_\tau\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} \sum_{\substack{\bigcup_{\mu=0}^M \bigcup_{\nu=0}^{N-1} i_\nu(\mu)=0 \\ i_\nu(\mu,\tau) + i_{N-\nu+1}(M-\mu+1,\tau)=1}} \otimes_{\mu,\tau} \otimes_\nu |i_\nu(\mu,\tau)\rangle$$

Şimdilik karmaşık görünüşün azaltılması için her gruptan birer temsilcinin toplandığı durum işlemlere katılacaktır ama her grubun ayrı işleme katılması ve her durum ve her grup ve

grubun her üyesi için ayrı işlem yapılması doğru olacaktır.

2.3.2. M-Hedef için Genelleştirilmiş Işınlama (Telenakil)

[2.2.3.] de yapılan işlem çok hedef için yapılacaktır. Bunun için Zeynep'in dağıtacağı durumun genelleştirilmesi yeterlidir. Bunun dışındaki tek fark ise gerekli kuantum mantık kapılarının yazılması sırasında ortaya çıkacaktır.

ψ_3 durumunu elde edilir.

$$|\psi_1\rangle = \left(\sum_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha=0}^1 R_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha} \otimes |i_\alpha\rangle \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} \sum_{\bigcup_{\mu=0}^M \bigcup_{\nu=0}^{N-1} j_\nu(\mu)=0} \otimes_{\mu} \otimes_{\nu} |j_\nu(\mu)\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} \sum_{\bigcup_{\mu=0}^M \bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha \cup j_\nu(\mu)=0} R_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha} \otimes_{\mu} \otimes_{\alpha,\nu} |i_\alpha, j_\nu(\mu)\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} \sum_{\bigcup_{\mu=1}^M \bigcup_{\alpha,\nu=0}^{N-1} i_\alpha \cup j_\nu(\mu) \cup j_\nu(0)=0} R_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha} \otimes_{\mu} \otimes_{\alpha,\nu} |i_\alpha, i_\alpha \oplus j_\nu(0), j_\nu(\mu)\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} \sum_{\bigcup_{\mu=1}^M \bigcup_{\alpha,\nu=0}^{N-1} i_\alpha \cup j_\nu(\mu) \cup j_\nu(0)=0} R_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha} \otimes_{\mu} \otimes_{\alpha,\nu} (H_{2^N} |i_\alpha\rangle) |i_\alpha \oplus j_\nu(0), j_\nu(\mu)\rangle$$

Kubit dağılımı aşağıdaki gibidir.

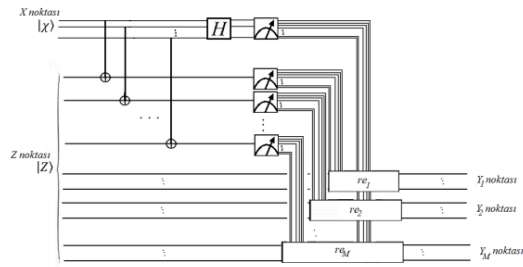
$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} \sum_{\bigcup_{\mu=1}^M \bigcup_{\alpha,\nu=0}^{N-1} i_\alpha \cup i_\nu(\mu) \cup i_\nu(0)=0} H_{2^N} \otimes_{\alpha,\nu} \left(\frac{|i_\alpha\rangle_X \otimes |i_\alpha \oplus j_\nu(0)\rangle_X}{X} \right) \otimes \left(\frac{\otimes_{\mu} R_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha} |j_\nu(\mu)\rangle_{Y_\mu}}{Y = \bigcup_{\mu=1}^M Y_\mu} \right)$$

Yukarıda bahsedilen X noktasında gerçekleştirilecek ölçüme bağlı olarak farklı ilerleyebilecek süreç Y noktalarında gerekli kuantum mantık kapılarının uygulanması olacaktır. Her bir Y_μ , kendine Z noktasından gönderilen $j(\mu)$ durumuna göre işlemini gerçekleştirecektir. Ama bu etkimler de her $j(\mu)$ durumu için ayrı N-kubit M=1 ışınlaması yapılmış gibi sonuçlar üretecektir. Anlattığım durum örneklerde daha iyi anlaşılacaktır.

Son ψ_3 denklemi N-kubit için bir genelleştirmedir. Yukarıda bahsedildiği üzere fiziksel sistemin genellenmesi ve denkleme eklenmesi ile aşağıdaki denklem elde edilir.

