



Kantil Regresyon Modellerinde Uyum İyiliği Ölçüleri ve Model Seçimi

Şaban KIZILARSLAN

Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi / Araştırma Görevlisi

saban.kizilarслан@marmara.edu.tr

Orcid No: 0000-0003-1545-9597

Özet

Bu çalışmada kantil regresyon modellerinde uyum iyiliği ve model seçimi için kullanılan kriterlerden öne çıkanlar bir arada sunulmuştur. Bu kriterler belirlilik oranına (R^2) benzer bir ölçü olan R^1 oranı, C^1 testi, asimetrik ağırlıklandırılmış ortalama mutlak hata (ATWE) ile Akaike (AIC) ve Schwarz (BIC) bilgi kriterleridir. Ayrıca etkinliklerinin artırılması amacıyla uyarlanmış AIC ve BIC kriterlerine de yer verilmiştir. Bu kriterlerin uygulamada kullanımını göstermek amacıyla, Mincer ücret denklemi desiller düzeyinde yuvalanmış modeller olarak tahmin edilmiştir. Potansiyel tecrübenin karesine kısıt konarak oluşturulan kısıtlı ve kısıtsız modeller için, açıklanan kriterler yardımıyla uyum iyiliği incelenmiş ve model seçimi yapılmıştır. Sonuçta genel olarak kısıtsız model tercih edilmiş ve potansiyel tecrübe ile logaritmik ücret ilişkisinin tüm kantillerde teoride varsayıldığı gibi karesel olması gerektiği belirlenmiştir. Yalnızca uyarlanmış bilgi kriterlerine göre en yüksek kantillerde kısıtlı model tercih edilmiş, yani potansiyel tecrübenin karesinin modelin uyum iyiliğini yüksek kantillerde anlamlı düzeyde arttırmadığı tespit edilmiştir. Kantil regresyon modelleri için topluca sunulan ve uygulamada kullanımı gösterilen uyum iyiliği ve model seçimi kriterlerinin, literatürde daha sonra yapılacak çalışmalar için destekleyici nitelikte olacağı düşünülmektedir.

Anahtar Sözcükler: Bilgi Kriterleri, Kantil Regresyon, Mincer Ücret Denklemi, Model Seçimi, Uyum İyiliği.

Sorumlu Yazar / Corresponding Author: 1-Şaban KIZILARSLAN, Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü.

Atıf / Citation: KIZILARSLAN Ş. Kantil Regresyon Modellerinde Uyum İyiliği Ölçüleri ve Model Seçimi. İstatistik Araştırma Dergisi, 2021, 11 (2), 1-13.

Goodness of Fit Measures and Model Selection in Quantile Regression

Abstract

In this study, the prominent criteria used for goodness of fit and model selection in quantile regression models are presented together. These criteria are the R^1 ratio, which is a measure similar to the coefficient of determination (R^2), the C^1 test, the asymmetric weighted mean absolute error (ATWE), and the Akaike (AIC) and Schwarz (BIC) information criteria. In addition, more efficient AIC and BIC criteria, which were adapted to increase their effectiveness, are also included. To illustrate the practical use of these criteria, the Mincer wage equation was estimated as nested models at the decile level. For the constrained and unconstrained models created by placing constraint on the square of the potential experience, the goodness of fit was examined and the model selection was made with the help of the explained criteria. As a result, the unconstrained model was generally preferred and it was determined that the relationship between potential experience and logarithmic wage should be quadratic in all quantiles as assumed in theory. However, according to the adapted information criteria, the restricted model was preferred in the highest quantiles, that is, it was determined that the square of potential experience did not significantly increase the goodness of fit of the model in high quantiles. It is thought that the goodness of fit and model selection criteria, which are presented collectively for quantile regression models and used in practice, will be supportive for future studies in the literature.

Keywords: Goodness of Fit, Information Criteria, Mincer Wage Equation, Model Selection, Quantile Regression.

1. Giriş

Regresyon modellerinde kurulan modelin uyum iyiliğini incelemek ve alternatif regresyon modelleri arasında optimal model seçimi yapmak önem arz etmektedir. Uyum iyiliği kavramı genel olarak modelde yer alan bağımsız değişkenlerin bağımlı değişkendeki değişmeyi açıklayabilme gücüdür. Uyum iyiliği modelin tahmin başarısı üzerinden analiz edilebildiği gibi öngörü başarısı üzerinden de incelenebilmektedir. Model seçimi ise genellikle aynı bağımlı değişkeni açıklamak üzere farklı açıklayıcı değişkenler veya farklı fonksiyonel biçimler kullanılarak elde edilen regresyon modelleri arasında uyum iyiliği en yüksek modelin belirlenmesi sürecidir. Bazı durumlarda bir modeldeki bazı değişkenlere kısıt veya kısıtlar konarak kısıtlı bir alt model elde edilir ve yuvalanmış modeller olarak isimlendirilen bu kısıtlı ve kısıtsız modeller arasında model seçimi yapılır. Yuvalanmış modeller arasında seçim yapma işlemi, aslında kısıt konan değişken veya değişkenlerin modelin uyum iyiliğine anlamlı bir katkısının olup olmadığının incelenmesi işlemidir.

Regresyon modellerinin uyum iyiliğini incelemek ve model seçimi yapmak amacıyla kullanılan pek çok kriter mevcuttur. Bunlar arasında öne çıkan bazıları belirlilik katsayısı (R^2); F, Benzerlik Oranı (LR), Langrange Çarpanı (LM) ve Wald testleri ile Akaike ve Schwarz (Bayesyen) bilgi kriterleridir (AIC, BIC). Bunların yanı sıra, modellerin tahmin ve öngörü başarılarını dikkate alan ve genellikle model hatalarının birer fonksiyonu olarak hesaplanan Ortalama Hata Kare (MSE) ve Ortalama Mutlak Hata (MAE) gibi ölçüler ve bu ölçülerin çeşitlendirilmeleri bulunmaktadır (Güriş ve Çağlayan-Akay, 2018; Pham, 2019).

Kantil regresyon modelleri, bağımlı değişken dağılımının ortalamasının ele alındığı klasik regresyon modellerine alternatif olarak önerilmiştir. Dağılımın kantillerinden faydalanarak istenen her noktada inceleme yapma avantajına sahip olan bu modeller, aşırı değerlerin varlığı ve değişen varyans gibi durumlarda klasik modellere göre daha dirençlidir. Ayrıca klasik modelde yer alan kısıtlayıcı bir varsayım olan hata terimlerinin normal dağılımı varsayımı kantil modellerinde söz konusu değildir. Bağımlı değişkenin medyanının ele alındığı regresyon modeli, kantil regresyonun özel bir durumudur ve medyan regresyon olarak adlandırılmaktadır (Koenker, 2005).

