Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi **25** (1-2) 479 - 489 (2009)
http://fbe.erciyes.edu.tr/
ISSN 1012-2354

GENELLEŞTİRİLMİŞ EULER SABİTİ İLE ARDIŞIK ASALLAR ARASINDAKİ İLİŞKİ

İ. ADALAR[1,*]
Vali Varinli Caddesi .Atınış Apt. No: 41/7 58040/ SİVAS

ÖZET

Bu çalışmada, [1]'de bulunan bazı sonuçlar farklı bir şekilde elde edilmiştir. Ayrıca, bu sonuçlar kullanılarak ardışık asallar arasındaki farklar incelenmiş ve $\Delta < 1$ bulunmuştur.

$$\lim_{r\to\infty} \inf\left(\frac{p_{r+2}-p_{r+1}}{\ln(p_{r+1})}\right) = \Delta$$

Anahtar Kelimeler: Euler sabiti, Ardışık asalların farkı.

THE RELATION BETWEEN GENARALIZED EULER CONSTANTS AND CONSECUTIVE PRIMES

ABSTRACT

In this study, we discussed some results of [1] in an alternative way. Additionally, by using these results the differences between consecutive primes is studied and $\Delta < 1$ is found.

$$\lim_{r\to\infty} \inf\left(\frac{p_{r+2}-p_{r+1}}{\ln(p_{r+1})}\right) = \Delta$$

Keywords: Euler constant, Difference of consecutive primes.

***E-Posta:** i.adalar@hotmail.com

1. GİRİŞ

$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right\}=\gamma$ olmak üzere, $\gamma=0,5772156...$ Euler-Mascheroni sabiti olarak

bilinir. Bu sabit, asal sayılar kullanılarak genelleştirilmiştir [1].

$\{p_1, p_2, ..., p_r\}$:ilk r asal sayı ,

$\prod_{i=1}^{r} p_i=\delta$ ve $\sigma_r=\prod_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{p_i})$ olsun.

$$\text{p(n)}=\begin{cases}1, & (n,\delta)=1,\\ 0, & (n,\delta)\neq 1,\end{cases}$$ olmak üzere,

$$\gamma_r=\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x}\frac{p(n)}{n}-\sigma_r.\ln(x)\right) \quad . \tag{1}$$

(1) kullanılarak ,

$A_r=(\gamma+\sum_{i=1}^{r}\frac{\ln(p_i)}{p_i-1})$ olmak üzere,

$$\gamma_r=\sigma_r\cdot A_r \tag{2}$$

$$\gamma_r=\gamma_{r-1}-\frac{\gamma_{r-1}}{p_r}+\sigma_{r-1}\cdot\frac{\ln(p_r)}{p_r} \tag{3}$$

sonuçları bulunmuştur.

$\gamma_{r+1}<\gamma_r$ ve $\gamma_{r+1}>\gamma_r$ eşitsizliklerinin sonsuz sayıda r değeri için sağlandığı gösterilmiştir [1]. (4)

Teorem 1:

$\{p_1, p_2, ..., p_r, p_{r+1}\}$: ilk r+1 asal sayı , $\prod_{i=1}^{r} p_i = \delta$ ve $\prod_{i=1}^{r+1} p_i = \beta$ olsun.

p(n)= $\begin{cases} 1, & (n,\delta) = 1, \\ 0, & (n,\delta) \neq 1, \end{cases}$ $\sum_{n=\delta}^{\beta} \frac{p(n)}{n}$=y toplamı için $\lim_{r\to\infty} y = e^{-\gamma}$ dır.

Teorem 2:

p_{r+1} ve p_{r+2} ardışık asallar olmak üzere, $\Delta = \lim_{r\to\infty} \inf(\frac{p_{r+2} - p_{r+1}}{\ln(p_{r+1})}) < 1$ dır.

Teorem 1, bu çalışmanın 2. kesiminde ispatlanmıştır. 3. kesimde (3) sonucu farklı bir şekilde bulunmuştur.

Bu çalışmanın 4.kesiminde (2), (3) ve (4) sonuçları kullanılarak Teorem 2 ispatlanmıştır.

$\lim_{r\to\infty} \inf(\frac{p_{r+2} - p_{r+1}}{\ln(p_{r+1})}) = \Delta$ olsun,

Δ<1 için ilk şartsız ispat [2]'de gösterilmiştir. Bu sonuç, [3]'de Δ<0,4665… değerine, [5]'de Δ<0,2484… değerine geliştirilmiştir.

Son olarak, [3]'de Δ=0 gösterilmiştir.Bu çalışmada Δ<1 için yeni bir ispat verilmiştir.