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!} \sqrt{2^{N+1}}} \sum_{\bigcup_{\mu=1}^M \bigcup_{\alpha,\nu=0}^{N-1} i_\alpha \cup j_\nu(\mu) \cup j_\nu(0)=0} R_{\bigcup_{\alpha=0}^{N-1} i_\alpha} \otimes_{\mu} \otimes_{\alpha,\nu} \left(H_N \left(\left(\sum_{\beta=0}^{N-1} \epsilon_\beta P_\beta^\dagger \prod_{\gamma=0}^{N-1} \phi_\gamma^*(r_\gamma) \right) |\psi\rangle \right) |i_\alpha \oplus j_\nu(0), j_\nu(\mu)\rangle \right)$$

Genel ışınlama için devre aşağıdaki gibi çizilebilir.



Şekil 2: Çok(N) kubit-çok(M) hedef ışınlama devre şeması

Figure 2: Multi(N)-qubit multi(M)-target teleportation quantum circuit scheme

2.4. Örüntü ile Kolay Hesaplama

Şu ana kadarki tablolara ve daha çok genel ışınlama denklemine bakarak gerekli mantık kapıların çıktıya göre doğrudan elde edilmesi sağlanabilir.

Öncelikle X noktasından gelen bitlerin gruplanması gerekir.

$$(H_{2^N} |i_\alpha\rangle)_X \otimes |i_\alpha \oplus j_\nu(0)\rangle_X$$

Durumu aşağıdaki gibi gruplanır:

$$K^{ij} \equiv K^{\cup_{\alpha,v=0}^{N-1} i_{\alpha} j_v} = \bigcup_{\alpha,v=0}^{N-1} (i_{\alpha}, i_{\alpha} \oplus (i_{\alpha} \oplus j_v(0)))$$

Buradaki sıralı ikililerin kümesi(K) N kubit için N tane doğal sayı elemana sahip olan bir kümeye dönüşecektir.

$$k^{ij} = \sum_{s=0}^N 2^s K_s^{ij}$$

Mantık kapıları elde edilebilir.

$$re_{\alpha,v} = \sum_{\cup_{\alpha,v=0}^{N-1} k^{ij}}$$

$$\widehat{re} = \sum_{i_{\alpha} j_v=0}^1 \sum_{\cup_{\alpha,v=0}^{N-1} k^{ij}}$$

$$re_{\alpha,v} = \sum_{\cup_{\alpha,v=0}^{N-1} k^{ij}} =$$

$$\sum_{\cup_{\alpha,v=0}^{N-1} \sum_{s=0}^N 2^s (i_{\alpha} i_{\alpha} \oplus (i_{\alpha} \oplus j_v(0)))_s}$$

bağıntısından tek kubit için kontrol edilebilir. Bu bağıntıdan elde edilecek tablo aşağıda verilmiştir.

Table 2: Örüntü ile hesaplanan tek kubit tek hedef ışınlanmasında sonuç bitlerine göre yapılması gereken işlemler

Table 2: Necessary operations (calculated via pattern) on one-qubit one-target teleportation for result bits

Emir'in Sonucu	Yunus'un İşlemi
00	Σ_0
01	Σ_1
10	Σ_3
11	Σ_2

Bunun doğru tablo olduğunu anlayabiliriz.

İki kubit için aşağıdaki tablo elde edilir.

Table 3: Örüntü ile hesaplanan iki kubit tek hedef ışınlanmasında sonuç bitlerine göre yapılması gereken işlemler

Table 3: Necessary operations (calculated via pattern) on two-qubit one-target teleportation for result bits

Emir'in Sonucu	Yunus'un İşlemi
0000	Σ_{00}
0001	Σ_{01}
0010	Σ_{10}
0011	Σ_{11}
0100	Σ_{03}
0101	Σ_{02}
0110	Σ_{13}
0111	Σ_{12}
1000	Σ_{30}
1001	Σ_{31}
1010	Σ_{20}
1011	Σ_{21}
1100	Σ_{33}
1101	Σ_{32}
1110	Σ_{23}
1111	Σ_{22}

Bu tablonun doğruluğunun kanıtlanması için [Örnek 1] 'e bakılabilir.

3. Bulgular

Çalışmanın bu kısmında, yukarıda anlatılan protokoller dahilinde bazı örnekler verilecektir. Daha fazla sayıda kubit ya da hedef durumları için proje çalışması ekinde sunulan Python kodundan faydalanılabilir. Elde edilen bulgular sunulan teorik çerçeve ile uyumludur ve hazırlanan Python kodlarının buradaki bulguları türettiği görülmüştür.