Kantil regresyon modellerinde uyum iyiliğini incelemek ve model seçimi yapabilmek için çeşitli kriterler geliştirilmiştir. Klasik regresyon modellerinde parametre tahminleri için kullanılan hata kereleri minimizasyonu, kantil regresyon modellerinde ağırlıklandırılmış mutlak hatalarla değiştirilir. Kantil regresyon modellerinde uyum iyiliği ve model seçimi kriterleri, genel olarak bu değişikliğin dikkate alınarak klasik modeller için kullanılan kriterlerin uyarlanması ile elde edilmektedir. Literatürde kantil regresyon modelleri için çeşitli uyum iyiliği ve model seçimi kriterleri yer almaktadır. Hurvich ve Tsai (1990) medyan regresyon için AIC tipi bilgi kriteri önermişlerdir. Machado (1993), kantil regresyonu durumunu da içeren M-tipi robust tahminçiler için Schwarz bilgi

kriterini (BIC) ortaya koymuştur. Koenker ve Machado (1999), çalışmalarında kantil regresyon için klasik modellerde kullanılan belirlilik katsayısına benzer bir uyum iyiliği ölçüsü olan R^1 oranını önermiş ve bu kriterin model seçimi için kullanımını açıklamışlardır. Ayrıca yine aynı çalışmada kantil regresyon modelleri için LR ve Wald tipi testler önerilmiştir. He ve Zhu (2003), doğrusal veya doğrusal olmayan kantil regresyon modelleri için gradyan vektörünün cusum sürecine dayanan bir uyum eksikliği testi önermişlerdir. Koenker (2005) kantil regresyon modelleri için AIC kriterinin yapısını sunmuştur. Chernozhukov ve Fernández-Val (2005), kantil regresyon modellerinde çeşitli temel hipotezleri test etmek için kullanılabilir, alt örneklemeyle dayalı bir test yapısı önermişlerdir. Furno (2011), kantil regresyon modelleri için klasik modellerde kullanılan F ve LR testlerinin yapısına benzer bir test olan C^1 uyum iyiliği testini sunmuştur. Haupt vd. (2011), çeşitli kantil regresyon modelleri için bir çapraz doğrulama (cross-validation) yöntemi önerdikleri çalışmalarında, model karşılaştırması için R^1 ile birlikte ortalama ağırlıklandırılmış mutlak hata (ATWE) ölçüsünden faydalanmışlardır. Dong vd. (2019), düşük ve yüksek boyutlu parametrik kantil regresyon modelleri için bir uyum eksikliği testi geliştirmişlerdir. Shin vd. (2021), kantil modeller için kullanılan AIC ve BIC kriterlerinin etkinliğini arttırmak amacıyla, alternatif bir kayıp fonksiyonu kullanarak daha etkin olduğunu ifade ettikleri uyarlanmış AIC ve BIC kriterleri geliştirmişlerdir.

Bu çalışmada, kantil regresyon modellerinde uyum iyiliğini analiz etmek ve model seçimi yapmak amacıyla kullanılan bazı kriterler bir arada sunulmuştur. Çalışmada öne çıkan kriterler seçilirken, klasik regresyon modellerindeki kriterlere benzer yapıda olan genel kriterler tercih edilmiştir. Çalışmada ele alınan kriterler R^1 , C^1 testi, ATWE ile bilgi kriterleri AIC ve BIC'dir. Bu kriterlere ek olarak etkinliği artırılmış iki bilgi kriterine de çalışmada yer verilmiştir. Sunulan kriterlerin uygulamada kullanımını örneklemek amacıyla Mincer ücret denklemi, yuvalanmış modeller olarak desiller düzeyinde tahmin edilmiş ve kısıtlı ile kısıtsız modeller arasında açıklanan kriterler ile model seçimi yapılmıştır. Toplu olarak sunulan ve uygulama örneği verilen bu kriterlerin, yerli literatürde daha sonra yapılacak kantil regresyon çalışmalarında kullanılabilirliği göz önüne alındığında, bu çalışmanın yerli literatüre katkı sağlayacağı öngörülmektedir.

Çalışmanın bir sonraki bölümünde, ele alınan kriterlerin teorik yapıları tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde uygulamanın detaylarına ve kullanılan değişkenlere ait bilgilere yer verilmiştir. Bir sonraki bölümde uygulamanın bulguları sunulmuş ve son bölümde çalışmadan elde edilen sonuçlar toparlanmıştır.

2. Kantil Regresyonda Uyum İyiliği ve Model Seçimi Ölçüleri

Klasik regresyon modelinde bağımlı değişkenin koşullu ortalaması modellenmektedir. Koenker ve Basset (1978) tarafından öncülük edilen kantil regresyon modelinde ise bağımlı değişkenin koşullu kantillerinin modellenmesi önerilmektedir. Böylece bağımlı değişkenin yalnızca ortalaması için değil, dağılımının herhangi bir noktasında incelenmesi mümkün olmaktadır. Ayrıca klasik regresyonda yer alan kısıtlayıcı varsayımlardan bir tanesi olan hata terimlerinin normal dağılması varsayımı kantil regresyon modelleri için söz konusu değildir. Bu nedenle bu modeller aşırı değerlere karşı klasik modellere karşı daha dirençlidir.

Kantil regresyon modellerinde genellikle bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere koşullu kantil fonksiyonu kullanılmaktadır. y tesadüfi değişkeninin x tesadüfi değişkeni üzerine koşullu θ . kantili aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$q_{\theta}(x) = F^{-1}(\theta|x) = \inf \{y : F(y|x) \geq \theta\} \quad (1)$$

Burada F kümülatif dağılım fonksiyonudur ve değişkenin ilgili kantilinin hesaplandığı kantil fonksiyonu $Q(\theta)$, bu kümülatif dağılım fonksiyonun tersi olarak tanımlanmaktadır. Bu kantil fonksiyonu yardımıyla θ . kantil için doğrusal kantil regresyon modeli aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$Q_{\theta}(y|x) = x'\beta_{\theta} \quad (2)$$

Burada x' açıklayıcı değişkenler matrisinin transpozunu, β_{θ} ise ilgili kantil için parametreler vektörünü ifade etmektedir. Kantil regresyonda parametre tahminleri, klasik regresyonda kullanılan hata kareleri toplamı yerine, hataların asimetric ağırlıklandırılmış mutlak değerleri toplamının minimizasyonu ile elde edilmektedir. Parametre tahminleri için kullanılan minimizasyon fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\hat{\beta}_{\theta} = \min_{\beta} \sum \rho_{\theta}(y - x'\beta) \quad (3)$$

Burada kullanılan ρ_θ kayıp fonksiyonu,

$$\rho_\theta(z) = z(\theta - I(z < 0)) \quad (4)$$

olarak tanımlanmaktadır ve I gösterge fonksiyonudur. Bu kayıp fonksiyonu $\theta = 0.5$ değeri yani medyan için hesaplandığında mutlak değer fonksiyonuna dönüşmektedir ve bu fonksiyonla medyan için kurulan regresyon modeli özel olarak medyan regresyon olarak adlandırılmaktadır (Koenker ve Basset, 1978; Koenker, 2005; Davino vd., 2014).

Kantil regresyon modellerinde modelin uyum iyiliğini ölçmek ve birden fazla kantil regresyon modeli arasında seçim yapmak için kullanılan bazı ölçüler geliştirilmiştir. Bu bölümde, bu ölçülerden öne çıkan ve yeni önerilen birkaç tanesi tanıtılacaktır.