2. İLK R TANE ASAL İLE ARALARINDA ASAL OLAN SAYILARIN TERSLERİNİN TOPLAMI

$\{p_1, p_2, ..., p_r\}$:ilk r asal sayı , $\prod_{i=1}^{r} p_i = \delta$ olmak üzere, p(n)= $\begin{cases} 1, & (n,\delta)=1, \\ 0, & (n,\delta)\neq 1, \end{cases}$ $\sum_{n=\delta}^{\delta.z}\frac{p(n)}{n}$=y ve $z\in Z$, z >1 olsun.

y toplamını $\forall z>1$ için bulalım.

$\phi(\delta)=\delta.\prod_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{p_i})$ ϕ : *Eulerfonksiyonu* olmak üzere,

$c_i<\delta$ $(c_i,\delta)=1$ i=1,2,…., $\phi(\delta)$ $\phi(\delta)=k$ olsun

c_1 ile δ aralarında asal olduğu için $\delta-c_1$ ile δ aralarında asaldır.

$c_1+c_k=\delta$ $c_2+c_{k-1}=\delta$ $c_3+c_{k-2}=\delta$ ..... $c_{\frac{k}{2}}+c_{\frac{k}{2}+1}=\delta$

$$\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_k}=\frac{\delta}{c_1\cdot c_k}=d_1$$

$$\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_{k-1}}=\frac{\delta}{c_2\cdot c_{k-1}}=d_2$$

………………

$\frac{1}{c_{\frac{k}{2}}}+\frac{1}{c_{\frac{k}{2}+1}}=d_{\frac{k}{2}}$ olsun.

$(c_i+\delta,\delta)=1$ özelliğini kullanarak y toplamını bulalım.

$$\frac{1}{c_1+\delta}+\frac{1}{c_k+\delta}=\frac{3.\delta}{c_1.c_k+(c_1+c_k)\delta+\delta^2}=\frac{3.\delta}{c_1.c_k+2.\delta^2}=\frac{3}{\frac{c_1.c_k}{\delta}+2\delta}=\frac{3.d_1}{1+2.\delta\, d_1}$$

$$\frac{1}{c_1+2.\delta}+\frac{1}{c_k+2.\delta}=\frac{5.\delta}{c_1\cdot c_k+6.\delta^2}=\frac{5.d_1}{1+6.\delta.d_1}$$

$$\frac{1}{c_1+3.\delta}+\frac{1}{c_k+3.\delta}=\frac{7.\delta}{c_1\cdot c_k+12.\delta^2}=\frac{7.d_1}{1+12.\delta.d_1}$$

……………

$$\frac{1}{c_1+(z-1).\delta}+\frac{1}{c_k+(z-1).\delta}=\frac{(2.(z-1)+1)\,d_1}{1+((z-1)^2+(z-1)).\delta.d_1}$$

$$\sum_{n=1}^{z-1}\frac{(2.n+1).d_1}{1+(n^2+n).\delta.d_1}$$

Aynı şekilde diğer $(c_2, c_{k-1})\ldots(c_{k/2}, c_{\frac{k}{2}+1})$ ikilileri için toplam bulunursa;

$\phi(\delta)=k$ olduğu için,

$$\sum_{i=1}^{\frac{\phi(\delta)}{2}}\sum_{n=1}^{z-1}\frac{(2.n+1)\,d_i}{1+(n^2+n).\delta.d_i}=\text{y} \qquad \text{bulunur.}$$

$\delta.d_i=\dfrac{\delta^2}{c_i\cdot c_{k-i+1}}$ olduğundan $0<\dfrac{1}{\delta.d_i}<\dfrac{1}{4}$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\frac{2.\phi(\delta)}{\delta}\left(\sum_{n=1}^{z-1}\frac{1}{2.n+1}\right) < \text{y} < \frac{\phi(\delta)}{2.\delta}\left(\sum_{n=1}^{z-1}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{z-1}\frac{1}{n+1}\right) \qquad \text{sonucu çıkar.}$$

Eşitsizliğin solundaki toplam için:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{z-1}\frac{1}{2.n+1}=\sum_{n=2}^{2.z}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{z}\frac{1}{n}$ eşitliği kullanılırsa ve $\gamma=0{,}5772156\ldots$ Euler-Mascheroni sabiti olmak üzere,

$$\frac{\phi(\delta)}{2.\delta}(2.\ln(z)+4.\ln(2)+2.\gamma-4+o(1))) < y < \frac{\phi(\delta)}{2.\delta}(\ln(z-1)+\ln(z)+2.\gamma-1+o(1)))$$

eşitsizliği bulunur.Böylece , y toplamı için , $\sigma_r = \prod_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{p_i})$ olmak üzere ($z \to \infty$)

y = $\sigma_r.\ln(z)+o(1)$ sonucu bulunur. (5)

Teorem 1:

$\{p_1, p_2, ..., p_r, p_{r+1}\}$: ilk r+1 asal sayı , $\prod_{i=1}^{r} p_i = \delta$ ve $\prod_{i=1}^{r+1} p_i = \beta$ olsun.

p(n)= $\begin{cases} 1, & (n,\delta)=1, \\ 0, & (n,\delta)\neq 1, \end{cases}$ $\sum_{n=\delta}^{\beta}\frac{p(n)}{n}$=y toplamı için $\lim_{r\to\infty} y = e^{-\gamma}$ dır.