3.1. Örnek 1: İki Kubit - Tek Hedef Işınlaması (N=2, M=1)

Genel denklem elde edildikten sonra örnekler birer doğrulama aracı görevi görecekler. Denklemde yerleştirme ve çözme, sonrasında zaten var olan çalışmaların sonuçları ile karşılaştırma yapılması ile doğrulama sağlanabilir. N=2 ve M=1 için $|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{N+1}}} \sum_{\mu=1}^M \sum_{\alpha,v=0}^{N-1} i_{\alpha} \cup j_v(\mu) \cup j_v(0)=0 R_{i_{\alpha}=0}^{N-1} i_{\alpha} \otimes_{\mu} \otimes_{\alpha,v} (H_N |i_{\alpha}\rangle) |i_{\alpha} \oplus j_v(0), j_v(\mu)\rangle$ denklemi yazılacak olursa:

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{i_0, i_1, j_v(1), j_v(0)=0}^1 R_{i_0, i_1} (H_4 |i_0, i_1\rangle) |i_0 \oplus j_0(0), i_1 \oplus j_1(0), j_v(1)\rangle$$

Gerekli kuantum mantık kapıları tablosu:

Tablo 4: İki kubit tek hedef ışınlanmasında sonuç bitlerine göre yapılması gereken işlemler

Table 4: Necessary operations on two-qubit one-target teleportation for result bits

Emir'in Sonucu	Yunus'un İşlemi
0000	Σ_{00}
0001	Σ_{01}
0010	Σ_{10}
0011	Σ_{11}
0100	Σ_{03}
0101	$i\Sigma_{02}$
0110	Σ_{13}
0111	$i\Sigma_{12}$

1000	Σ_{30}
1001	Σ_{31}
1010	$i\Sigma_{20}$
1011	$i\Sigma_{21}$
1100	Σ_{33}
1101	$i\Sigma_{32}$
1110	$i\Sigma_{23}$
1111	Σ_{22}

Tabii bu Z noktasından gönderilen durumun $\frac{|0000\rangle + |1111\rangle + |0101\rangle + |1010\rangle}{2}$ grubu olarak seçilmesi üzerine elde edilir. Bunun dışında diğer gruplar için de sonuçlar, önceki çalışmaların sonuçları ile örtüşmektedir[3].

3.2. Örnek 2: İki Kubit - İki Hedef Işınlaması (N=2, M=2)

Bu örnek için ortaya çıkacak gerekli kuantum mantık kapıları tablosu üzerinden [2.3.2.] kısımda geçen "bu etkimeler de her $j(\mu)$ durumu için ayrı N-kubit M=1 ışınlaması yapılmış gibi sonuçlar üretecektir" ifadesi daha iyi anlaşılacaktır.

Genel denkleme N=2 ve M=2 olarak yazılması ile aşağıdaki denklem elde edilir.

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{i_0, i_1, j_0(0), j_1(0), j_0(1), j_1(1), j_0(2), j_1(2)=0}^1 R_{i_0, i_1} (H_4 |i_0, i_1\rangle) |i_0 \oplus j_0(0), i_1 \oplus j_1(0)\rangle |j_0(1), j_1(1), j_0(2), j_1(2)\rangle$$

Denklemin çözümüne göre gerekli kuantum mantık kapılarının listesi elde edilir.

Tablo 5: Üç kubit iki hedef ışınlanmasında sonuç bitlerine göre yapılması gereken işlemler**Table 5:** Necessary operations on three-qubit two-target teleportation for result bits

Emir'in Sonucu	Y_1 işlemi	Y_2 işlemi
0000	Σ_{00}	Σ_{00}
0100	Σ_{03}	Σ_{03}
1000	Σ_{30}	Σ_{30}
1100	Σ_{33}	Σ_{33}
0011	Σ_{11}	Σ_{11}
0111	$i\Sigma_{12}$	$i\Sigma_{12}$
1011	$i\Sigma_{21}$	$i\Sigma_{21}$
1111	Σ_{22}	Σ_{22}
0010	Σ_{10}	Σ_{10}
0110	Σ_{13}	Σ_{13}
1010	$i\Sigma_{20}$	$i\Sigma_{20}$
1110	$i\Sigma_{23}$	$i\Sigma_{23}$
0001	Σ_{01}	Σ_{01}
0101	$i\Sigma_{02}$	$i\Sigma_{02}$
1001	Σ_{31}	Σ_{31}
1101	$i\Sigma_{32}$	$i\Sigma_{32}$

Tablolara bakılarak açıkça söylenebilir ki Y noktalarının her birinde gerekli işlemler her $j(\mu)$ durumu için ayrı 2-kubit $M=1$ ışınlaması için gereken işlemler ile aynıdır.

