



Pencere Fonksiyonu Aileleri ve Uygulama Alanları

Turgay KAYA, Melih Cevdet İNCE

Fırat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, ELAZIĞ

Anahtar Kelimeler

Pencere fonksiyonu ailesi
Kaiser penceresi
Ultraspherical pencere
FIR filtre

Keywords

Window function families
Kaiser window
Ultraspherical window
FIR filter

ÖZET

Pencere fonksiyonları (veya kısaca pencere), sonlu impuls cevaplı (FIR, Finite Impulse Response) sayısal filtre tasarımında istenmeyen salınımları ortadan kaldırmak için kullanılan yapılardır. Pencere fonksiyonu analob genişliği, dalgalanma oranı ve yan lob azalma oranı gibi fonksiyonun performansını etkileyen parametrelere sahiptir. Bir pencere fonksiyonu tasarımında temel amaç, istenilen özellikleri sağlayacak genlik spektrumuna düşük derece ve en uygun spektral parametre değerleriyle ulaşmaktır. Bu çalışmanın amacı, pek çok uygulama alanında tercih edilen pencere fonksiyonu ailelerini belirlemek ve bu fonksiyonlar için yeni yaklaşımları incelemektir.

ABSTRACT

Window functions (or shortly windows) are structures being used to eliminate undesired oscillations at FIR (Finite Impulse Response) digital filter design. Window function has parameters, which affect window performance, such as mainlobe width, ripple ratio and sidelobe roll-off ratio. The main aim at window function design is to reach amplitude spectrum providing desired properties with low degree and optimum spectral parameter values. The goal of this study is to determine window function families preferred at many application areas and to examine the new approaches for these functions.

* Sorumlu yazar (Corresponding author) e-posta: tkaya@firat.edu.tr

1. GİRİŞ

Son yıllardaki gelişmelere paralel olarak analog sistemlerin yerini sayısal sistemler almıştır. Bu duruma bağlı olarak, sistemden arzu edilen özelliklerde çıkış elde edebilmek için sayısal sistemin performansını artırma çabaları doğmuştur. Herhangi bir sayısal sistemde arzu edilen çıkışı üretmek için kullanılan yazılımsal veya donanımsal yapılara sayısal filtre adı verilmektedir. Bir sayısal filtre impuls cevabına göre, sonlu impuls cevaplı filtre (FIR filtre) ve sonsuz impuls cevaplı filtre (IIR Infinite Impulse Response) şeklinde ikiye ayrılmaktadır. Tekrarsız olarak gerçekleştirilen bir filtrenin ideal genlik cevabının sınırlı sayıda eleman alınarak tasarlanması işleminde keskin kesim frekansı bölgesinde istenmeyen Gibbs salınımları meydana gelmektedir. Oluşan bu salınımlar pencere fonksiyonları yardımıyla ortadan kaldırılmaktadırlar. Bu işlemlerde kullanılan pencere fonksiyonları için literatürde çeşitli özelliklere sahip farklı pencere türleri geliştirilmiştir. Geliştirilen bu pencere fonksiyonlarının uygulama alanları olarak bir ve iki boyutlu tekrarsız sayısal filtre, sayısal hüzmeleme ve iki boyutlu sayısal filtrelerin en çok kullanıldığı görüntü işleme alanları gösterilebilmektedir.

Fourier serisi kullanılarak tasarlanan filtre yaklaşımında serinin doğrudan kesilmesiyle meydana gelen olayı matematiksel olarak ifade etme işlemi Gibbs tarafından 1899'da yapılmıştır [1]. Fejer, yapmış olduğu çalışmada pratik uygulamalarda kullanılabilirliği için oluşan bu Gibbs salınımları ortadan kaldırmada uygun bir yaklaşım sunmuştur [2]. Lanczos, Fejer'in önerdiği yaklaşımdan daha başarılı sonuç verecek bir yumuşatma yaklaşımı önermektedir [3]. Adams tarafında yapılan çalışmada ise, en yüksek yanlob seviyesi ile toplam yanlob enerjisi arasındaki en iyi dengeyi sağlayacak yeni en uygun pencere fonksiyonunu önerilmiştir [4]. Yapılan çalışmalarda kullanılan pencere fonksiyonları sahip oldukları bağımsız parametre özelliklerine göre sabit ve ayarlanabilir pencereler şeklinde iki kısma ayrılmaktadırlar. Sabit pencere fonksiyonu için fazlaca tercih edilen türler ve denklemleri [5]'de gösterilmiştir. Önerilen bu pencerelerin genel özellikleri olarak, sabit pencere uzunluğu yüzünden pencere fonksiyonu spektral parametrelerinden yalnızca birinin ayarlanması yapılabilmektedir. Sabit pencereler sahip oldukları bu özelliklerinden dolayı pratik uygulamalar için uygun yapılar değildir. Bu durumun üstesinden gelebilmek için ve spektral parametre değerlerinin değiştirilebilmesini sağlamak için ayarlanabilir pencereler önerilmiştir. Önerilen bu

pencere fonksiyonları sabit pencerelerdeki tek ayarlanabilir parametre değerinin aksine iki veya daha fazla parametre kullanılarak oluşturulan ayarlanabilir pencerelerdir.

Dolph tarafından yapılan çalışmada, ayarlanabilir parametre özelliğine sahip pencerenin iki önemli parametresi ile minimum analog genişliği sağlanmıştır [6]. Literatürde, iki parametrelili pencere ile ilgili Poisson, Cauchy, Gaussian gibi pek çok yaklaşım önerilmiştir [7]. Pencere fonksiyonu ve uygulama alanı olarak pek çok alanda tercih edilen iki parametrelili pencere, Kaiser tarafından önerilmiştir. Kaiser'in FIR filtre tasarımı üzerine yaptığı çalışmada, analog içerisinde maksimum enerjinin toplanması ilkesine dayalı olan yaklaşım sayesinde tasarlanan filtrenin Dolph-Chebyshev pencere kullanılarak tasarlanmış filtre ile karşılaştırıldığında daha başarılı sonuçlar verdiği görülmektedir [8]. Saramaki yaptığı çalışmada, Kaiser penceresine benzer bir yapı kullanılarak bu yapının ayırık fonksiyonunu geliştirmiştir. Geliştirmiş olduğu bu pencereyi, dikdörtgen pencere fonksiyonuna basit frekans dönüşümü uygulayarak elde etmiştir. Saramaki geliştirdiği bu pencere fonksiyonunu kullanarak tasarladığı FIR filtre ile durdurma bandı azalması bakımından Kaiser penceresi kullanarak tasarlanan FIR filtreden daha kullanışlı bir yapı elde etmiştir [9]. İki parametrelili pencereler ile ilgili yapılan çalışmalardan elde edilen pencere spektral cevapları Kaiser penceresinden daha iyi olmadığı için uygulamalarda fazlaca tercih edilmemişlerdir. Nuttall yaptığı çalışmasında, birçok farklı şartlar altında spektral parametrelerinden olan çok iyi yanlob davranışı ve en uygun özelliklere sahip pencere fonksiyonu geliştirmiştir [10]. Geliştirilen bu iki parametrelili pencere fonksiyonları, pencerenin analog genişliği, pencere uzunluğu ve dalgalanma oranı gibi spektral parametrelerinin ayarlanmasından sadece iki faktörün kontrolünü sağlamaktadır. Deczky tarafından geliştirilen ve üç parametrelili yeni pencere fonksiyonu olan ultraspherical fonksiyon, Gegenbauer veya Ultraspherical polinomları olarak bilinen ortogonal polinomların temeline dayanmaktadır. Geliştirilen bu pencere fonksiyonu ile yanlob azalması, fonksiyona eklenen parametre yardımıyla kontrol edilmektedir [11]. Ultraspherical pencere fonksiyonunun detaylı bir şekilde analizi Bergen ve Antoniou tarafında yapılmıştır [12,13]. Bergen ve Antoniou tarafından yapılan bu çalışmalarda, geliştirdikleri pencere fonksiyonun elde edilmesi amacıyla bahsetmişlerdir. İki parametrelili pencerelerin yalnızca analog genişliği ve dalgalanma oranı gibi parametrelerin kontrolünde kullanılırken, yanlob azalma oranının değiştirilmesinde bu