2.1. R^1 Uyum İyiliği Kriteri

Kantil regresyon modellerinde uyum iyiliğini ölçmek ve model seçimi yapmak amacıyla önerilen R^1 uyum iyiliği kriteri, klasik regresyon modelleri için kullanılan belirlilik (determinasyon) katsayısı R^2 'ye benzer bir ölçüdür. Belirlilik katsayısı hesaplanırken modelin toplam hata karelerinden faydalanılırken, R^1 kriterinde benzer bir yaklaşımla, parametre tahmininde kullanılan asimetric ağırlıklandırılmış mutlak değerleri toplamından faydalanılmaktadır. İncelenen θ . kantil için, kantil regresyon modeline ait R^1 değeri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$R^1(\theta) = 1 - \frac{\sum \rho_\theta(y - x' \hat{\beta}_\theta)}{\sum \rho_\theta(y - y_\theta)} \quad (5)$$

Burada y_θ , bağımlı değişkeninin örnek dağılımının θ . kantilidir. Hesaplanan değer 1'e yaklaşması modelin uyum iyiliğinin yüksek, 0'a yaklaşması ise düşük olduğunu ifade etmektedir. R^1 kriteri birden fazla modelin karşılaştırılması için de kullanılabilir. Yuvalanmış kantil regresyon modellerinde, kısıtlı ve kısıtsız modellerin karşılaştırılması için bu kriter aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$R^1(\theta) = 1 - \frac{\sum \rho_\theta(y - x' \hat{\beta}_{\theta, \text{kısıtsız}})}{\sum \rho_\theta(y - x' \tilde{\beta}_{\theta, \text{kısıtlı}})} \quad (6)$$

Burada kısıtsız ve kısıtlı modellerin ağırlıklandırılmış mutlak hata toplamları kullanılmaktadır. Elde edilen değer, kısıt konan değişken veya değişkenlerin modele ne kadar katkı yaptığını göstermektedir. Örneğin kısıtsız bir model ile bu modelden bir değişken çıkartılarak elde edilen kısıtlı model için yukarıda verilen kriter hesaplandığında, hesaplanan değer, kısıt konan değişkenin modelin uyum iyiliğine katkısını ortaya koymaktadır. Klasik regresyon modelleri için global bir ölçü olan R^2 ölçüsünün aksine, R^1 kriteri ilgili kantil için hesaplanan yerel bir ölçüdür (Koenker ve Machado, 1999).

2.2. C^1 Testi

Klasik regresyon modellerinde, bağımsız değişkenlerin bağımlı değişkenin koşullu ortalamasını açıklama başarısını bir arada test etmek amacıyla F Testi kullanılmaktadır. F Testi, aynı zamanda yuvalanmış modellerde kısıt konan değişkenlerin modelin açıklama gücünde anlamlı bir fark oluşturup oluşturmadığını test etmek amacıyla kullanılabilir. Ancak bu testin güvenilirliği normallik varsayımının sağlanmasına bağlıdır. Furno (2011) tarafından kantil regresyon modelleri için F ve Benzerlik Oranı (LR) testlerine benzer bir yaklaşımla genelleştirilen C^1 testi önerilmiştir. C^1 testi, Chow (1960) tarafından önerilen LR testi ile yakından ilişkilidir. Bu test, normal dağılımlı hata terimlerine sahip kısıtlı ve kısıtsız modellerin karşılaştırılmasında kullanılmaktadır ve toplam hata karelerinden hesaplanmaktadır. C^1 testi, kantil regresyon modelleri için benzer bir yaklaşım takip etmektedir. Ancak LR testinden farklı olarak, toplam hata kare yerine ağırlıklandırılmış mutlak hatalardan faydalanılmaktadır ve normal dağılım koşulu söz konusu değildir. İlgili kantil için kısıtlı ve kısıtsız modeller arasında tercih yapmak amacıyla C^1 test istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$C^1(\theta) = \frac{\left[\sum \rho_\theta(y - x' \tilde{\beta}_{\theta, \text{kısıtlı}}) - \sum \rho_\theta(y - x' \hat{\beta}_{\theta, \text{kısıtsız}}) \right] / d_1}{\sum \rho_\theta(y - x' \hat{\beta}_{\theta, \text{kısıtsız}}) / d_2} \quad (7)$$

Burada d_1 kısıt sayısıdır. d_2 ise,

$$d_2 = \text{gözlem sayısı} - \text{kısıtsız modelde tahmin edilen katsayı sayısı}$$

olarak hesaplanmaktadır. Bu test istatistiği asimptotik olarak F_{d_1, d_2} dağılımına sahiptir. Ayrıca klasik regresyon modellerindeki F testi ile R^2 ilişkisine benzer bir ilişki, C^1 testi ile daha önce kısıtlı ve kısıtsız modeller arasındaki uyum iyiliği farkını incelemek amacıyla verilen R^1 kriteri için de söz konusudur. C^1 test istatistiği, yuvalanmış modellere ait R^1 kriteri yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$C^1(\theta) = \frac{R^1(\theta)}{1 - R^1(\theta)} \frac{d_2}{d_1} \quad (8)$$

Bu testin sıfır hipotezi kısıtın geçerli olduğunu ifade etmektedir. Bu durumda sıfır hipotezi reddedilirse kısıtsız model tercih edilirken; sıfır hipotezi reddedilemezse, kısıt konan değişkenlerin modelin uyum iyiliğinde anlamlı bir fark oluşturmadığı sonucuna varılmakta ve kısıtlı model tercih edilmektedir. (Furno, 2011).

2.3. Ağırlıklandırılmış Ortalama Mutlak Hata (ATWE)

Klasik regresyon modellerinde, modelin tahmin ve öngörü başarısını ölçmek ve modelleri bu açıdan karşılaştırmak için kullanılan kriterlerden öne çıkanları Ortalama Hata Kare (MSE) ve Ortalama Mutlak Hata (MAE) kriterleridir. Ağırlıklandırılmış Ortalama Mutlak Hata (ATWE) kriteri, MSE ve MAE kriterlerine benzer bir yaklaşımla, kantil regresyon modelleri için genellenmiş bir kriterdir. Kantil regresyon modelinde ilgili θ . kantil için ATWE kriteri,

$$ATWE(\theta) = \frac{1}{n} \sum \rho_\theta(y - x' \hat{\beta}_\theta) \quad (9)$$

olarak hesaplanabilir. Burada asimetrik ağırlıklandırılmış mutlak hata ortalamaları hesaplanmaktadır ve MSE ve MAE kriterlerine benzer olarak ATWE değeri daha düşük olan kantil modelinin uyum iyiliğinin daha yüksek olduğu ve alternatif modellere tercih edilebileceği ifade edilmektedir. Bu kriter, aynı zamanda veri setinin bir kısmı bölünerek, alternatif kantil modellerin öngörü başarılarının karşılaştırılmasında kullanılabilir (Haupt vd., 2011).