İspat:

$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\ln p_r}\prod_{i=1}^{r}\frac{1}{1-1/p_i} = e^{\gamma}$ =1,781072… sonucu Mertens teoremi olarak bilinir.

Bu teorem ve (5) sonucu kullanılırsa , $\lim_{r\to\infty} y = \lim_{r\to\infty}\frac{\ln(p_{r+1})}{\ln(p_r)}.e^{-\gamma}$ sonucu bulunur.

Bertrand'ın teoreminden, $p_{r+1} < 2.p_r$ eşitsizliği her r değeri için sağlanır. Bu ise ispatı tamamlar.

3.GENELLEŞTİRİLMİŞ EULER SABİTİ

$\sigma_r = \prod_{i=1}^{r}(1-\frac{1}{p_i})$, $\delta = \prod_{i=1}^{r} p_i$, p(n)= $\begin{cases} 1, & (n,\delta)=1, \\ 0, & (n,\delta)\neq 1, \end{cases}$ olsun.

$\gamma_r = \lim_{x\to\infty}(\sum_{n\le x}\frac{p(n)}{n} - \sigma_r.\ln(x))$ eşitliğine (5) sonucu uygulanırsa ,$(z \to \infty)$

$\sigma_r \ln(z) + o(1) = \sum_{n=\delta}^{\delta.z} \frac{p(n)}{n}$ olduğu için

$$\gamma_r = \lim_{z\to\infty} (\sum_{n=1}^{\delta} \frac{p(n)}{n} + \sum_{n=\delta}^{\delta.z} \frac{p(n)}{n} - \sigma_r . \ln(\delta) - \sigma_r . \ln(z))$$

$$\gamma_r = \lim_{z\to\infty} (\sum_{n=1}^{\delta} \frac{p(n)}{n} - \sigma_r . \ln(p_1 . p_2 .... p_r) + o(1))$$

$\gamma_r = \sum_{n=1}^{\delta} \frac{p(n)}{n} - \sigma_r . \ln(p_1 . p_2 .... p_r)$ sonucu bulunur. (6)

Bu sonuç γ_{r-1} için bulunursa,

$\sigma_{r-1} = \prod_{i=1}^{r-1} (1 - \frac{1}{p_i})$, $\alpha = \prod_{i=1}^{r-1} p_i$, q(n)= $\begin{cases} 1, & (n,\alpha) = 1, \\ 0, & (n,\alpha) \neq 1, \end{cases}$ olmak üzere,

$\gamma_{r-1} = \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{q(n)}{n} - \sigma_{r-1} . \ln(p_1 . p_2 .... p_{r-1})$ ifadesi elde edilir. (7)

γ_r 'yi , γ_{r-1} 'i kullanarak bulursak (6) sonucunu elde ederiz.

$\gamma_r = \lim_{x\to\infty} (\sum_{n \le x} \frac{p(n)}{n} - \sigma_r . \ln(x))$ ifadesinde $(z \to \infty)$ $\sigma_{r-1} \ln(z) + o(1) = \sum_{n=\alpha}^{\alpha.z} \frac{q(n)}{n}$ eşitliğini

kullanalım.

$\sum_{n=1}^{\alpha} \frac{p(n)}{n} + \sum_{n=\alpha}^{\delta} \frac{p(n)}{n} - \sum_{n=\alpha}^{\delta} \frac{q(n)}{n} = \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{q(n)}{n} - \frac{1}{p_r} \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{q(n)}{n}$ olduğu için,

$$\gamma_r = \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{q(n)}{n} - \frac{1}{p_r} \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{q(n)}{n} - \sigma_{r-1} . \ln(p_1 . p_2 .... p_{r-1}) + \frac{\sigma_{r-1}}{p_r} . \ln(p_1 . p_2 ... p_r)$$

$\gamma_r = (\frac{p_r - 1}{p_r}.)\sum_{n=1}^{\alpha}\frac{q(n)}{n} - (\frac{p_r - 1}{p_r}.)\sigma_{r-1}.\ln(p_1.p_2....p_{r-1}) + \sigma_{r-1}.\frac{\ln(p_r)}{p_r}$ sonucu çıkar.

