MSU Fen Bil. Dergi., 10:1 939-942, 2022 MSU J. of Sci., 10:1 939-942, 2022
Araştırma Makalesi/ Research Article

Bulanık ve Bulanık Olmayan Halkaların Çekirdeği

Mikail BAL[1]

[1]Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Gaziantep Üniversitesi, Gaziantep, Türkiye

: mikailbal46@hotmail.com, [1] 0000-0002-7489-8605

Geliş (Received): 11.03.2022 Düzeltme (Revision): 19.04.2022 Kabul (Accepted): 21.04.2022

ÖZ

Bu makalede, daha önceden çalışılmış olan bulanık kavramını kullanarak, sırasıyla bir bulanık halka, bulanık olmayan halkanın çekirdeği ve alt halka kavramını tanımlanmıştır. Ayrıca, bu çekirdeklerin sıradan cebirsel anlamda halkalar ile aynı özelliklere sahip olduğunu göstermenin yanı sıra, bulanık halkalar ve bulanık olmayan halkalar hakkında temel bilgiler verilmektedir. Çalışmanın giriş kısmında asıl konumuz olan Bulanık ve Bulanık Olmayan Halkaların Çekirdeği ile ilgili temel oluşturan; klasik grup ve halkalar ile ilgili tanımların yanı sıra bulanık mantığın tanımı verilmiştir. Ana kısımda ise konumuz gerekli tanımlamalar ve teoremler verilerek ispatlanmıştır. Ayrıca konu ile ilgili gerekli örnekler verilerek konu açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık halka, bulanık çekirdek, bulanık olmayan halka, bulanık olmayan çekirdek

The Kernel Of Fuzzy and Anti-Fuzzy Rings

ABSTRACT

In this article, using the previously studied fuzzy concept, the concept of a fuzzy ring, the kernel of the anti-fuzzy ring, and the subring are defined, respectively. We have shown that these kernels have the same properties as rings in the ordinary algebraic sense. Also, basic information about fuzzy rings and anti-fuzzy rings is given. In the introductory part of the study, our main topic, Fuzzy and anti-fuzzy ring kernel, which forms the basis; definitions of fuzzy logic are given as well as definitions of classical groups and rings. In the main part, our subject has been proved by giving necessary definitions and theorems. In addition, the subject is explained by giving necessary examples related to the subject.

Keywords: Anti-fuzzy kernel, anti-fuzzy ring, fuzzy kernel, fuzzy ring

GİRİŞ

Bulanık mantık ilk olarak, 1965 yılında, Lütfi Ali Askerzade tarafından yapılan çalışmaları "Information and Control" dergisinde "Fuzzy Sets" başlığıyla yayınlanmasıyla başlamıştır [1]. Yapılan bu çalışmalar sınıflandırma alnında kolaylık sağlamıştır. Örneğin; bir sınıftaki öğrencileri boylarına göre sınıflandıracak olursak; en uzun öğrencinin boyunu 1 olarak, en kısa öğrencinin boyunu 0 olarak kabul edelim. Diğer öğrencilerin boyunu da bu iki öğrenci arasındaki boy farkına göre oranlayarak her öğrencinin boyunun değerini [0,1] (sıfır ve bir kapalı aralığında) olacak şekilde ara değerler kullanarak değerlendirebiliriz. Bu yöntem günümüzde birçok teknolojik alanda bize kolaylık sağlamaktadır. Mesela bir çamaşır makinasının, enerji harcamasını atılan çamaşırın ağırlığına göre ayarlanabilmesi bulanık mantığı kullanılarak ayarlanabilmektedir. Aynı şekilde tıp, robot teknolojisi, yapay zekâ, mekatronik, sosyoloji gibi birçok alanda kullanılmaktadır [2].

MATERYAL ve YÖNTEM

Çalışmada metot olarak daha önce üzerinde çalışılmış olan ve cebir alanının temelini oluşturan, grup, halka, halka çekirdeği, bulanık küme kavramı, bulanık ikili işlemler, bulanık halka kavramları tanımlarını kullanarak yeni bir tanım olan bulanık ve bulanık olmayan halka çekirdeği yapısı tanımlanmıştır. Şimdi ise bu temel yapıların tanımları verilerek, sonrasında ana konu tanımlanacaktır.