pencerelerin yetersiz kaldıklarını ve önerilen yeni pencere fonksiyonu yardımıyla bu sorunun ortadan kaldırılmasını sağlamışlardır. Makale çalışmalarında, pencere fonksiyonuna ait olan denklemleri deneysel olarak hesaplamaktadırlar. Geliştirilen bu pencere fonksiyonunun aynı zamanda sayısal hüzmeleme ve görüntü işleme gibi diğer uygulamalar için de kullanışlı olduklarını belirtmişlerdir. Bergen ve Antoniou tarafından yapılan diğer çalışmalarda [14,15], Ultraspherical pencereyi tekrarsız sayısal filtre tasarımında kullanmışlardır. Etkili bir sayısal filtre tasarımının, etkili pencere katsayı değerlerinin hesaplama sayısının azalmasını sağlayarak veya filtre uzunluğunun ve pencere bağımsız parametrelerinin uygun filtre türleri için deneysel olarak bulunarak gerçekleştirilebileceklerini belirtmişlerdir. Geliştirilen pencere ile elde edilen sonuçların Kaiser ve Dolph-Chebyshev pencere kullanılarak tasarlanan filtre derecesinden daha düşük olduğunu göstermişlerdir. Aynı zamanda bu pencere fonksiyonu yardımıyla tasarlanan filtrenin aynı filtre derecesi ile literatürdeki diğer pencere fonksiyonları kullanılarak tasarlanan filtrelere göre geçirme bandı dalgalanmasının azalmasını, durdurma bandı zayıflamasının artmasını sağlamışlardır. Avcı ve Nacaroglu'nun yapmış oldukları çalışmada, ayarlanabilir pencere fonksiyonuna yeni bir yaklaşım getirilerek üstel pencere fonksiyonu kullanımını önermişlerdir [16]. Geliştirilen yeni üstel pencere fonksiyonu, Kaiser penceresi denklemi temel alınarak türetilmiştir. Bu pencere yardımıyla elde edilen sonuçlardan, aynı pencere uzunluğu ve analob genişliği için daha kötü sonuçlar verirken, bazı uygulamalar için yararlı olacak olan yanlob azalma oranı bakımından başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Avcı ve Nacaroglu'nun yaptıkları uygulamada ise, geliştirilen pencere fonksiyonunun FIR filtre tasarımı için kullanmışlardır. Çalışmalarında, yanlob azalma oranı bakımından başarılı sonuçlar alındığını göstermişlerdir [17]. Avcı ve Nacaroglu önerdikleri yeni pencere fonksiyonunu, Kaiser penceresine eklenen üçüncü bir parametre ile oluşturmuşlardır. Bu çalışmalarında yazarlar, geliştirdikleri pencere fonksiyonunun literatürdeki diğer pencereler (ultraspherical, Saramaki, Kaiser ve Dolph-Chebyshev) ile kıyaslamasını yapmışlar ve sabit pencere uzunluğu için minimum durdurma bandı zayıflamasında başarılı sonuçlar verdiğini ispatlamışlardır [18]. Avcı ve Nacaroglu'nun yaptıkları bir başka çalışmada, Kaiser penceresinden türetilen ancak zaman bölgesi fonksiyonunda güç serisi açılımı içermeyen pencere fonksiyonunu geliştirmişlerdir. Yaptıkları FIR filtre tasarımı uygulamasında ise, yöntemi diğer pencereler ile aynı pencere uzunluğu ve normalize edilmiş analob

genişliği için dalgalanma oranı, yanlob azalma oranları bakımından karşılaştırmışlardır. Elde edilen sonuçlardan, Hamming penceresi eklenerek geliştirilen pencere ve Kaiser penceresine eklenmiş Hamming penceresi ile performans karşılaştırılmasında daha iyi dalgalanma oranı sağladığını tespit etmişlerdir. Önerilen yöntemin, genişletilmiş analob genişliği ve daraltılmış yanlob azalma oranı bakımından üç parametrelili ultraspherical pencere fonksiyonundan dalgalanma oranı bakımından daha iyi sonuç verdiğini göstermişlerdir [19,20]. Dalgalanma oranı spektral parametresini geliştirmek için [19,20]'de önerilen çalışmalarına ekledikleri yeni parametre ile sağlamışlardır [21]. Eklenen yeni parametrenin uygun değer seçilmesiyle daha iyi bir dalgalanma oranı ve kontrast oranı bakımından başarılı sonuçlar elde etmişlerdir.

Pencere parametre değerlerinin belirlenmesinde son zamanlarda akıllı hesaplama yöntemleri kullanılmaktadır. Kaya ve İnce, pencere katsayı değerlerinin hesaplanmasında evrimsel hesaplama yöntemlerinden bir olan Genetik Algoritma (GA) kullanımını önermişlerdir. Bu yöntemle bulunan sonuçlar Kaiser penceresi genlik spektrumu ile karşılaştırılmış ve yanlob azalma oranı bakımından daha başarılı sonuçlar elde etmişlerdir [22, 23]. Kaya ve İnce tarafından yapılan başka bir çalışmada ise, [22] çalışması yardımıyla elde edilen sonuçlar FIR filtre tasarımında kullanılarak yanlob azalma oranı daha yüksek olan bir filtre genlik spektrumu elde etmişlerdir [24].

Bir boyutlu filtre tasarımı için geliştirilen pencere fonksiyonu yaklaşımı iki boyutlu filtre tasarımında da kullanılmıştır. Bu amaçla literatürde fazlaca çalışmalar yapılmıştır. İki boyutlu pencere fonksiyonu için ilk kabul edilebilecek çalışma Huang tarafından önerilmiştir. Yapılan bu çalışmada dairesel simetrik ilkesine dayalı olan yaklaşımda, iyi tasarlanmış bir tek boyutlu pencere fonksiyonu ile iyi özellikler gösterebilecek iki boyutlu bir pencere fonksiyonunun tasarlanabileceği gösterilmiştir [25]. Speake ve Mersereau çalışmalarında, iki boyutlu pencere fonksiyonu tasarımı için Kaiser ve Huang tarafından önerilen yaklaşımların karşılaştırmalarını yapmış ve pencere tasarımında kullanılacak denklemlerin çıkarımını gerçekleştirmişlerdir [26]. Speake ve Mersereau'nun bir başka çalışmalarında [26]'da önerdikleri pencere tasarım denklemlerini daha iyi hale getirmişlerdir [27]. McClellan çalışmasında, iki boyutlu filtre tasarımında bir boyutlu pencere fonksiyonuna dönüşüm uygulayarak iki boyutlu pencere fonksiyonu elde etmiş ve bunu