2.4. Bilgi Kriterleri

Regresyon modellerinde model seçimi kullanılan temel seçeneklerden bir tanesi bilgi kriterleridir. Bilgi kriterlerinden öne çıkan ve en sık kullanılan iki tanesi Akaike Bilgi Kriteri (AIC) ve Schwarz, diğer adıyla Bayesyen Bilgi Kriteri (BIC)'dir. Klasik regresyon modellerinde toplam hata karelerinden faydalanarak hesaplanan bilgi kriterleri, kantil regresyon modellerinde ağırlıklandırılmış mutlak hata toplamları kullanılarak hesaplanmaktadır. Kantil regresyon modellerinde ilgili θ . kantil için bilgi kriterlerinin genel ifadesi;

$$IC(\theta) = n \ln \left[\frac{1}{n} \sum \rho_\theta(y - x' \hat{\beta}_\theta) \right] + \alpha(n, k) / 2 \quad (10)$$

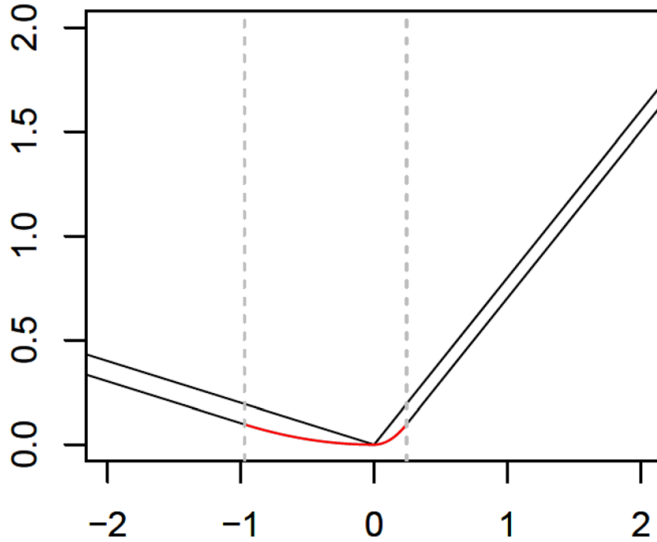
olarak verilebilir. Burada n gözlem sayısı, k ise modelin boyutu yani modeldeki parametre sayısıdır. Bu genel ifadede $\alpha(n, k)$ fonksiyonunun farklı seçimleri ile AIC ve BIC kriterleri elde edilmektedir. $\alpha(n, k) = 2k$ olarak seçildiğinde AIC kriteri elde edilirken, $\alpha(n, k) = k \ln(n)$ olarak seçildiğinde ise BIC kriteri elde edilmektedir. Her iki kriter için de geçerli olmak üzere, genel olarak daha küçük değere sahip olan modelin optimal model olduğu sonucuna varılmaktadır (Koenker, 2005; Shin vd., 2021).

2.5. Uyarlanmış Bilgi Kriterleri

Shin vd. (2021), kantil regresyon modellerinde kullanılan AIC ve BIC kriterlerinin etkinliklerini arttırmak amacıyla bu kriterler için düzeltme önermişlerdir. Burada önerilen düzeltme, bilgi kriterlerinin değeri hesaplanırken kullanılan ρ_θ kayıp fonksiyonu yerine alternatif bir kayıp fonksiyonu kullanmaktır. Daha önce verilen ρ_θ kayıp fonksiyonu yerine önerilen modifiye edilmiş kayıp fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\rho_\theta^M(z) = \begin{cases} \theta z - \frac{\theta(1-\theta)}{2\lambda_\theta}, & \frac{(1-\theta)}{\lambda_\theta} \leq z \\ \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{\theta}{(1-\theta)} z^2, & 0 \leq z < \frac{(1-\theta)}{\lambda_\theta} \\ \frac{\lambda_\theta}{2} \frac{(1-\theta)}{\theta} z^2, & -\frac{\theta}{\lambda_\theta} \leq z < 0 \\ -(1-\theta)z - \frac{\theta(1-\theta)}{2\lambda_\theta}, & z < -\frac{\theta}{\lambda_\theta} \end{cases} \quad (11)$$

Burada $\lambda_\theta = 0.5e^{(-2.118-1.097 \times \min(\theta, 1-\theta))} n^\alpha / \hat{\sigma}$ olarak hesaplanmaktadır. Bu ifadede n örneklem büyüklüğü ve α pozitif bir sabit değerdir, uygulamada bu değer 0.3 olarak alınmıştır. $\hat{\sigma}$ ise hata dağılımının robust bir ölçek tahminidir. Burada $\hat{\sigma}$ olarak tüm değişkenlerle tahmin edilen medyan regresyon modeline ait artıkların standart hatası kullanılmıştır. Şekil 1'de ρ_θ ile modifiye edilmiş ρ_θ^M kayıp fonksiyonlarına ait grafikler yer almaktadır.



Şekil 1. ρ_θ ve ρ_θ^M Kayıp Fonksiyonları (Kaynak: Shin vd., 2021)

Grafik incelendiğinde, ρ_θ kayıp fonksiyonunda 0 değerinde yer alan sivri ucun asimetric bir kuadratik eğri ile değiştirildiği görülmektedir. Bu değişiklik, sıfır etrafında bir ortalama etkisi yaparak etkinliğin artmasını sağlamaktadır. Bu modifiye edilmiş kayıp fonksiyonu yardımıyla kantil regresyon modeli için daha etkin bilgi kriterleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$EIC(\theta) = n \ln \left[\frac{1}{n} \sum \rho_\theta^M \left(y - x' \hat{\beta}_\theta \right) \right] + \alpha(n, k) \quad (12)$$

Burada daha etkin AIC (E_AIC) ve daha etkin BIC (E_BIC) kriterlerinin hesaplanması için $\alpha(n, k)$ fonksiyonu sırasıyla $2k$ ve $k \ln(n)$ olarak seçilmektedir. Yine bu bilgi kriterleri ile model seçimi yapılırken, daha düşük değere sahip modelin optimal model olduğu sonucuna varılmaktadır (Shin vd., 2021).

3. Uygulama: Mincer Ücret Denklemi

Bu çalışmada, Türkiye’de Mincer ücret denkleminin kantil düzeyinde geçerliliği incelenmiştir. Mincer (1974) tarafından önerilen Mincer ücret denklemi, belirli bir ücret düzeyine sahip bireyler için, beşeri sermaye değişkenleri ile bireylerin ücret düzeyleri arasındaki ilişkiyi analiz etmektedir. Burada ele alınan beşeri sermaye değişkenleri eğitim yılı ve potansiyel tecrübedir. Logaritmik olarak ele alınan ücretler ile eğitim arasındaki ilişki doğrusal olarak incelenirken, potansiyel tecrübe ile ücret ilişkisinin ise doğrusal olmadığı kabul edilmiş ve potansiyel tecrübe değişkeninin karesi de eklenerek ilişki karesel olarak ele alınmıştır. Standart Mincer ücret denklemi:

$$\text{LnUcret}_i = \alpha_0 + \alpha_1 \text{Eğitim}_i + \alpha_2 \text{Tecrübe}_i + \alpha_3 \text{Tecrübe}_i^2 + \varepsilon_i \quad (13)$$