Buradan da çıkarımla ilginç bir sonuca ulaşılır. Çoklu hedefe ışınlamadaki Emir'in ve Yunusların her birinin yaptığı iş, tek hedefe ışınlama ile aynıdır. Yaptığı iş değişen tek kişi Zeynep'tir.

Emir her zaman Z noktasından gönderilen N-kubit ile kendi durumunu dolaşık hale getirir ve her zaman aynı genel CNOT uygular ve her

zaman Hadamard kapısını kullanır ve her zaman gözlem yapar ve klasik kanalla bilgi aktarımı yapar. (Her Bir Y noktasındaki Yunus için) Her Yunus X noktasından klasik kanalla aktarılan bilgiye göre Z noktasından gönderilmiş olan N-kubit üzerine işlem yapar ve ışınlamayı sağlamış olur. Zeynep ise hedef sayısı(M) ve X noktasına gidecek kubitler için N-kubitlik $M+1$ tane sistemi dolaşık olarak üretir ve X,Y noktalarına bilgi verir.

4. Tartışma ve Sonuç

Çalışma kapsamında, kuantum ışınlanma protokolünün çok kubit içeren duruma genellenmesi incelenmiş ve birden fazla hedefe ışınlanma protokolü oluşturulmuştur. Çok kubit içeren sistemlerde söz konusu protokolleri uygulamak, işlemlerin sayısının artmasından kaynaklı olarak bazı zorluklar içermektedir. Bu nedenle çok kubitli durum için Python programlama dilinde bilgisayar kodları oluşturulup, doğruluğu test edilmiştir.

Bunun yanında çok hedefe ışınlama amacına yönelik olarak bir teorik çerçeve önerilmiş, bu teorik çerçeve dahilindeki karmaşık işlemleri için de Python programlama dilinde bilgisayar kodları oluşturulmuştur. Önerilen teorik çerçeve ile, görece az sayıda kubit ve hedef içeren sistemler için protokoller analitik olarak işletilmiş ve sonuçlar elde edilmiştir. Bu örnekler için elde edilen sonuçların, oluşturulan Python kodu ile de elde edilebiliyor olması, oluşturulan kodun doğru çalıştığının bir göstergesidir.

Yüksek sayıda kubit ya da hedef içeren sistemler için, çalışma kapsamında oluşturulan Python bilgisayar kodlarının kullanılması, karmaşık sistemler için ışınlanma protokollerinin işletilmesini sağlayacaktır.

M hedef için durumlar için telenakil protokolü sayesinde aynı kuantum durumu, Zeynep'in durumları aracılığı ile birden fazla sayıda oluşturulabilecektir. Bu durumda bir tür *kuantum durumu çoğaltma protokolü* de oluşturulmuş olmaktadır. Bu işleyiş ile bilinmeyen bir kuantum bit durumunu farklı

konumlarda yeniden oluşturularak çoğaltılmış olunacaktır. Bu protokol klonlamayı sağlamayacaktır ki sağlanması da kuantum mekaniği ilkeleri gereği mümkün değildir (No-cloning theorem).

5. Discussion and Conclusion

In this study, the quantum teleportation protocol and its generalization for multi qubits was examined and a potential multi-target teleportation protocol suggested. Computing in multi-qubit systems has some difficulties because of increase in the number of operations. We wrote code for multi-qubit logic gate computation in Python.

In addition, a theoretical framework proposed for multi-target teleportation suggested and computer codes created in the Python. With the proposed theoretical framework, protocols for systems with few qubits and targets have been run analytically and results have been obtained.

For systems with a high number of qubits (or targets), the use of Python computer codes will enable the control of teleportation protocols for complex systems.