Tanım 2.1 G boş olmayan bir küme ve da G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. O zaman;

1) $\forall$ x, y $\in$ G için x · y $\in$ G
2) $\forall$ x, y, z $\in$ G için (x · y) · z = x · (y · z)
3) $\forall$ x $\in$ G için x · e = e · x = x olacak şekilde bir e $\in$ G
4) $\forall$ x $\in$ G için x · y = y · x = e olacak şekilde bir y $\in$ G

Şartları sağlanır ise buna grup denir. Bu şartlara ek olarak.

5) $\forall$ a, b $\in$ G için a · b = b · a

Eşitliği sağlanır ise bu gruba Abelyen (değişmeli) grup denir [3].

Tanım 2.2: R kümesi boş kümeden farklı bir küme ve +, sembollerinde R kümesi üzerinde tanımlı toplama ve çarpma işlemi olsun. O zaman;

1) (R, +) bir abelyen gruptur.

2) ∀ x, y, z ∈ R için x · (y · z) = (x · y) · z dir. (Yani (R,) bir yarı gruptur.)
3) ∀ x, y, z ∈ R için:
x · (y + z) = (x · y) + (x · z)
x + y) · z = (x · z) + (y · z)

Şartları sağlanıyorsa (R, +,) iki cebirsel yapısına bir halka denir. Bunlara ek olarak;

4) ∀ x, y ∈ R için x · y = y · x ise R ye değişmeli halka denir.
5) ∀ x ∈ R için x · e = e · x = x

olacak şekilde bir e ∈ R var ise e ye birim eleman; R ye de birim elemanlı halka denir [4,5].

Tanım 2.3 : R, S iki halka f : R → S bir halka homomorfizması ve S nin birim elemanı e_0 olsun.

Çek(f) = { x ∈ R : f(x) = e0 } = f^{-1}(e0).

kümesine f 'nin çekirdeği denir [6,7].

Not: Çek(f) boş küme olamaz, çünkü f(e) = e0 olduğundan e ∈ Çek(f) olmalıdır.

Tanım 2.4: K kümesi boş kümeden farklı bir küme ve I=[0,1] ⊂R olsun.
f : K→[0,1] fonksiyonu tarafından oluşturulan yeni

M = {(a,f(a)) | a∈K} KI⊂K

kümesine K üzerinde bir bulanık küme denir [8].

Tanım 2.5: H boş kümeden farklı küme ve S:H×H×H→[0,1] olsun ve θ → [0,1) seçilsin. O zaman;

1) ∀ x, y ∈ H icin S(x, y, z) > θ olacak biçimde ∃c ∈ H vardır.
2) ∀ x, y, z_1, z_2 ∈ H için S(x, y, z1) > θ ve S(x, y, z2) > θ ise $z_1 = z_2$ dir.

Şartları sağlanırsa S ye H de bir bulanık ikili işlem denir [9,10].

Tanım 2.6*:* H boş kümeden farklı ve K ile M de, H kümesi üzerinde bulanık ikili işlem olsun. O zaman;

1) (H, K) bir değişmeli bulanık gruptur.
2) ∀ x, y, z, q_1, q_2 ∈ H için

$((x * y) * z)(q_1) > \theta$ ve $(x * (y * z))(q_2) > \theta$
ise $q_1 = q_2$

3) ∀ x, y, z, q_1, q_2 ∈ H için

$((x \circ y) * z)(q_1) > \theta$ ve $((x * z) \circ (y * z))(q_2) > \theta$
ise $q_1 = q_2$ ve
$(x * (y \circ z))(q_1) > \theta$ ve $((x * y) \circ (x * z))(q_2) > \theta$
ise $q_1 = q_2$.

Şartlarını sağladığından (H, K, M) ye bir bulanık halka denir [11,12].

BULGULAR ve TARTIŞMA

Tanım 3.1: H bir halka ve A:H → [0,1] olacak şekilde tanımlı olsun. Eğer H halkası

1. $(xy) \geq min(A(x),A(y))$.
2. Her x,∈G için, $(x^{-1}) = A(x)$

Şartlarını sağlıyor ise H ye bulanık halka denir.

Tanım 3.2: H bir Halka ve B:H → [0,1] kapalı aralığı ile tanımlı olsun. Eğer H halkası

1. $(xy) \leq max(B(x),B(y))$.
2. Her x,∈G için, $(x^{-1}) = B(x)$

Şartlarını sağlar ise H ye bulanık olmayan halka denir.