şeklinde gösterilebilir Standart denkleme ücret düzeyi üzerinde etkili olduğu düşünülen farklı değişkenler eklenerek genişletilebilir (Çağlayan-Akay, Kömürçyan, 2021). Bu çalışmada Mincer ücret denklemi kantil düzeyinde ele alınmıştır. Çalışmada kantil regresyona ait uyum iyiliği ölçülerinden faydalanarak, kısıtlı ve kısıtsız kantil regresyon modelleri arasında model seçimi yapılmıştır. Bu amaçla Mincer ücret denkleminde yer alan potansiyel tecrübe değişkeninin fonksiyonel yapısı ele alınmıştır. Potansiyel tecrübe değişkeni teoride önerildiği gibi doğrusal olmayan bir biçimde, yani değişkenin kendisi ve karesi birlikte modele eklenerek kısıtsız kantil regresyon modeli oluşturulmuştur. Ardından tecrübe değişkeninin karesi modelden çıkartılarak, doğrusal biçimde yer aldığı kısıtlı kantil regresyon modeli elde edilmiştir. Böylece potansiyel tecrübenin ücretle ilişkisinin doğrusal mı yoksa karesel mi olduğu kantil düzeyinde test edilmektedir. Kısıtsız kantil regresyon modelinin genel gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$Q_\lambda(\text{LnUcret}_i) = \beta_0 + \beta_1 \text{Eğitim}_i + \beta_2 \text{Tecrübe}_i + \beta_3 \text{Tecrübe}_i^2 + \beta_4 \text{Cinsiyet}_i + \beta_5 \text{Çalışma}_i \text{ Şekli}_i + \varepsilon_{ii} \quad (14)$$

Kısıtlı regresyon modelinde, kısıtsız modeldeki tecrübenin karesi değişkenine kısıt konmuştur: $\beta_3 = 0$. Kısıtlı regresyon modelinin genel gösterimi:

$$Q_\lambda(\text{LnUcret}_i) = \alpha_0 + \alpha_1 \text{Eğitim}_i + \alpha_2 \text{Tecrübe}_i + \alpha_3 \text{Cinsiyet}_i + \alpha_4 \text{Çalışma}_i \text{ Şekli}_i + \varepsilon_{2i} \quad (15)$$

şeklinde dir. Modellerde standart Mincer ücret denkleminde yer alan eğitim, tecrübe ve tecrübenin karesi değişkenlerinin yanı sıra kontrol değişkeni olarak cinsiyet ve çalışma şekli değişkenleri de eklenmiştir Çalışmada kullanılan değişkenler ve açıklamaları Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 1. Değişkenler ve Tanımları

Değişken	Tanım
LnUcret	Aylık ücretin doğal logaritması
Eğitim	Eğitim alınan yıl sayısı
Tecrübe	Yaş – Eğitim – 6 olarak hesaplanan potansiyel tecrübe
Tecrübe ²	Potansiyel tecrübenin karesi
Cinsiyet	1 Erkek; 2 Kadın
Çalışma Şekli	1 Tam zamanlı; 2 Kısmi Zamanlı

Tüm değişkenler Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) tarafından uygulanan 2016 yılına ait Hanehalkı İşgücü Anketi verilerinden alınmış ve hesaplanmıştır. Bu anket, 15 yaş ve üstündeki bireylere uygulanan ve işgücüne dair soruları kapsayan bir ankettir. TÜİK tarafından yapılan açıklamada, üç binden daha az gözlem ile yapılan analizlerden güvenilir tahminler elde edilemeyeceği ifade edilmiştir. Bu nedenle analizlerin hesaplama maliyetini düşürmek amacıyla veri setinden tesadüfi olarak 3000 gözlem seçilmiş ve analizler için bu alt örnek kullanılmıştır. Veri setinde yer alan bireyler, TÜİK tarafından “çalışma çağı” olarak adlandırılan 15-64 yaş aralığında yer alan ve pozitif bir gelir miktarına sahip olan bireylerdir. Ayrıca potansiyel tecrübe değişkeni en az 1 değerini alacak şekilde kodlanmıştır ve bu değer “bir yıla kadar potansiyel tecrübesi olan bireyleri” ifade etmektedir.

4. Bulgular

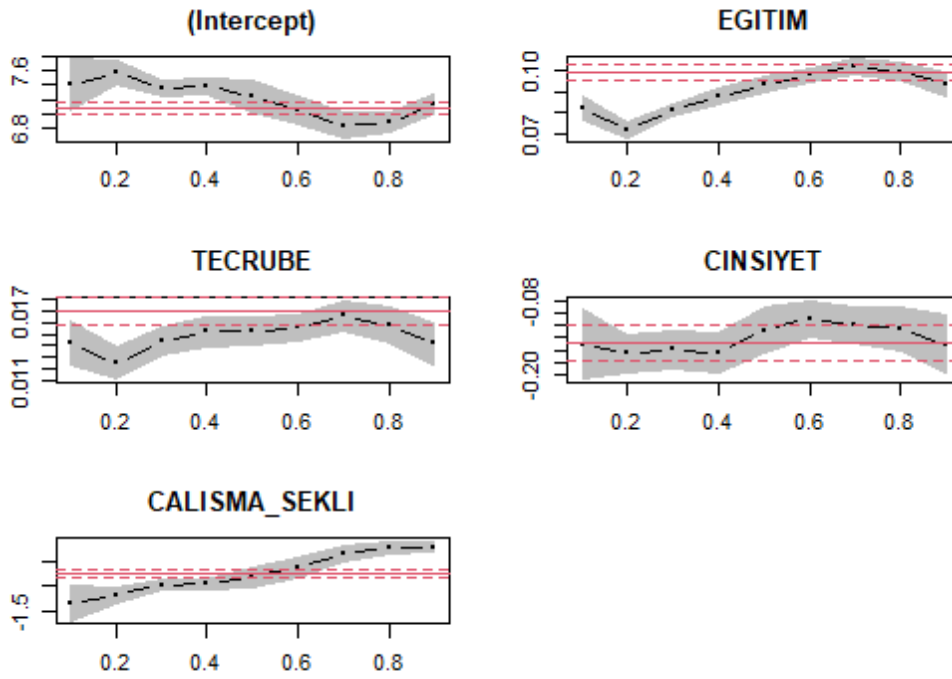
Kantil regresyon modellerinde model seçimi kriterlerini incelemek amacıyla, öncelikle kısıtlı ve kısıtsız Mincer ücret denklemi modelleri tahmin edilmiştir. Daha sonra açıklanan kriterler kullanılarak modeller arasında seçim yapılmıştır. Hem model seçiminin hem de ilgili kriterlerin dağılımı boyunca değişimini inceleyebilmek amacıyla desillerin, yani ondabirlik kantillerin hepsi için model tahmini yapılmıştır. Tecrübenin doğrusal olarak eklendiği kısıtlı kantil regresyon modelinin tahmin sonuçları Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. Kısıtlı Model Tahmin Sonuçları

Değişken	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Sabit	7.406	7.578	7.362	7.384	7.246	7.054	6.834	6.875	7.134
Eğitim	0.082	0.072	0.081	0.088	0.094	0.098	0.102	0.100	0.094
Tecrübe	0.014	0.013	0.014	0.015	0.015	0.016	0.017	0.016	0.014
Cinsiyet	-0.151	-0.166	-0.159	-0.164	-0.128	-0.109	-0.119	-0.126	-0.150
Çalışma Şekli	-1.330	-1.167	-0.968	-0.953	-0.821	-0.622	-0.366	-0.250	-0.227