filtre tasarımında kullanmıştır [28]. Yu ve Mitra yaptıkları çalışmada, McClellan'ın [28]'da yaptığı tek sayılı uzunluk durumunu çift uzunluklu durum için yine aynı McClellan dönüşümünü kullanarak gerçekleştirmişlerdir [29]. Lu ve Yeh çalışmalarında, McClellan dönüşümü katsayılarının hesaplanmasında ve bir boyutlu prototip filtrenin kesim frekansını belirlemede tekrarlı sonlu kare yaklaşımı kullanımını önermişlerdir [30]. İki boyutlu filtre tasarımı için bir başka yaklaşım Antoniou ve Lu tarafından yapılmış ve Huang tarafından önerilen iki boyutlu pencere fonksiyonun ayrık zaman karşılığını geliştirmişlerdir [31]. Ayrıca, tekrarlı ve tekrarsız sayısal filtre tasarımında çeşitli çalışmalar yapılmıştır [32-34]. Shpak çalışmasında, uygun dönüşüm ve pencereleme kullanılarak filtre tasarımında en iyi sonuçlar elde edilememesinden dolayı yeni basit bir dönüşüm geliştirmiştir. İki boyutlu filtre tasarımı için gerekli olan, iki boyutlu filtre ile aynı uzunlukta optimum bir boyutlu filtre ve buna uygun z-dönüşümü ve filtreleme işlemleri gerekmektedir. Bu işlemlerin fazlalığı yerine geliştirilen dönüşüm ile daha hızlı olarak iki boyutlu filtre tasarımını gerçekleştirmiştir [35].

Bir boyutlu filtre yaklaşımında olduğu gibi iki boyutlu filtre tasarımında da akıllı hesaplama teknikleri kullanılmaktadır. Mladenov ve Mastorakis makalelerinde, iki boyutlu sayısal filtre tasarımında sinir ağları kullanımını önermişlerdir. Geliştirdikleri yöntem, yonteme eklenen kararlılık kriteri ile tasarlanan filtrenin kararlılığını garanti etmekte, sinir ağı kullanımıyla hesaplama hızı arttırılmakta ve filtre uygulamasını basitleştirmektedir [36]. Mastarakis ve

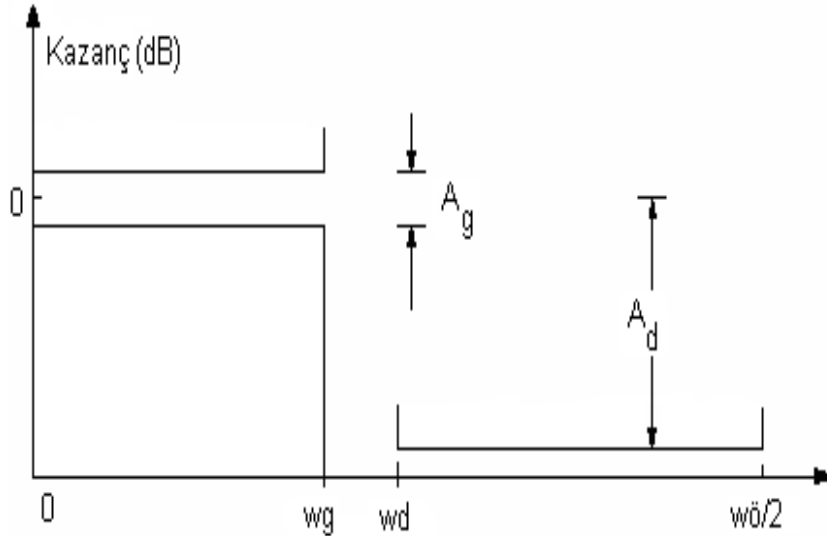
diğ. yaptıkları bir diğer çalışmada, [36]'da ki çalışmalarına benzer bir yol izlemiş, akıllı hesaplama tekniği olarak GA kullanmışlardır [37]. Tsai ve diğ. yaptıkları makale çalışmasında, hybrid Taguchi-genetic algorithm (HTGA) olarak isimlendirilen yeni genetik algoritma ile iki boyutlu tekrarlı sayısal filtre tasarımı problemini çözmeyi önermişlerdir [38]. Bu yöntem sayesinde kullanılan GA daha güçlü, hızlı yakınsama ve istatistiksel olarak doğru olmasını sağlamışlardır. Tsai ve diğ. yaptığı çalışmada, [38]'de kullandıkları yöntemdeki GA'nın kromozomlarının seçiminde farklı bir yöntem uygulayarak geliştirilmiş genetik algoritma kullanımını önermişlerdir [39].

2. Sayısal Filtreler

Sayısal işaret işleme alanlarında istenilen özelliklerdeki çıkış işaretini elde edebilmek için tercih edilen yazılımsal veya donanımsal yapılara sayısal filtre adı verilmektedir. Bu alanlarda kullanılan sayısal filtreler bir ve iki boyutlu sayısal filtreler şeklinde iki gruba ayrılmaktadırlar.

2.1. Bir Boyutlu Sayısal Filtreler

Filtreler, impuls cevaplarına göre FIR ve IIR filtreler şeklinde iki grupta incelenmektedirler. Hem FIR hem de IIR filtrelerin birbirlerine göre avantaj ve dezavantajları bulunmaktadır. FIR olarak tasarlanacak bir filtre tekrarlı veya tekrarsız yapı kullanarak tasarlanabilmektedir. Ancak tekrarlı olarak tasarlanacak FIR filtre daima kararlı ve lineer faz cevabına sahip olacaktır. Bir sayısal filtre genlik cevabı karakteristiği ve özellikleri şekil 1' de gösterildiği gibidir [40].



Şekil 1. Filtre genlik özellikleri

Şekilde;

- w_g = geçirme bandı frekansı
- w_d = durdurma bandı frekansı
- w_0 = örnekleme frekansı
- A_g = geçirme bandı dalgalanması
- A_d = durdurma bandı zayıflamasını gösterilmektedir.

Sayısal filtre tasarımında temel amaç, istenilen özellikleri sağlayacak genlik cevabının yukarıda ifade edilen şartlar içerisinde olmasını sağlayacak filtre transfer fonksiyonu katsayı değerlerinin hesaplanması şeklindedir.

İstenilen genlik karakteristiğini sağlayacak olan filtre, tekrarsız olarak gerçekleştirilirken sisteme ait giriş-çıkış ilişkisini gösteren transfer fonksiyonu,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \quad (1)$$

denklemi yardımıyla ifade edilmektedir. Sonuç, elde edilen filtrenin impuls cevabının $-\infty$ dan başlayıp ∞ 'a kadar devam ettiğini gösterir. Bu durumda da filtre fiziksel olarak gerçekleştirilemez. Bir filtrenin fiziksel olarak gerçekleştirilebilmesi için bu impuls cevabının sınırlı sayıda ve sistemin nedensel olması gerekmektedir. Denklem 1'de impuls cevabının sınırlı sayıda olabilmesi için belirli bir gecikmeyle çarpılması gerekmektedir. Böylelikle sonsuz uzunluğa sahip olan sayısal filtre sonlu sayıda bir impuls cevabına sahip olacaktır. N terim için FIR filtre transfer fonksiyonu denklemi ise, $e^{j\omega} = z$ yazılırsa,

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n]z^{-n} \quad (2)$$

şeklinde elde edilir.

2.2. İki Boyutlu Sayısal Filtreler

İki boyutlu sayısal filtre tasarım adımları tek boyutlu sayısal filtre tasarımında olduğu gibi, sisteme uygun şekilde yaklaşım, gerçekleştirme, uygulanması ve sistemin quantalama hatasının belirlenmesi şeklindedir. Bu işlem adımları sayısal bir sistemin hayata geçirilmesinde de izlenen yoldur.

İki boyutlu olarak tasarlanan bir filtre tek boyutlu filtre de olduğu gibi tekrarlı veya tekrarsız olarak iki şekilde gerçekleştirilebilmektedir. Tekrarsız olarak

tasarlanan iki boyutlu filtre aşağıdaki üç faktörü sağlayacaktır.