Tanım 3.3: H bir halka ve A,B:H → [0,1] kapalı aralığı ile tanımlı olsun. Eğer H halkası her x,y∈H için;

1. $A(xy) \geq min(A(x),A(y)), A(x-1)=A(x)$.
2. $B(xy) \leq max(B(x),B(y)), B(x-1)=B(x)$.

Şartlarını sağlar ise o zaman H halkası sezgisel-bulanık halka olarak adlandırılır

Açıklama 3.4: Sezgisel-bulanık halka, bulanık ve bulanık olmayan halka şartlarını sağlar.

Örnek 3.5: H = (Z5∗,.) H halkası bir çarpma modül halkası olsun, Her x∈H için.

$A:G \to [0,1]$; $A(x) = 1$.

$B:G \to [0, 1]$; $B(x) = 1/3$.

ile tanımlanır ise. (G,A,B) sezgisel bulanık halkadır.

Teorem 3.6: H halkası, A:H→[0,1] olan bir bulanık halka olsun, o zaman, her x ∈ H için.

$$A(e) \geq A(x)$$

olur.

Teorem 3.7: .H halkası, B:H→[0,1] olan bir bulanık olmayan halka olsun, o zaman, her x ∈ H için

$$B(e) \leq B(x)$$

olur.

Teorem 3.8: H halkası, A:H→[0,1] ile bir bulanık halka olsun, K H'nin $A(x)$=$A(e)$; her x∈K özelliğine sahip normal bir alt grubu olsun, o zaman bir fonksiyon var A_K:H / K→[0,1], öyle ki (H/K,A_K)bulanık bir halkadır.

İspat : K ' nin normal alt halka olduğundan, H/K 'nin bir halka olur.

$$A_K : H/K \to [0,1]; \begin{cases} \mathbf{Ak(xK) = A(e); x \in K} \\ \mathbf{Ak(xK) = A(x); x \in K} \end{cases}$$

Dönüşümü iyi tanımlı olsun. Kabul edelim ki xK = yK olsun. O zaman xy^{-1}∈K olur.

Öte yandan elimizde $(xy-1)$ = (e) eşitliği var. Buda bize (x) = (y) eşitliğini sağlar. Böylece

$$A_K(xK) = A_K(yK)$$

elde edilir. Şimdi bulanık halka durumunu gösterelim

$A_K(xK)^{-1}$=AK$(x^{-1}$K)=$A(x^{-1})$=$A(x)$=$A_K(xK)$; x∈K.

Ayrıca eğer xy ∉ K için,

$A_K(xK.yK) = A_K(xyK)$=$A(xy) \geq min(A(x), A(y))$=$min(A_K(xK), A_K(yK))$

xy ∈ K için,

$$A_K(x\text{K},y\text{K})=A_K(xy\text{K})=A(e) \geq min(A(x),A(y))=min(A_K(x\text{K}), A_K(y\text{K}))).$$

Olur. Böylece, (G/K, A_K) bulanık halka olur.

Tanım 3.9: (H,A) bir bulanık halka ve K da her x ∈ K için, A(x)=$A(e)$ olacak şekilde bir normal alt halka olsun. O zaman K alt halkasına, H' ye göre A' nın bulanık kapalı normal faktörü denir.

Örnek 3.10: H = (Z_5^*,.) = {1,2,3,4} halkası için. A:H→[0,1] kapalı aralığında,

$$A(1) = A(3)=1, A(2) = A(4) = \frac{1}{2}.$$

olur. O zaman K = {1,3} H' nin normal bir alt grubudur. Ayrıca her $x∈H$ için

$$(x) = (1) = 1$$

olduğundan, K halkası kapalı normal faktördür

Tanım 3.11: (H,A) bir bulanık halka olsun,

$$Q_A = \{x∈H ; A(x) = A(e)\}$$

oluyorsa buna H' nin A ya göre bulanık çekirdeği denir.

Teorem 3.12: Q_A çekirdeği H nin bir alt halkasıdır

İspat : Q_A boş küme değildir. Çünkü $e \in Q_A$ olur. Ayrıca x, y H' nin iki rastgele elemanı olsun, Buradan

$$(x^{-1}) = (x) = (e), \text{ yani } x^{-1} \in Q_A$$

olur.

$$A(xy) \geq min(A(x),A(y)) = min(A(e),A(e)) = A(e).$$

olduğundan $xy \in Q_A$ olur. Buradan Q_A, H' nin bir alt halkasıdır.