*** Tüm katsayılar % 1 hata payı ile istatistiksel olarak anlamlıdır.

Tahmin sonuçları incelendiğinde, modelde yer alan değişkenlerin incelenen tüm kantillerde ücret düzeyi üzerinde istatistiksel olarak anlamlı etkilerinin olduğu görülmektedir. Mincer ücret denkleminin temel değişkenleri olan eğitim ve tecrübenin ücret düzeyi üzerinde pozitif etkisi olduğu belirlenmiştir. Kontrol değişkenlerinin katsayıları ise incelenen tüm kantillerde negatif olarak elde edilmiştir. Buna göre ücret dağılımının tamamında kadınların ücreti erkekle göre anlamlı düzeyde daha düşüktür. Benzer şekilde ücret dağılımının incelenen her noktasında kısmi zamanlı çalışanların ücreti tam zamanlı çalışanlara göre daha düşüktür. Bu modelde tecrübe doğrusal olarak ele alındığından, bireylerin potansiyel tecrübesinin artmasının, ücret düzeylerinin devamlı olarak artmasına neden olacağı şeklinde yorumlanmaktadır. Modelde yer alan değişkenlerin katsayılarının kantillere göre değişimi Şekil 2’de verilmiştir.



Şekil 2. Kısıtlı Model Katsayılarının Kantillere Göre Değişimi

Bu şekilde yatay eksen kantilleri ifade ederken, dikey eksen ilgili değişkenin katsayısını ifade etmektedir. Noktalı ve kesikli olarak verilen eğriler ile etrafında yer alan taralı alanlar, kantillerdeki değişken katsayıları ile bu katsayıya ait güven aralıklarını temsil etmektedir. Şekilde yer alan tam ve kesikli doğrular ise modelin EKK ile tahmin edilmesi durumunda ilgili değişken için elde edilecek katsayı ile bu katsayıya ait güven aralığını temsil etmektedir. Eğitim değişkenine ait grafik incelendiğinde, 20. kantilde eğitimin ücret üzerindeki etkisi daha düşükken, yüksek kantillere doğru gidildikçe eğitim değişkeninin ücret üzerindeki etkisi artmaktadır. Oysa EKK tahmin sonucuna bakıldığında, eğitim değişkeninin etkisinin, kantillere göre en yüksek çıkan değer civarında tahmin edildiği görülmektedir. Buradan, eğitimin ücretin farklı düzeyleri için farklılaşan etkisini görebilmek için kantil model kullanmanın gerekliliği anlaşılmaktadır. Cinsiyet değişkeni için bakıldığında, medyana kadarki kantillerde etki daha yüksek iken, daha yüksek kantillerde etkinin azalmaya başladığı görülmektedir. Bir başka deyişle, düşük ücret düzeyleri için erkekler ile kadınlar arasındaki ücret farkı daha fazla iken, yüksek ücret düzeylerinde bu fark azalmaktadır. Ancak çok yüksek ücret düzeylerinde aradaki farkın yeniden artmaya başladığı görülmektedir. Çalışma şekline göre bakıldığında ise düşük ücret düzeyinden yüksek ücret düzeyine doğru gidildikçe tam zamanlı çalışanlar ile kısmi zamanlı çalışanlar arasındaki ücret farkının azaldığı görülmektedir. Temel olarak ele alınan tecrübe değişkeninin ise etkisinin kantiller boyunca pek farklılaşmadığı, ancak artan görünümde olduğu görülmektedir.

Bir sonraki aşamada potansiyel tecrübenin ücret üzerindeki etkisinin doğrusal olmadığı teorisi dikkate alınarak, tecrübenin karesi de modele eklenmiş ve kısıtsız model tahmin edilmiştir. Tecrübenin karesel olarak eklendiği kısıtsız kantil regresyon modeli sonuçları Tablo 3’de verilmiştir.

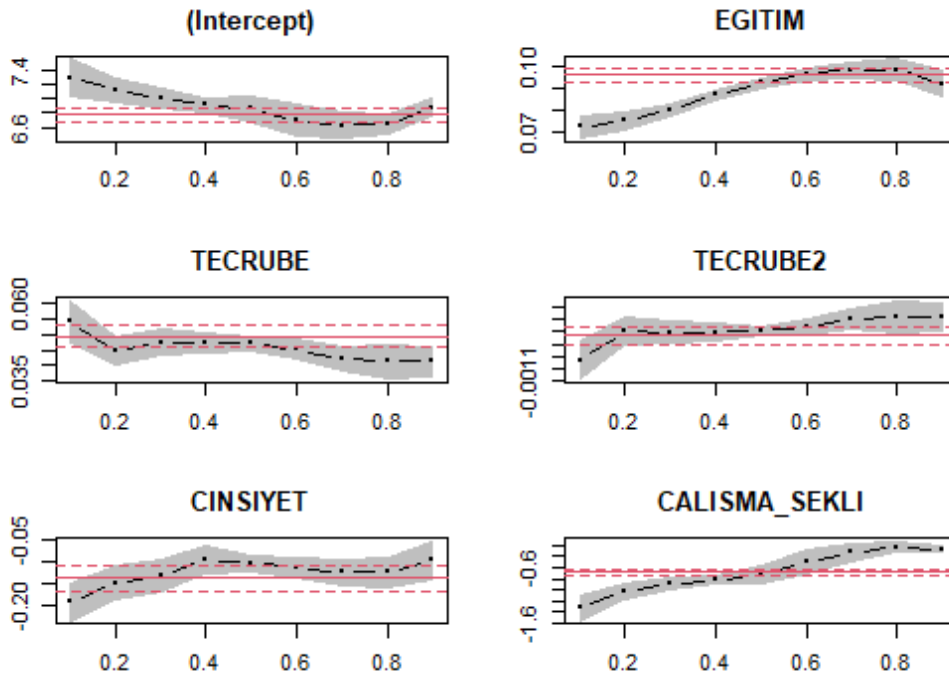
Model tahmin sonuçları incelendiğinde, kontrol değişkenleri olan cinsiyet ve çalışma şekli değişkenlerinin kısıtlı modelde olduğu gibi tüm kantillerde negatif katsayılı bulunduğu görülmektedir. Buna göre ücret dağılımının incelenen her noktasında kadınların ücret düzeyi erkeklerden ve yarı zamanlı çalışanların ücret düzeyi tam zamanlılardan daha düşük bulunmuştur. Eğitimin etkisi ise kısıtlı modeldekine benzer şekilde pozitiftir. Tecrübe değişkeni incelendiğinde, tüm kantillerde değişkenin kendisi pozitif katsayılı bulunurken, karesinin negatif katsayılı olduğu görülmektedir. Buna göre tecrübenin ücret üzerindeki etkisinin ters – U şeklinde olduğu söylenebilir. Bir başka deyişle, belirli bir düzeye kadar tecrübe ücreti arttırırken, bir düzeyden sonra bu etkinin terse döndüğü söylenebilir. Dolayısıyla Mincer ücret denkleminde ortaya konan tecrübe – ücret ilişkisinin geçerli olduğu tespit edilmiştir.