- iki boyutlu sayısal filtre daima kararlı olacak
- sistem lineer faz cevabına sahip olacak
- sınırlı impuls cevaplarından dolayı hızlı Fourier dönüşümü yardımıyla gerçekleştirilebileceklerdir [41].

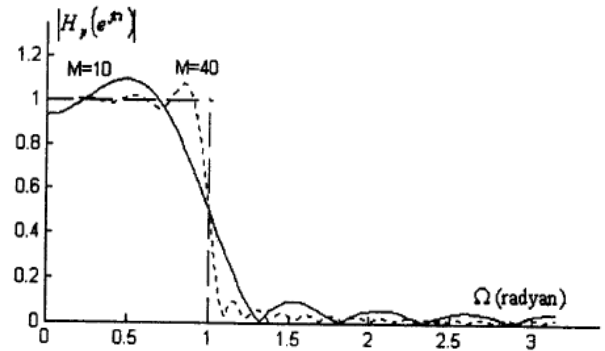
Bir boyutlu filtre transfer fonksiyonuna benzer olarak iki boyutlu filtre transfer fonksiyonu,

$$H_2(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} h_2(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} \quad (3)$$

şeklindedir. Denklem sonsuz sayıda terim içerdiği için yapının tasarlanması imkânsız olacaktır. Sınırlı sayıda eleman değeri alınarak elde edilen nedensel bir filtreye ait geliştirilmiş iki boyutlu filtre transfer fonksiyonu,

$$H_2'(z_1, z_2) = z_1^{-(N_1-1)/2} z_2^{-(N_2-1)/2} H_2(z_1, z_2) \quad (4)$$

şeklinde ele edilir. Hem bir hem de iki boyutlu filtre tasarımında sınırlı sayıda eleman değerinin Fourier dönüşümünün alınmasıyla elde edilen transfer fonksiyonunda istenmeyen Gibbs salınımları meydana gelmektedir. Meydana gelen bu salınımlara ait genlik cevabı tek boyutlu filtre için şekil 2' de gösterilmiştir.



Şekil 2. Farklı uzunluğa sahip filtreler için Gibbs salınımları

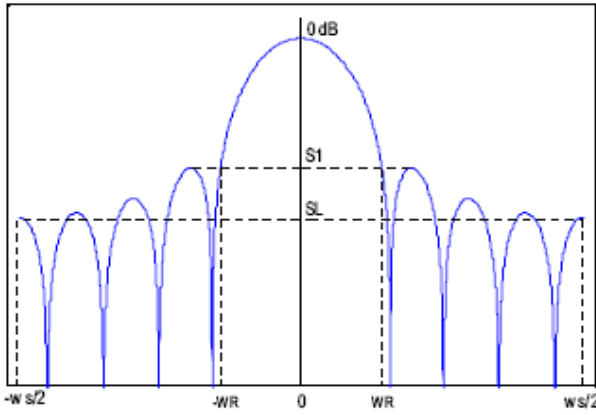
3. Pencere Fonksiyonları

FIR filtre tasarımında Fourier serisinin anlık kesilmesinden dolayı meydana gelen ve arzu edilmeyen bu salınımları ortadan kaldırabilmek için kullanılan yapılara pencere fonksiyonu adı

verilmektedir Genel olarak bir pencere fonksiyonu yardımıyla filtre tasarımı işleminde, filtrenin ideal genlik cevabı ile aynı uzunluğa sahip pencere fonksiyonu çarpılarak tasarlanmak istenen filtre katsayı değerleri elde edilmektedir. Bir boyutlu sayısal filtreler için bu durum denklem 5 ile ifade edilebilir.

$$h[n] = h_{id}[n]w[n] \quad (5)$$

Gibbs salınımlarını giderebilmek için kullanılan pencere fonksiyonlarının genel olarak spektral karakteristiği şekil 3'de gösterilmiştir



Şekil 3. Pencere fonksiyonu spektral gösterimi

Şekilde,

Analob genişliği = $2WR$

R = Maksimum yanlob genliği – analob genliği

S = Maksimum yanlob genliği – minimum yanlob genliği ile tanımlanmaktadır.

Pencere fonksiyonu tasarımı için önerilen yöntemler genel olarak yukarıda belirlenen spektral parametre değerlerinin daha iyi olmasını sağlamak amacıyla geliştirilmişlerdir. Geliştirilen bu fonksiyonlar

kullanılarak iyi tasarlanmış bir pencere fonksiyonu dolayısıyla filtreden arzu edilen karakteristik,

- ❖ analob genişliğinin dar olması
- ❖ dalgalanma oranının küçük olması
- ❖ yanlob azalma oranının geniş olması şeklindedir [40].

4. Yaygın Olarak Kullanılan Pencere Fonksiyonu Çeşitleri

Literatürde hem sayısal filtre tasarımı hem de farklı uygulamalar için farklı pencere fonksiyonu önermeleri yapılmıştır. Geliştirilen pencere fonksiyonları sahip oldukları parametrelere göre sabit ve ayarlanabilir pencereler şeklinde iki gruba ayrılmaktadırlar. Sabit pencere fonksiyonları sahip oldukları tek bir parametre (pencere uzunluğu) ile yalnızca pencere fonksiyonunun analob genişliğini ayarlayabilmektedir. Ayarlanabilir pencereler ise sahip oldukları iki veya daha fazla parametre ile sabit pencerelerde olduğu gibi pencere uzunluğu ile analob genişliğini ayarlayabilmekte, diğer parametreler yardımıyla da diğer pencere spektral parametrelerini ayarlayabilmektedirler

4. 1. Sabit Pencere Fonksiyonları

Bu türden pencere fonksiyonları yaygın olarak sinyal işleme uygulamalarında tercih edilmektedir. Yaygın olarak kullanılan bu tür pencereler, Dikdörtgen, Hamming, Hann, Blackman, Bartlett v.s. gösterilebilir. Bu fonksiyonlara ait denklemler aşağıdaki gibidir [40, 5].

$$\text{Dikdörtgen: } w[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{Hamming: } w[n] = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{Hann: } w[n] = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1}, & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{Blackman: } w[n] = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1}, & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{Bartlett: } w[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N-1}, & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (10)$$

Sabit pencere fonksiyonlarının bir tek parametreye sahip olmalarından dolayı diğer pencere spektral parametrelerin ayarlanmasında kullanılmamaktadırlar. Bunların yerine daha fazla parametreye sahip ayarlanabilir pencere fonksiyonları geliştirilmiştir.

4. 2. Ayarlanabilir Pencere Fonksiyonları

Literatürde kullanılan ve çok fazla tercih edilen ayarlanabilir pencere fonksiyonları Dolph-Chebyshev, Kaiser, Saramaki, ve Ultraspherical ile son zamanlarda geliştirilen Üstel, Cosh, modifiye edilmiş Cosh, modifiye edilmiş Kaiser gösterilebilir. Chebyshev polinomuna dayalı olan Dolph-Chebyshev fonksiyonu [6], pencere uzunluğu ve dalgalanma oranı şeklinde iki tane bağımsız parametreye sahiptir.

$$w[n] = \frac{1}{N} \left[\frac{1}{r} + 2 \sum_{i=1}^{(N-1)/2} T_{N-1} \left(x_0 \cos \frac{i\pi}{N} \right) \cos \frac{2ni\pi}{N} \right], \quad |n| \leq \frac{N-1}{2} \quad (11)$$

Burada

$$r = 10^{-R/20}$$

ve $x_0 = \cosh \left(\frac{1}{N-1} \cosh^{-1} \frac{1}{r} \right)$ dir. $T_k(x)$ fonksiyonu

ise birinci tür k. dereceden Chebyshev polinomu olup,

$$T_k(x) = \begin{cases} \cos(k \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(k \cosh^{-1} x) & |x| \geq 1 \end{cases} \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Bessel fonksiyonuna dayalı olan Kaiser fonksiyonu [8] ise pencere uzunluğu (N) ve ayarlanabilir α_k parametrelerine sahiptir.