Kaynakça

- [1] Bennett, C.H., Brassard, G., Crépeau, C., Jozsa, R., Peres, A., Wootters, W.K.,1993,"Teleporting an unknown quantum state via dual classic and Einstein–Podolsky–Rosen channels", Phys. Rev. Lett. 70, 1895–1899
- [2] Ikram, M., Zhu, S.Y., Zubairy, M.S.,2000, "Quantum teleportation of an entangled state" Phys. Rev. A. 62, 022307
- [3] Rigolin, G. ,2005, "Quantum teleportation of an arbitrary two-qubit state and its relation to multipartite entanglement", Phys. Rev. A. 71, 032303
- [4] Yang, C.P., Guo, G.C. ,2000, " Multiparticle generalization of teleportation" Chin. Phys. Lett. 17, 162–164
- [5] Lee, J., Min, H., Oh, S.D. ,2002, " Multipartite entanglement for entanglement teleportation", Phys. Rev. A. 66,052318
- [6] Cheung, C.Y., Zhang, Z.J. ,2009, " Criterion for faithful teleportation with an arbitrary multiparticle channel", Phys.Rev. A. 80, 022327
- [7] Zhao,M.J., 2011," Faithful teleportation with arbitrary pure or mixed resource states" J. Phys. AMath. Theor.44, 215302
- [8] Praksh, H., Verma, V.,2012,"Minimum assured fidelity and minimum average fidelity in quantum teleportation of single kubit using non-maximally entangled states", Quantum Inf. Process. 11, 1951–1959

In the teleportation protocol for the states for the M target (multi-target quantum teleportation), the same quantum state can be created more than once via Zeynep's states. In this case, a quantum state "replication protocol" is also suggested. With this operation, a quantum state will be reproduced by recreating it in different locations. This protocol will not provide cloning, which is not possible due to the principles of quantum mechanics (No-cloning theorem).

5. Etik kurul onayı ve çıkar çatışması beyanı

Makale, teorik kuantum hesaplama üzerinedir. Makale hazırlanırken herhangi bir canlı içeren, etik kurul kararı/izni gerektirecek bir faaliyette bulunulmamıştır. Hazırlanan makalede etik kurul izni alınmasına gerek yoktur.

Makale tek yazar tarafından yazılmıştır. Hazırlanan makalede herhangi bir kişi/kurum ile çıkar çatışması bulunmamaktadır

- [9] Meng, Q., Long, X.S., Yue, Z.X.,2012," Standard teleportation of one-qubit state and partial teleportation of two-qubit state via X-state" Commun. Theor. Phys. 57, 201–204
- [10] Verma, V., Prakash, H. ,2016," Standard quantum teleportation and controlled quantum teleportation of arbitrary N-qubit information state" Int. J. Theo. Phys. 55, 2061–2070
- [11] Cai, T., Jiang, M.,2018," Improving the teleportation scheme of three-qubit state with a four-qubit Quantum Channe", Int. J. Theor. Phys. 57, 131–137
- [12] Karlson, A., Bourennane, M.,1998," Quantum teleportation using three-particle entanglement" Phys. Rev. A. 58, 4394–4400
- [13] Yang, C.P., Chu, S.L., Han, S. ,2007," Efficient many-party controlled teleportation of multikubit quantum information via entanglement" Phys. Rev. A. 70, 022329
- [14] Man, Z.X., Xia, Y.J., An, N.B. ,2007," Genuine multikubit entanglement and controlled teleportation" Phys. Rev. A. 75, 052306
- [15] Yan, F., Wang, D.,2003," Probabilistic and controlled teleportation of unknown quantum states", Phys. Lett. A. 316, 297–303
- [16] Dong, J., Teng, J.F. ,2008," Controlled teleportation of an arbitrary n-qudit state using non-maximally entangled GHZ states", Eur. Phys. J. D. 49, 129–134
- [17] Nie, Y.Y., Hong, Z.H., Huang, Y.B., Yi, X.J., Li, S.S.,2009," Non-maximally entangled controlled