Tablo 3. Kısıtsız Model Tahmin Sonuçları

Değişken	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Sabit	7.291	7.121	7.004	6.911	6.857	6.699	6.631	6.654	6.881
Eğitim	0.072	0.075	0.080	0.087	0.093	0.097	0.098	0.099	0.092
Tecrübe	0.054	0.045	0.048	0.048	0.047	0.045	0.042	0.041	0.041
Tecrübe ²	-0.0009	-0.0007	-0.0007	-0.0007	-0.0007	-0.0007	-0.0006	-0.0006	-0.0006
Cinsiyet	-0.193	-0.150	-0.133	-0.098	-0.105	-0.116	-0.127	-0.126	-0.099
Çalışma Şekli	-1.327	-1.014	-0.894	-0.824	-0.731	-0.506	-0.326	-0.231	-0.269

*** Tüm katsayılar % 1 hata payı ile istatistiksel olarak anlamlıdır.

Kısıtsız modelde değişken katsayılarının kantillere göre değişimi Şekil 3'de verilmiştir.



Şekil 3. Kısıtsız Model Katsayılarının Kantillere Göre Değişimi

Şekil incelendiğinde, eğitim, cinsiyet ve çalışma şeklinin kantillere göre etkisi kısıtlı modele benzer yapıdadır. Eğitim değişkeni, kısıtlı modelden farklı olarak en düşük kantilde en düşük etkiye sahipken, yüksek kantillere doğru gidildikçe etkisi artmakta, en yüksek kantillerde ise sabitlenmeye başlamaktadır. Cinsiyetin etkisi düşük kantillerde daha belirginken, yüksek kantillerde daha az ve yakın düzeyde kalmaktadır. Yani düşük ücret düzeylerinde erkekler ile kadınlar arasındaki ücret farklılıkları daha barizdir. Yarı zamanlılar ile tam zamanlılar arasındaki ücret farklılığı, düşük ücret düzeylerinden yüksek ücret düzeylerine doğru gidildikçe azalmaktadır.

Tecrübe değişkeninin dağılımı incelendiğinde ise, kısıtlı modeldekine oranla daha yüksek etkisinin olduğu ancak kısıtlı modelden farklı olarak kantillere göre azalan yapıda olduğu görülmektedir. Tecrübenin karesinin de katsayılarının negatif olduğu dikkate alınrsa, etkisinin yüksek kantillere doğru azaldığı görülmektedir. Buna göre Mincer ücret denkleminde belirtilen doğrusal olmayan ilişki yapısının tüm kantillerde geçerli olduğu ancak yüksek kantillerde bu doğrusal olmayan etkinin azalmaya başladığı söylenebilir. Bu noktada tecrübenin karesinin modele eklenmesiyle, kantiller boyunca modelin uyumunda istatistiksel olarak anlamlı bir gelişme olup olmadığını açıklanan kriterler yardımıyla incelemek mümkündür. Bu kriterler yardımıyla kısıtlı ve kısıtsız modeller arasında seçim yapılabilir ve tecrübenin karesinin modele eklenmesinin anlamlı bir fark oluşturup oluşturmadığı tespit edilebilir. Kısıtlı ve kısıtsız modeller için uygulanan uyum iyiliği ve model seçim kriterlerinin sonuçları Tablo 4’de verilmiştir.

Tablo 4. Kısıtlı – Kısıtsız Modeller İçin Uyum İyiliği ve Model Seçimi Sonuçları

KANTİL	YÖNTEM	R ¹ (%)	C ¹	ATWE	AIC	BIC	E_AIC	E_BIC
0.10	KISITLI	5.03	158.52	0.078	-7651.5	-7639.5	-8176.8	-8164.8
	KISITSIZ			0.074	-7805.2	-7790.2	-8423.6	-8408.6
0.20	KISITLI	3.93	122.50	0.117	-6423.3	-6411.3	-6976.7	-6964.7
	KISITSIZ			0.113	-6542.6	-6527.6	-7357.5	-7342.5
0.30	KISITLI	5.24	165.53	0.143	-5826.5	-5814.5	-6609.6	-6597.6
	KISITSIZ			0.136	-5986.1	-5971.1	-7178.9	-7163.9
0.40	KISITLI	5.30	167.53	0.157	-5561.2	-5549.2	-6772.9	-6760.9
	KISITSIZ			0.148	-5723.5	-5708.5	-7869.7	-7854.7
0.50	KISITLI	4.86	153.07	0.159	-5505.4	-5493.4	-8076.7	-8064.6
	KISITSIZ			0.152	-5654.0	-5638.1	-8950.8	-8935.8
0.60	KISITLI	4.02	125.27	0.153	-5635.6	-5623.6	-10131.4	-10119.4
	KISITSIZ			0.147	-5757.5	-5742.5	-10556.7	-10541.7
0.70	KISITLI	3.33	103.00	0.137	-5962.4	-5950.3	-15140.9	-15128.9
	KISITSIZ			0.132	-6062.8	-6047.8	-19974.8	-19959.8
0.80	KISITLI	2.44	74.91	0.110	-6608.8	-6596.8	-16998.1	-16986.0
	KISITSIZ			0.108	-6681.9	-6666.9	-15272.3	-15257.3
0.90	KISITLI	2.24	68.55	0.071	-7945.7	-7933.7	-12755.5	-12743.5
	KISITSIZ			0.069	-8012.6	-7997.6	-11864.5	-11849.5

Tablo değerleri sırasıyla değerlendirilirse, R^1 uyum iyiliği ölçüsüne göre, tecrübenin karesinin modele eklenmesi düşük kantillerde modelin uyumunu %5 civarında geliştirirken, yüksek kantillere doğru gidildikçe bu gelişim %2 civarına kadar düşmektedir. Bir başka deyişle, düşük ücret düzeylerinde tecrübenin karesinin eklenmesi modeli daha belirgin olarak geliştirirken, yüksek ücret düzeylerinde daha az geliştirmektedir.

C^1 testi sonuçlarına göre tüm kantillerde test istatistiği değerlerinin oldukça yüksek ve tablo kritik değeri olan $F_{1,2994} = 3.84$ değerinden daha büyük bulunduğu görülmektedir. Buna göre tüm kantiller için, tecrübenin karesinin modele eklenmesiyle uyum iyiliğinde anlamlı bir gelişme olmadığı sıfır hipotezi reddedilmiştir. Tüm kantillerde kısıtsız modelin kısıtlı modele göre daha yüksek uyum iyiliğine sahip olduğu sonucuna varılmıştır. Bununla birlikte test istatistiği değerlerinin yüksek kantillere doğru gidildikçe düşük kantillere göre oldukça azaldığı da dikkat çekmektedir.

ATWE değerleri incelendiğinde, kısıtsız modele ait değerlerin tüm kantillerde kısıtlı modele göre daha düşük olduğu, yani kısıtsız modelin kısıtlı modele tercih edilebileceği görülmektedir. Ağırlıklandırılmış kantil hata ortalamaları kısıtsız modellerde kısıtlı modele daha düşük olmakla birlikte, bu farkın en yüksek kantillerde daha düşük olduğu görülmektedir.