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0(\alpha_k \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2})}{I_0(\alpha_k)} & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (12)$$

Burada α_k ayarlanabilir parametre, $I_0(x)$ sıfır dereceli birinci tür geliştirilmiş Bessel fonksiyonu olup, güç serisi açılımı aşağıdaki gibidir.

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k} \left(\frac{x}{2} \right)^k \right]^2 \quad (13)$$

Saramaki tarafından önerilen [9] Saramaki pencere fonksiyonuna ait denklemler aşağıda gösterilmiştir.

$$w[n] = \begin{cases} \hat{w}(n) / \hat{w}(0), & |n| \leq (N-1)/2 \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (14)$$

Burada;

$$\hat{w}(n) = v_0(n) + 2 \sum_{k=1}^{(N-1)/2} v_k(n) \quad (15)$$

$$v_0(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (16)$$

$$v_1(n) = \begin{cases} \gamma - 1 & n = 0 \\ \gamma / 2 & |n| = 1 \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (17)$$

$$v_k(n) = \begin{cases} 2(\gamma - 1)v_{k-1}(n) - v_{k-2}(n) + \gamma[v_{k-1}(n-1) - v_{k-2}(n-1)] & |n| \leq k \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (18)$$

şeklinde dir. K. Avcı ve A. Nacarođlu tarafından [16-21] Kaiser penceresi denklemleri kullanılarak oluşturulan dört tip pencere fonksiyonu ise Üstel, Cosh, modifiye edilmiş Cosh ve modifiye edilmiş Kaiser pencereleridir.

$$w[n] = \begin{cases} \frac{\exp(\alpha_e \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2})}{\exp(\alpha_e)} & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (19)$$

Üstel pencere fonksiyonu Kaiser pencere fonksiyonunda sıfır dereceli birinci tür geliştirilmiş Bessel fonksiyonun ($I_0(x)$) yerine üstel fonksiyonu yazılarak elde edilmiştir.

Geliştirilen bir diğer pencere fonksiyonu ise cosh penceresi olup, üstel pencere fonksiyonuna benzer şekilde $I_0(x)$ fonksiyonu yerine benzer karakteristik

$$w[n] = \begin{cases} \frac{\cosh(\alpha_c \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2})}{\cosh(\alpha_c)} & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (20)$$

özellik gösteren cosh fonksiyonu yazılarak elde edilmiştir.

Cosh pencere fonksiyonuna yeni bir parametre (ρ_{mc}) eklenerek elde edilen ve üç parametrelili olan bu yeni

pencere fonksiyonu ise modifiye edilmiş cosh pencere fonksiyonudur.

$$w[n] = \begin{cases} \left(\frac{\cosh(\alpha_{mc} \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2})}{\cosh(\alpha_{mc})} \right)^{\rho_{mc}} & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (21)$$

Modifiye edilmiş Kaiser penceresi ise, Kaiser pencere fonksiyonu denklemine yeni bir parametre

(ρ_{mk}) eklenerek elde edilmiştir. Bu pencere fonksiyonuna ait denklem aşağıda verilmiştir.

$$w[n] = \begin{cases} \left(\frac{I_0(\alpha_{mk} \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1}\right)^2})}{I_0(\alpha_{mk})} \right)^{\rho_{mk}} & |n| \leq \frac{N-1}{2} \\ 0 & \text{diğer yerlerde} \end{cases} \quad (22)$$

Ultraspherical polinomuna dayalı olan ve üç bağımsız parametreye sahip olan (μ , x_μ ve N) Ultraspherical

pencere fonksiyonu için en genel tanım denklemini aşağıdaki gibidir [11-15].

$$w[nT] = \frac{A}{p-n} \binom{\mu+p-n-1}{p-n-1} \sum_{m=0}^n \binom{\mu+n-1}{n-m} \binom{p-n}{m} B^m \quad n=0,1,\dots,N-1 \quad (23)$$

Burada,

$$A = \begin{cases} \mu x_\mu^p & \mu \neq 0 \text{ için} \\ x_\mu^p & \mu = 0 \text{ için} \end{cases}, \quad B = 1 - x_\mu^{-2}, \quad p = N-1 \quad (24)$$

5. Pencere Fonksiyonlarının Performans Karşılaştırmaları

Bu bölümde, pencere spektral parametrelerin ayarlanmasında fazlaca tercih edilen ve sabit pencere fonksiyonu yerine iki veya daha fazla ayarlanabilir parametre özelliğine sahip ayarlanabilir pencere fonksiyonlarının performans karşılaştırmaları yapılmıştır. Karşılaştırma sonuçları, bölüm 3' te açıklandığı gibi iyi bir pencere tasarımı için gerekli olan analob genişliği, dalgalanma oranı ve yanlob azalma oranı gibi spektral parametreler bakımından yapılmaktadır.

Dolph-Chebyshev penceresi literatürdeki diğer pencerele göre minimum analob genişliği sağlayan bir özellik göstermektedir.

Kaiser penceresi ise sahip olduğu iki bağımsız parametre sayesinde analob içerisinde maksimum enerji toplama özelliğini sağlayan bir karakteristik göstermektedir. Ayrıca Dolph-Chebyshev penceresi ile karşılaştırıldığında FIR filtre tasarımında daha iyi sonuçlar sağladığı [8]'de sunulmaktadır.

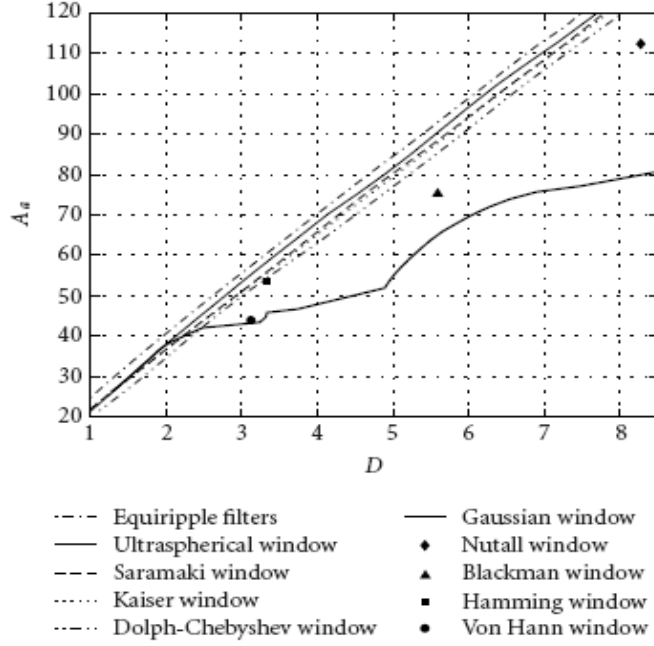
Saramaki tarafından önerilen yeni pencere fonksiyonunda ise, Kaiser penceresi tarafından sağlanan pencere spektral özelliklerinden durdurma

bandı azalması bakımından daha iyi bir sonuç sağladığı [9]' da gösterilmiştir.

Geliştirilen bu pencere fonksiyonların spektral özelliklerinden daha iyi sonuçlar elde edebilmek için yakın zamanlarda yeni pencere fonksiyonları literatüre sunulmuştur. Bunlardan ultraspherical

penceresi, sahip olduğu üç değişken ile daha iyi bir pencere spektral davranışı göstermektedir.