- teleportation using four particles kubit states", *Int. J. Theor. Phys.* **48**, 1485–1490
- [18] Shi, R.H., Huang, L.S., Yang, W., Zhong, H., 2011, "Controlled quantum perfect teleportation of multiple arbitrary multi-kubit states", *Sci. China* **54**, 2208–2216
- [19] Li, Y.H., Li, X.L., Nie, L.P., Sang, M.H., 2016, "Quantum teleportation of three and four-kubit state using multi-kubit kubit states", *Int. J. Theor. Phys.* **55**, 1820–1823
- [20] Li, Y.H., Sang, M.H., Wang, X.P., Nie, Y.Y., 2016, "Quantum teleportation of a four-kubit state by using six-kubit kubit state", *Int. J. Theor. Phys.* **55**, 3547–3550
- [21] Cao, L., Xue, S., Jiang, M., 2020, "Teleportation of an unknown four-kubit kubit state based on kubit states with minimum resource", *IEEE Access* **8**, 81447–81457
- [22] Li, M., Zhao, N., Chen, N., Zhu, C.H., Pei, C.X., 2017, "Quantum teleportation of five-kubit state", *Int. J. Theor. Phys.* **56**, 2710–2715
- [23] Yang, Y., Jiang, M., Zhou, L.L., 2018, "Improving the teleportation scheme of five-kubit state with a seven-kubit Quantum Channel", *Int. J. Theor. Phys.* **57**, 3485–3491
- [24] Choudhury, B.S., Dhara, A., Samanta, S., 2017, "Teleportation of five-kubit state using six-kubit state", *Phys. Part. Nucl. Lett.* **14**, 644–646
- [25] Bouwmeester, D., Pan, J.W., Mattle, K., Eibl, M., Weinfurter, H., Zeilinger, A., 1997, "Experimental quantum teleportation", *Nature (London)* **390**, 575–579
- [26] Boschi, D., Branca, S., Martini, F.D., Hardy, L., Popescu, S., 1998, "Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels", *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1121–1125
- [27] Furusawa, A., Sorensen, J.L., Braunstein, S.L., Fuchs, C.A., Kimble, H.J., Polzik, E.S., 1998, "Unconditional quantum teleportation", *Science* **282**, 706–709
- [28] Lee, H.W., 2001, "Total teleportation of an entangled state", *Phys. Rev. A* **64**, 014302
- [29] Verma, V., Singh, N., Singh, R.S., 2021, "Improvement on Quantum Teleportation of Three and Four Kubit States Using Multi-Kubit Kubit States", *Int. J. Theor. Phys.* **60**, 3973–3981
- [30] Li, M., Zhao, N., Chen, N., Zhu, C.H., Pei, C.X., 2018, "Quantum teleportation of eight-kubit state via six-kubit kubit state", *Int. J. Theor. Phys.* **57**, 516–522
- [31] Sang, M.H., 2016, "Bidirectional quantum teleportation by using five-kubit kubit state", *Int. J. Theor. Phys.* **55**(3), 1333–1335
- [32] Li, Y.H., Jin, X.M., 2016, "Bidirectional controlled teleportation by using nine-kubit entangled state in noisy environments", *Quantum. Inf. Process.* **15**(2), 929–945
- [33] Fatahi, N., Naseri, M., 2021, "Quantum teleportation of a N-kubit entangled state by using a (N+1)-kubit kubit state", *Quantum. Inf. Process.* **20**, 367
- [34] Jin, X.M., Ren, J.G., Yang, B., Yi, Z.H., Zhou, F., Xu, X.F., Wang, S.K., Yang, D., Hu, Y.F., Jiang, S., Yang, T., Yin, H., Chen, K., Peng, C.Z., Pan, J.W., 2010, "Experimental free-space quantum teleportation", *Nat. Photonics* **4**, 376–381
- [35] Metcalf, B.J., Spring, J.B., Humphreys, P.C., Thomas-Peter, N., Barbieri, M., Kolthammer, W.S., Jin, X.M., Langford, N.K., Kundys, D., Gates, J.C., Smith, B.J., Smith, P.G.R., Walmsley, I.A., 2014, "Quantum teleportation on a photonic chip", *Nat. Photonics* **8**, 770–774
- [36] Duan, Y., Zha, X., Sun, X., Xia, J., 2014, "Bidirectional quantum controlled teleportation via a maximally seven-kubit entangled state", *Int. J. Theor. Phys.* **53**, 2697–2707
- [37] Cohn, J.H.E., 1965, "Hadamard matrices and some generalisations", *Amer. Math. Monthly*, **72**:515–518
- [38] Hedayat, A., Wallis, W.D., 1978, "Hadamard matrices and their applications", *The. Annals. of. Statistics.* **6**, 1184–1238
- [39] Rakotonirina, C., Rasamizafy, S., 2016, "3x3 Kronecker pauli matrices", *A Peer Reviewed International Research Journal.* **6**, 127–134
- [40] Rakotonirina, C., 2018, "Rectangle gell-mann matrices", *Institut Sup'erieur de Technologie d'Antananarivo IST-T*, BP 8122
- [41] Yang, C. P., Chu, S. I., Han, S., 2005, "Efficient many-party controlled teleportation of multi-kubit quantum information via entanglement", *arXiv:quant-ph/0402138v2*
- [42] Bolokian, M., Housmand, M., Sadeghizadeh, M. S., Parvaneh, M., 2020, "Multi-Party Quantum Teleportation with Selective Receiver", *Int. J. Theor. Phys.* **60**, 828–837