Bilgi kriterleri incelendiğinde, AIC ve BIC kriteri sonuçlarının daha önceki ölçüler ile uyumlu olduğu görülmektedir. İncelenen tüm kantillerde kısıtsız modele ait AIC ve BIC değerleri kısıtlı modele göre daha düşüktür, dolayısıyla kısıtsız modelin tercih edilmesi uygundur. Etkin bilgi kriterlerinde ise sonuçlarda farklılıklar söz konusudur. E_AIC ve E_BIC kriterleri incelendiğinde, düşük kantillerden yüksek kantillere kadar, önceki sonuçlara benzer olarak kısıtsız modelin değerleri kısıtlı modele göre daha düşük bulunmuştur, dolayısıyla kısıtsız modelin tercih edilmesi uygundur. Ancak en yüksek iki kantilde, diğer kriterlerden farklı olarak, kısıtlı modelin değerleri daha düşük bulunmuştur ve kısıtlı modelin tercih edilmesi sonucuna varılmıştır. Bir başka deyişle, bu iki kritere göre yüksek ücret düzeylerine kadar tecrübenin ücret üzerindeki etkisi doğrusal olmayan şekilde iken, en yüksek ücret düzeylerinde bu doğrusal olmayan etki anlamsızlaşmaktadır ve doğrusal olarak ele alınabilir. Bu sonuç, daha önceki ölçülerde yüksek kantillerde model gelişiminin azalması ile uyumludur ve klasik bilgi kriterlerinden farklı olarak tecrübenin karesinin modele eklenmesinin en yüksek kantillerde anlamlı bir katkısı olmadığını ifade etmektedir.

5. Sonuç

Klasik regresyon modellerinde uyum iyiliğini incelemek ve model seçimi yapmak amacıyla kullanılan bazı temel ölçüler, benzer şekilde kantil regresyon için uyarlanmıştır. Bu çalışmada, kantil regresyon modellerinde uyum iyiliği ve model seçimi için kullanılacak R^1 kriteri, C^1 testi, ATWE ile bilgi kriterleri AIC ve BIC tanıtılmıştır. Ayrıca, bilgi kriterlerinin etkinliğini arttırmak amacıyla uyarlanmış bir kayıp fonksiyonu yardımıyla yeniden hesaplanan E_AIC ve E_BIC kriterlerine de çalışmada yer verilmiştir. Açıklanan kriterlerin uygulamada kullanımlarını örneklemek amacıyla Mincer ücret denklemi uygulaması yapılmıştır. Mincer ücret denkleminde bireylerin potansiyel tecrübeleri ile ücretleri arasında doğrusal olmayan bir ilişkinin var olduğu öngörülmektedir. Çalışmada, Mincer denkleminde yer alan potansiyel tecrübenin karesi değişkenine kısıt konarak, potansiyel tecrübenin ücret üzerindeki etkisinin doğrusal olup olmadığı kantil düzeyinde incelenmiştir. Yuvalanmış olarak ele alınan kısıtlı ve kısıtsız kantil modelleri desiller için tahmin edilmiş ve açıklanan kriterler yardımıyla modellerin uyum iyiliği incelenip model seçimi yapılmıştır. Sonuçta, ilk dört kritere göre incelenen tüm kantillerde kısıtsız model kısıtlı modele tercih edilmiştir. Bir başka deyişle, tüm kantillerde potansiyel tecrübenin karesinin modele eklenmesinin modelin uyum iyiliğine anlamlı bir katkı sağladığı ve dolayısıyla incelenen ilişkinin doğrusal olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Ancak bu katkı yüksek kantillere doğru gidildikçe azalan bir seyir göstermektedir. Nitekim daha etkin iki bilgi kriterine göre, diğer kriterlerden farklı olarak en yüksek iki kantilde kısıtlı model tercih edilmiştir. Buna göre, en yüksek kantillerde potansiyel tecrübenin ücretle ilişkisi doğrusal hale gelmekte ve değişkenin karesinin modele eklenmesinin modelin uyum iyiliği üzerinde belirleyici bir katkısı olmamaktadır. Burada toplu olarak verilen kriterlerin kantil regresyon uygulamalarında kullanılacak olması nedeniyle, çalışmanın yerli literatürde daha sonraki çalışmaları destekleyici nitelikte olduğuna inanılmaktadır.

Kaynakça

- Chernozhukov, V. ve Fernández-Val, I. (2005). Subsampling Inference on Quantile Regression Processes. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, 67(2): 253-276.
- Chow, G. (1960). Tests of Equality between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions. *Econometrica*, 28: 591-605.
- Çağlayan-Akay, E. ve Kömüryakan, F. (2021). Koşullu ve Koşulsuz Kantil Regresyon Modelleri Türkiye’de Ücret Eşitsizliği Hakkında Farklı Ne Söylüyor ? *Journal of Economy Culture and Society*, 64: 1-21.
- Davino, C., Furno, M. ve Vistocco, D. (2014). Quantile Regression: Theory and Applications. West Sussex: *John Wiley & Sons, Ltd.*
- Dong, C., Li, G. ve Feng, X. (2019). Lack-of-Fit Tests for Quantile Regression Models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 81(3): 629-648.
- Furno, M. (2011). Goodness of Fit and Misspecification in Quantile Regressions. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 36(1): 105-131.
- Güriş, S. ve Çağlayan-Akay, E. (2018). Ekonometri Temel Kavramlar. İstanbul: *DER Yayınları (5. Baskı)*.
- Haupt, H., Kagerer, K. ve Schnurbus, J. (2011). Cross-Validating Fit and Predictive Accuracy of Nonlinear Quantile Regressions. *Journal of Applied Statistics*, 38(12): 2939-2954.
- He, X. ve Zhu, L.-X. (2003) A Lack-of-Fit Test for Quantile Regression. *Journal of the American Statistical Association*, 98(464):1013-1022.
- Hurvich, C. M. ve Tsai, C. L. (1990). Model Selection for Least Absolute Deviations Regression in Small Samples. *Statistics & Probability Letters*, 9(3): 259-265.
- Koenker, R. (2005). Quantile Regression. New York: *Cambridge University Press.*
- Koenker, R. ve Bassett, G. (1978). Regression Quantiles. *Econometrica*, 46(1): 33–50.
- Koenker, R. ve Machado, J.A.F. (1999). Goodness of Fit and Related Inference Processes for Quantile Regression. *J. Amer. Statist. Assoc.* 94(448): 1296–1310.
- Machado, J. A. F. (1993). Robust Model Selection and M-Estimation. *Econometric Theory*, 9: 478–493.
- Mincer, J. (1974). Schooling, Experience and Earnings. New York: *National Bureau of Economic Research.*
- Pham, H. (2019). A New Criterion for Model Selection. *Mathematics*, 7(12), 1215: 1-12.
- Shin, W., Kim, M. ve Jung, Y. (2021). Efficient Information-Based Criteria for Model Selection in Quantile Regression. *Journal of the Korean Statistical Society*, 1-37.