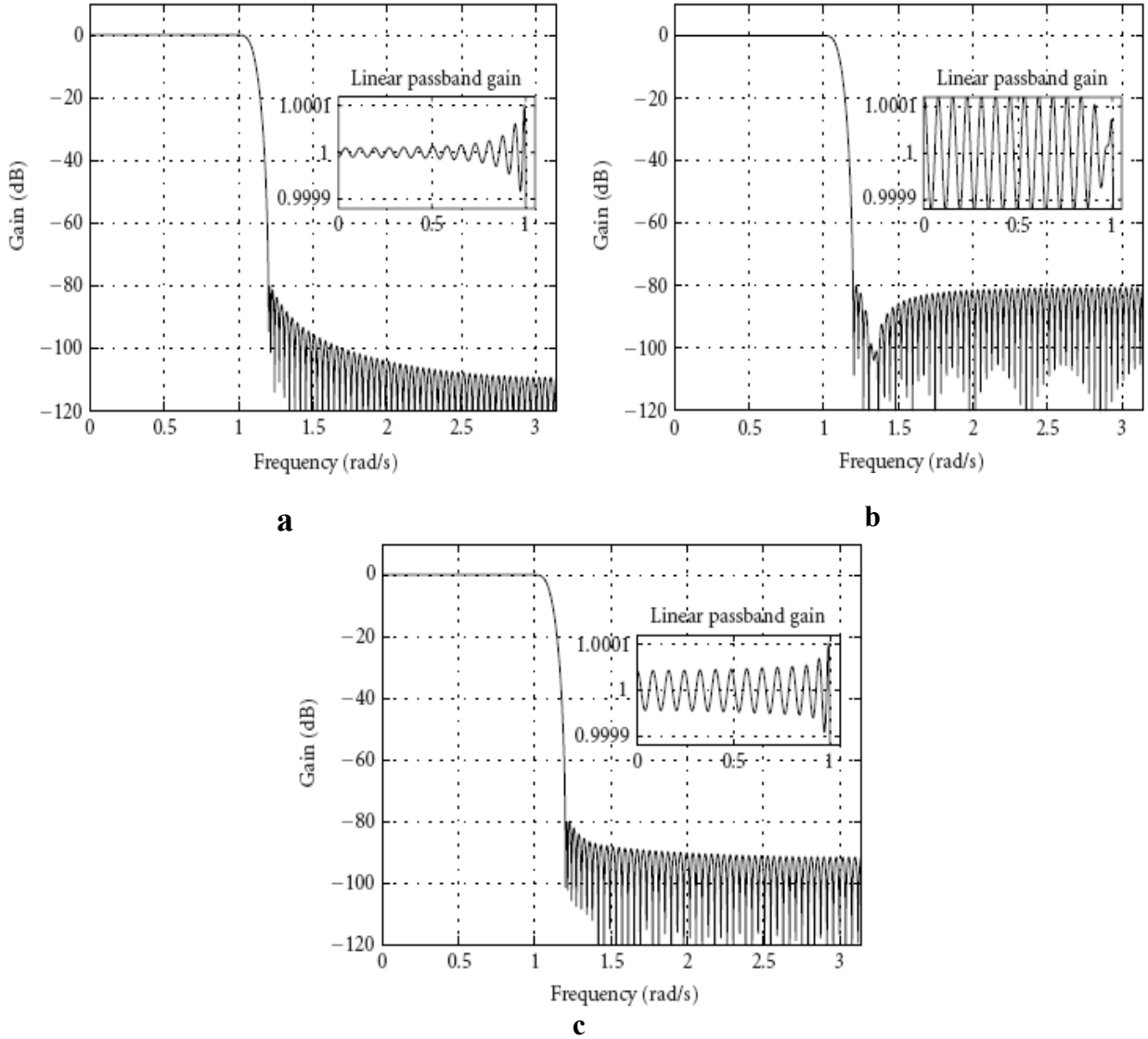
Ultraspherical penceresinin diğer ayarlanabilir pencere fonksiyonlarına göre performans sonuçları şekil 4'te gösterilmiştir [15].



Şekil 4. $N=127$ ve $W_c=0.4\pi$ rad/s ile farklı pencereler kullanılarak tasarlanmış filtreler için D'ye göre durdurma bandı azalması

Şekilden de görüldüğü gibi ultraspherical penceresi durdurma bandı azalmasında Kaiser penceresine göre 2.48 dB, Dolph-Chebyshev penceresine göre 4.29 dB ve Saramaki penceresine göre ise 2.21 dB'lik ortalama bir artış göstermektedir. Gaussian penceresi ise değer ayarlanabilir pencerelere göre şekilden de görüldüğü gibi çok zayıf bir sonuç vermektedir.

Alçak geçiren filtre tasarım uygulamasında ise Kaiser, Dolph-Chebyshev ve ultraspherical pencereleri ile karşılaştırma yapılmıştır. Burada ayarlanabilir parametreler sırasıyla $\alpha=7.857$, $\beta=2.803$, $\beta=2.574$ ve ultraspherical penceresi için ilave parametre $\mu=0.6173$ alınmıştır [15]. Elde edilen sonuçlar şekil 5'te gösterilmiştir.

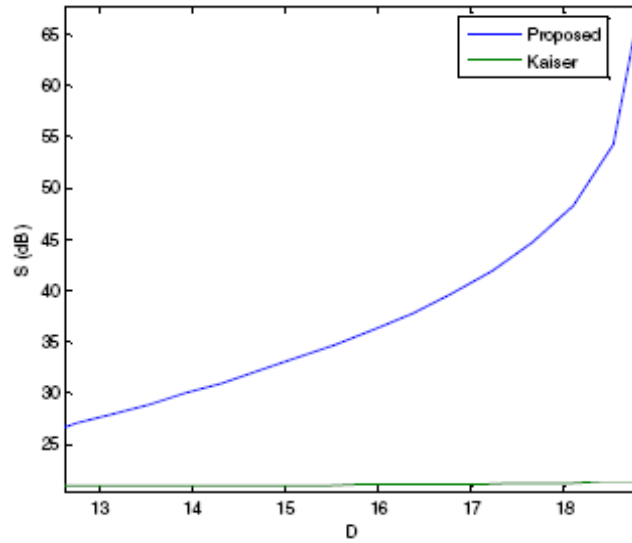


Şekil 5. Farklı pencereler kullanılarak tasarlanan alçak geçiren filtre genlik cevapları
a, Kaiser penceresi
b, Dolph-Chebyshev penceresi
c, Ultraspherical penceresi

İstenilen özellikleri sağlayacak filtre uzunluğu ise sırasıyla Kaiser penceresi için $N=159$, Dolph-Chebyshev penceresi için $N=165$ ve ultraspherical penceresi için ise $N=153$ olarak bulunmuştur. Buradan da ultraspherical penceresi kullanılarak

tasarlanan filtrede daha düşük filtre uzunluğu elde edildiği sonucuna ulaşılmıştır.