Açıklama 3.13: (H,A)'nin bulanık çekirdeği, herhangi bir kapalı normal faktör içerir.

Örnek 3.14: (Z_7^*,.) ={1,2,3,4,5,6} modül 7 ye göre tamsayı halkası olsun.

$$A:\text{H}\to[0,1] ; \begin{cases} \mathbf{A(1) = A(2) = A(4) = \frac{1}{2}} \\ \mathbf{A(3) = A(5) = A(6) = \frac{1}{4}} \end{cases}$$

Şeklinde tanımlansın. O zaman Q_A ={1,2,4} H' nin bir alt halkasıdır.

Teorem 3.15: (H,A) bulanık halka ve Q_A bulanık çekirdek olsun. O zaman:

1. ∀ h∈H,∈ Q_A:A(hxh^{-1}) ≥ A(h).
2. Eğer Q_A normal alt halka ise, o zaman ∀h ∈ H ve x∈Q_A için,A(hx) = A(h) olur.

İspat: 1. (hxh^{-1}) ≥ $min(A$(h), $A(x)$, A(h^{-1})) = $min(A$(h), $A(e)$) = A(h).

2. Q_A normal olduğundan tüm x∈ Q_A ve h∈H için hxh^{-1}∈ Q_A olur. Buradan, (hxh^{-1}) = $A(e)$ eşitliğini sağlanır. Böylece (hx) = A(h) olur.

Teorem 3.16: H kümesi B:H→[0,1] olacak şekilde bulanık olmayan halka ve K da H'nin ∀$x∈H$ için $B(x)$ = $B(e)$; özelliğine sahip normal bir alt halka olsun. o zaman B_K:H⁄ K→[0,1] bir fonksiyon vardır, böylece (H/K,B_K) bulanık halkadır.

İspat: K' normal alt halka olduğundan, H/K' nin bir halka olur.

$$B_K:\text{H/K}\to[0,1]; \begin{cases} \mathbf{Bk(xK) = B(e); x \in K} \\ \mathbf{Bk(xK) = B(x); x \in K} \end{cases}$$

$B_{K,}$ dönüşümü iyi tanımlıdır. Kabul edelim ki, xK = yK olsun, o zaman xy^{-1}∈K olur.

Öte yandan, (xy^{-1}) = (e) olduğundan, (x)=$B(y)$ dir. Böylece $B_K(x\text{K}) = B_K(y\text{K})$ olur.

Şimdi, bulanık olmayan halka şartını göstermeliyiz:

$B_K(x\text{K})^{-1} = B_K(x^{-1}\text{K}) = B(x^{-1})=B(x) = B_K(x\text{K}); x \in$ K.

Ayrıca, Eğer x∉K ise B_K (xK.yK) = B_K (xyK) = (xy) ≤ ($B(x)$,$B(y)$) = $max(B$K(xK),BK (yK))

Eğer xy∈K ise, B_K (xK.yK) = BK(xyK) = $B(e)$ ≤ $max(B(x)$,$B(y)$) = $max(B$K(xK), BK(yK)).

Böylece,(H/K, B_K) bir bulanık olmayan halkadır.

Tanım 3.17: (H,B) bulanık olmayan halka olsun, K kümesi Her x∈K için, (x) = (e) olacak şekilde normal alt halka olsun. O zaman K' ye, B' ye göre H' nin bulanık olmayan kapalı normal faktörü denir.

Örnek 3.18: H = (Z_5^*,.) = {1,2,3,4} ele alalım. B:H→[0,1] aralığınıda

$$B(1) = B(3) = \frac{1}{2}, B(2) = B(4) = 1$$

olacak şekilde tanımlayalım. Elimizde K = {1,3} H' nin normal bir alt halkasıdır. Her x∈K için (x) = (1) = 1 olduğundan dolayı K kapalı normal faktördür.

Tanım 19: (H,B) anti bulanık halka olsun, H' nin bulanık çekirdeğini B' ye göre

$$Q_B = \{x∈;(x) = B(e)\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.20: Q_B çekirdeği H halkasının bir alt halkasıdır.