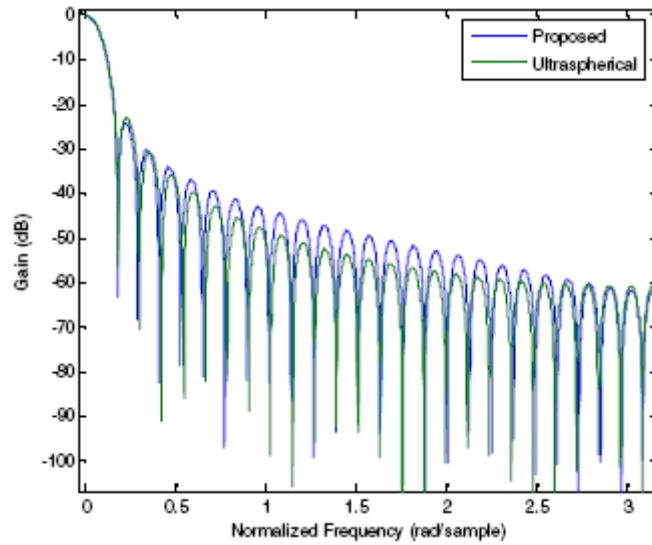
Kaiser penceresi denkleminde dayalı olarak türetilen üstel pencere fonksiyonunun Kaiser penceresi ile performansı karşılaştırıldığında daha iyi yanlob azalma oranı sağladığı şekil 6'da gösterilmiştir [16].



Şekil 6. N=51 için Kaiser ve Üstel pencerenin yanlob azalma oranı karşılaştırması

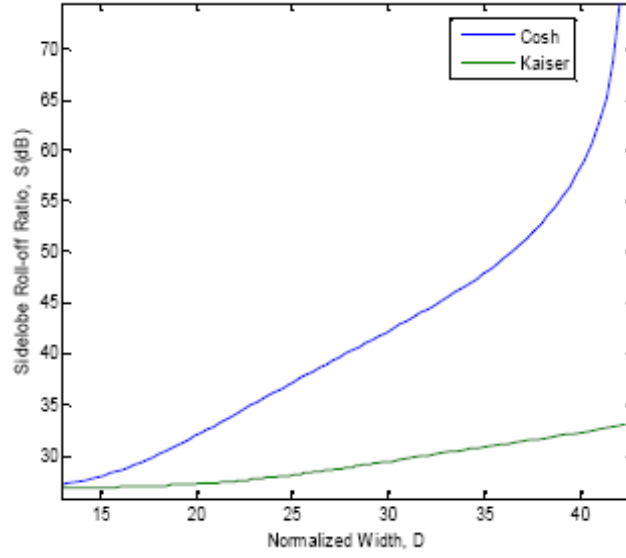
Üstel pencerenin aynı pencere uzunluğu, analob genişliği ve yanlob azalma oranı bakımından daha iyi sonuçlar verdiği ultraspherical penceresi ile

performans karşılaştırma sonuçları şekil 7'de verilmiştir.



Şekil 7. N=51 için darlaştırılmış analob genişliği ve genişletilmiş yanlob azalma oranı karşılaştırma sonucu

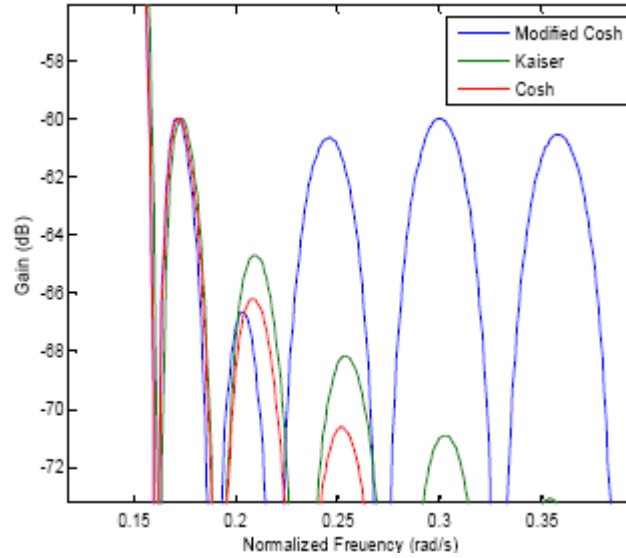
Üstel pencere fonksiyonunda I_0 yerine cosh yazılarak elde edilen cosh pencere fonksiyonunun Kaiser penceresi ile bazı uygulamalar için önemli olan yanlob azalma oranı bakımından daha iyi sonuç verdiği performans karşılaştırması sonucu şekil 8'de gösterilmiştir.



Şekil 8. $N=101$ için cosh ve Kaiser penceresi yanlob azalma oranı performans karşılaştırması

İlave parametre eklenerek elde edilen modifiye edilmiş cosh penceresinin Kaiser ve cosh pencereleri ile performans karşılaştırmasında her iki pencereden

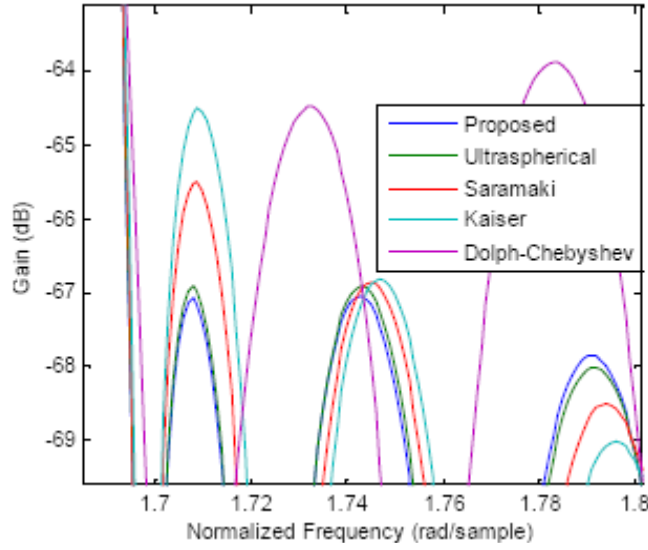
de daha iyi dalgalanma oranı verdiği şekil 9'da gösterilmiştir [21].



Şekil 9. $R=-60\text{dB}$, $w_R=0.158$ rad/s için modifiye edilmiş cosh, Kaiser ve cosh pencerelerin spektrum karşılaştırmaları

Kaiser penceresine parametre eklenerek elde edilen modifiye edilmiş Kaiser penceresi ve literatürde

kullanılan diğer pencere fonksiyonlarının performans karşılaştırmaları şekil 10'da gösterilmiştir [18].



Şekil 10. $N=101$ ve $w_c=0.5\pi$ için modifiye edilmiş Kaiser, ultraspherical, Saramaki, Kaiser ve Dolph-Chebyshev pencereleri performans karşılaştırması

Şekil 10'da modifiye edilmiş Kaiser penceresinin, en yüksek minimum durdurma bandı azalması sağladığı gösterilmiştir.

6. SONUÇ

Sayısal uygulamalarda kullanılan FIR sayısal filtrelerin tasarımında, arzu edilmeyen salınımları ortadan kaldırabilmek için pencere fonksiyonları kullanılmaktadır. Kullanılan bu pencereler sahip oldukları parametre değerlerine göre sabit ve ayarlanabilir parametrelilikte gruplandırılmış ve son yıllardaki çalışmalarda daha uygun pencere tasarımı için ayarlanabilir pencere fonksiyonları tercih edilmektedir. Akıllı hesaplama tekniklerinin problem çözme başarılarından dolayı günümüzde fazlaca tercih edilmektedirler.

Yapılan çalışma ile literatürde kullanılan pencere tasarım yöntemleri ve uygulama alanları araştırılarak yapılan çalışmalar sunulmuştur. Çalışma sayesinde, bu alanda yapılacak herhangi bir çalışma için neler yapıldığı gösterilmiş, günümüz ve gelecek çalışma alanları hakkında araştırmacılara bilgiler verilmiştir.

7. KAYNAKLAR

1. J.W. Gibbs, Fourier series, s. 200-606 (1899).
2. L. Fejer, Sur les fonctions bornées et intégrables, Comptes Rendus Hebdomadaires, Seances de l'Academie de Sciences, Paris, 131 984-987 (1900).
3. C. Lanczos, Applied Analysis. Van Nostrand, Princeton, NJ. (1956).
4. J.W. Adams, A new optimal window. IEEE Transactions on Signal Processing. 39 (8) (1991) 1753-1769.
5. S.J. Mitra, Digital Signal Processing A Computer-Based Approach, s-972, McGraw-Hill International Edition, (2006), Singapore.
6. C.L. Dolph, A current distribution for broadside arrays which optimizes the relationship between beamwidth and side-lobe level, Proc. IRE, 34 335- 348 (1946) June.
7. F.J. Harris, On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform. Proc. IEEE. 66 51-83 (1978).
8. J.F. Kaiser, Nonrecursive digital filter design using I_0 -sinh window function. Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems (ISCAS'74), San Francisco, Calif., USA, 20-23 (1974) April
9. T. Saramaki, A class of window functions with nearly minimum sidelobe energy for designing FIR filters. Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and systems (ISCAS'89), Portland, Ore, USA, 359-362 (1989) May, 1.
10. Nuttall, A. H., Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior, IEEE Transactions on

- Acoustics, Speech, and Signal Processing, 29 (1) 84-91 (1981).
11. A.G. Deczky, Unispherical Windows, IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems. Sydney, Australia, May, 2 85-88 (2001).
 12. S.W.A. Bergen, A. Antoniou, Generation of Ultraspherical window functions, in XI European Signal Processing Conference, Toulouse, France, September, 2 607-610 (2002).
 13. Bergen, S.W.A., Antoniou, A., Design of Ultraspherical Window Functions with Prescribed Spectral Characteristics, EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 13 2053-2065 (2004).
 14. S.W.A. Bergen, A. Antoniou, Nonrecursive Digital Filter Design Using the Ultraspherical Window, IEEE Pacific Rim Conference On Communications, Computers, And Signal Processing, 260-263 (2003), August 28-30.
 15. Bergen, S.W.A. and Antoniou, A., Design of Nonrecursive Digital Filters Using the Ultraspherical Window Function, EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 12 1910-1922 (2005).
 16. K. Avci, A. Nacaroglu., A new window based on exponential function, IEEE Ph.D. Research in Microelectronics and Electronics (PRIME 2008). June. Istanbul, Turkey, 69-72 (2008).
 17. K. Avci, A. Nacaroglu., Kaiser Yaklaşımı Kullanılarak Oluşturulan Üstel Pencereyle Yinelemesiz Sayısal Süzgeç Tasarımı, Çukurova Üniversitesi Mühendislik –Mimarlık Fakültesi 30. Yıl Sempozyumu, Adana, 274-279 (2008) 16-17-Ekim.
 18. K. Avci, A. Nacaroglu., High Quality Low Order Nonrecursive Digital Filter Design Using Modified Kaiser Window, Proc. of 6th Symposium on Communication Systems, Networks and Digital Signal processing (CSNDSP'08). July. Graz, Austria, 239-242 (2008).
 19. K. Avci, A. Nacaroglu., Cosine hyperbolic window family with its application to FIR filter design. Proc. of Third International Conference on Information and Communication Technologies (ICTTA'08). April. Damascus, Syria, 289-290 (2008).
 20. Avci, K. and Nacaroglu, A., Cosh window family and its application to FIR filter design, International Journal of Electronics and Communications-AEU, 63 906-917 (2009).
 21. K. Avci, A. Nacaroglu, Modification of Cosh window family. Proc. of Third International Conference on Information and Communication Technologies (ICTTA'08), Damascus, Syria, 291-292 (2008), April.
 22. T. Kaya, M.C. İnce, The Calculation of Adjustable Window Parameters With Helping GA, Applied Automatic Systems (AAS'2009), Ohrid, Republic of Macedonia, 135-138 (2009) September 26-29.
 23. T. Kaya, M.C. İnce, Yüksek Performanslı Pencere Fonksiyonlarının Genetik Algoritma Yardımıyla Gerçekleştirilmesi, 3. Haberleşme Teknolojileri ve Uygulamaları Sempozyumu, (HABTEKUS'09) 235-238 (2009) 9-11 Aralık.
 24. T. Kaya, M.C. İnce, The FIR Filter Design By Using Window Parameters Calculated With GA, Soft Computing, Computing with Words and Perceptions in System Analysis, Decision and Control- (ICSCCW 2009), 1-4 (2009) September 2-4.
 25. T.S. Huang, Two-Dimensional Windows, IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, 88-89 (1972) March.
 26. T. C. Speak, R.M. Mersereau, A Comparison of Different Window Formulations for Two-Dimensional FIR Filter Design, in IEEE Acoust., Speech, Signal Processing Conf. Rec., 5-8 (1979) April.
 27. T. C. Speak, R.M. Mersereau, A Note on the Use of Windows for Two-Dimensional FIR Filter Design, IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, ASSP-29, 125-128 (1981), August.
 28. J. H. McClellan, The design of two dimensional digital filters by transformation, in Proc. 7th Annu. Princeton Conf. Inform. Sci. Syst., 247-251 (1973).
 29. Yu, T.H., Mitra, S. K., A New Two-Dimensional Window, IEEE Transaction on Acoustics, Speech, and Signal Processing., 33 (4) 1058- 1061 (1985).
 30. Lu, H. C., Yeh, K.H., Optimal design of 2-D FIR digital filters by scaling-free McClellan transformation using least-squares estimation, Signal Processing, 58 (1997) 303-308.
 31. Antoniou, A., Lu, W.S., Design of 2-D nonrecursive filters using of the window method, IEE Proceedings, 137 (4) 247- 250 (1990).
 32. Bernabo, F., Emiliani, P.L., Design of 2-dimensional recursive digital filters, Electronics Letters, 12 (11) 288-289 (1976) May-27.
 33. Hu, J. V., Rabiner, L. R., Design Techniques for Two Dimensional Digital Filters, IEEE Transaction on Audio and Electroacoustics, 20 (4) 249- 257 (1972).
 34. Charalmbous, C. Design of 2-dimensional circularly-symmetric digital filters, IEE Proceedings, 129 (2) 47-54 (1982).

35. D. J. Shpak, A Transformation Method for the Design of Two-Dimensional Circularly-Symmetric FIR Digital Filters, IEEE International Symposium on Circuits and System, 2475-2478 (1991).
36. Mladenov, V. M., Mastorakis, N. E., Design of Two-Dimensional Recursive Filters by Using Neural Networks, IEEE Transactions on Neural Networks, 12 (3) 585-560 (2001).
37. Mastorakis, N. E., Gonos, L. F., Swamy, M.N.S., Design of Two-Dimensional Recursive Filters Using Genetic Algorithm, IEEE Transactions on Circuit and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 50 (5) 34-639 (2003).
38. J.T. Tsai, J.H. Chou, T.K. Liu, C.H. Chen, Design of Two-Dimensional Recursive Filters by Using a Navel Genetic Algorithm, IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS-2005), 2603-2606 (2005).
39. Tsai, J.T. Ho, W. H., Chou, J.H., Design of two-dimensional IIR digital structure-specified filters by using an improved genetic algorithm, Expert Systems with Applications, 36 6928-6934 (2009).
40. K. Avci, Design of High-Quality Low order Nonrecursive Digital Filters Using the Window Functions, PH. D. Thesis in University of Gaziantep, (2008) Gaziantep.
41. W. S. Lu, A. Antoniou, Two-Dimensional Digital Filters, s.397, Marcel Dekker Inc. (1992) New York.