İspat: Q_B boş değildir, çünkü $e∈K_B$ dır. x,, H' nin iki keyfi elemanı olsun. (x^{-1}) = (x) = (e) olduğundan x^{-1}∈Q_B olur.

$$B(xy) \leq max(B(x),B(y)) = max(B(e),B(e)) = B(e)$$

olduğundan dolayı $xy \in Q_B$ olur ve Q_B, H' nin bir alt grubudur.

Açıklama 3.21: (H,B)'nin anti bulanık çekirdeği herhangi bir kapalı normal faktör içerir.

Örnek 3.22: (Z_7^*,.) = {1,2,3,4,5,6} modul 7 de çarpımsal tamsayılar halkası olsun.

$$B:\text{H}\to[0,1]; \begin{cases} \mathbf{B(1) = B(2) = B(4) = \frac{1}{4}} \\ \mathbf{B(3) = B(5) = B(6) = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

Dönüşümünün çekirdeği Q_B = {1,2,4} olur, o zaman

Q_B, H' nin bir alt halkasıdır.

Teorem 3.23: (H,B) bulanık olmayan halka olsun, Q_B onun bulanık olmayan çekirdeği olsun. O zaman

1.$\forall$ h $\in$ H, $\in Q_B$: $B(\text{h}x\text{h}^{-1}) \leq B(\text{h})$.

2. Eğer Q_B normal ise, her h $\in$ H, ve $x \in Q_B$ için, (hx) = (h) olur.

İspat: 1. (hxh^{-1}) $\leq$ (B(h), $B(x)$, B(h^{-1})) = max(B(h), $B(e)$) = B(h) olur.

2. Q_B ' nin normal olduğundan dolayı her $x \in Q_B$ ve h$\in$H için hxh$^{-1} \in Q_B$ olur.

Bu gösteriyor ki, (hxh^{-1}) = (e) dir, Buradan (hx) = (h) olur.

SONUÇ

Bu çalışmada, bir bulanık halkanın bulanık çekirdeği ve bir bulanık halkanın bulanık olmayan çekirdeği kavramını tanımlandı. Bu çekirdeklerin klasik cebirsel anlamda alt halkaların tüm özelliğini sağladığını göstererek ispatlandı. Ayrıca üzerinde çalıştığımız bu konu hakkında gerekli tanım ve teoremlerin yanı sıra bunların uygulamaları adına gerekli örnekler sunulmuştur. Bu çalışma ilerideki araştırmacılara yol göstermesi umut edilerek hazırlanmıştır.

KAYNAKÇA

[1] Das P.S. Fuzzy groups and level subgroups. Journal of mathematical analysis and applications, 84:1 264-269, 1981.

[2] Palaniappan N., Naganathan S., Arjunan K. A study on intuitionistic L-fuzzy subgroups, Applied Mathematical Sciences, 3:53 2619-2624, 2009.

[3] Mukherjee N.P., Bhattacharya P. Fuzzy groups: some group-theoretic analogs, Information sciences, 39:3 247-267, 1986.

[4] Abobala M. On The Characterization of Maximal and Minimal Ideals In Several Neutrosophic Rings, Neutrosophic Sets and Systems, 2021.

[5] Abobala M. A Study of Nil Ideals and Kothe's Conjecture in Neutrosophic Rings, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2021.

[6] Gupta K.C., Sarma B.K. Nilpotent fuzzy groups, Fuzzy sets and systems, 101:1 167-176, 1999.

[7] Liu W.J. Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals. Fuzzy sets and Systems, 8:2 133-139, 1982.

[8] Mukherjee N.P. Bhattacharya P. Fuzzy groups: some group-theoretic analogs, Information sciences, 39:3 247-267, 1986.

[9] Malik D.S., Mordeson J.N., Nair P.S. Fuzzy normal subgroups in fuzzy subgroups, Journal of the Korean Mathematical Society, 29:1 1-8, 1982.

[10] Šešelja B., Tepavcevic A. Fuzzy groups and collections of subgroups, Fuzzy Sets and Systems, 83:1 85-91, 1996.

[11] Yuan X., Lee E.S. Fuzzy Group Based on Fuzzy Binary Operation, Computers Math. Appl., 47 631-641, 2004.

[12] Mordeson J.N., Malik D.S. Fuzzy commutative algebra, World Scientific, 1998.

[13] Ahmad K., Bal M., Aswad M. The Kernel of Fuzzy and Anti-Fuzzy Groups, Journal of Neutrosophic and Fuzzy Systems, 2022.