$\gamma_{r-1} = \sum_{n=1}^{\alpha}\frac{q(n)}{n} - \sigma_{r-1}.\ln(p_1.p_2....p_{r-1})$ olduğu için,

$$\gamma_r = \gamma_{r-1} - \frac{\gamma_{r-1}}{p_r} + \sigma_{r-1}.\frac{\ln(p_r)}{p_r} \quad \text{sonucu bulunur.} \tag{8}$$

4.ARDIŞIK ASALLAR ARASINDAKİ FARK

[1] çalışmasında, $\gamma_{r+1} < \gamma_r$ ve $\gamma_{r+1} > \gamma_r$ eşitsizliklerinin sonsuz sayıda r değeri için sağlandığı gösterilmiştir.

$\gamma_{r+1} > \gamma_r$ ve $\gamma_{r+2} < \gamma_{r+1}$ eşitsizliklerinin aynı anda sağlandığı r değerleri sonsuz sayıdadır. Aksi halde; γ_r sonlu sayıda r değeri için azalan veya artan olur.

$\gamma_{r+1} > \gamma_r$ ve $\gamma_{r+2} < \gamma_{r+1}$ eşitsizliklerinin aynı anda sağlandığı durumları inceleyelim.

$\sigma_{r+1} = \frac{p_{r+1} - 1}{p_{r+1}}.\sigma_r$ olmak üzere,

(8) sonucundan $\gamma_{r+2} = \gamma_{r+1} + \frac{1}{p_{r+2}}(\sigma_{r+1}.\ln(p_{r+2}) - \gamma_{r+1})$ ifadesi elde edilir.

$\gamma_{r+2} < \gamma_{r+1} \Leftrightarrow \sigma_{r+1}\ln(p_{r+2}) < \gamma_{r+1}$

$\gamma_{r+2} < \gamma_{r+1}$ olsun

$\sigma_{r+1}\ln(p_{r+2}) < \gamma_{r+1}$

$\gamma_{r+1} = \gamma_r + \dfrac{1}{p_{r+1}}(\sigma_r.\ln(p_{r+1}) - \gamma_r)$ olduğu için,

$$\sigma_{r+1}\ln(p_{r+2}) < \gamma_r + \frac{1}{p_{r+1}}(\sigma_r.\ln(p_{r+1}) - \gamma_r)$$

$$\sigma_{r+1}\ln(p_{r+2}) < (\frac{p_{r+1}-1}{p_{r+1}}).\gamma_r + \frac{1}{p_{r+1}}.\sigma_r.\ln(p_{r+1})$$

(1) sonucu kullanılırsa,

$A_r = (\gamma + \sum_{i=1}^{r} \dfrac{\ln(p_i)}{p_i - 1})$ olmak üzere, $\gamma_{r+2} < \gamma_{r+1}$ olduğu durumlarda,

$A_r + \dfrac{\ln(p_{r+1})}{p_{r+1}-1} > \ln(p_{r+2})$ eşitsizliği sağlanır. (9)

(9) eşitsizliğinin aynı zamanda $\gamma_{r+1} > \gamma_r$ eşitsizliğini sağladığı durumları inceleyelim.

$\gamma_r = \sigma_r \cdot A_r$ ve ($\gamma_{r+1} = \gamma_r + \dfrac{1}{p_{r+1}}(\sigma_r.\ln(p_{r+1}) - \gamma_r)$) olduğu için,

$$\gamma_{r+1} > \gamma_r \Leftrightarrow A_r < \ln(p_{r+1})$$

$\gamma_{r+1} > \gamma_r$ iken $A_r < \ln(p_{r+1})$

$A_r = \ln(p_{r+1}) - c$ olsun. (c>0)

$A_r + \dfrac{\ln(p_{r+1})}{p_{r+1}-1} > \ln(p_{r+2})$ eşitsizliğinden

$-c > \ln(p_{r+2}) - \dfrac{p_{r+1}.\ln(p_{r+1})}{p_{r+1}-1}$ sonucu bulunur. (10)

Bu sonuç $\gamma_{r+1} > \gamma_r$ ve $\gamma_{r+2} < \gamma_{r+1}$ eşitsizliklerinin aynı anda sağlandığı durumdur.

(4) sonucundan,

$-c > \ln(p_{r+2}) - \dfrac{p_{r+1}.\ln(p_{r+1})}{p_{r+1}-1}$ eşitsizliğini sağlayan sonsuz sayıda r değeri vardır. (11)

Teorem 2: p_{r+1} ve p_{r+2} ardışık asallar olmak üzere,

$$\Delta = \lim_{r\to\infty} \inf\left(\frac{p_{r+2}-p_{r+1}}{\ln(p_{r+1})}\right) < 1 \text{ dır.}$$

ispat:

(11) sonucunu ele alalım. $A_r = \ln(p_{r+1}) - c$ olmak üzere (c>0)

$\dfrac{p_{r+1}.\ln(p_{r+1})}{p_{r+1}-1} > \ln(p_{r+2})$ +c eşitsizliğini sağlayan sonsuz sayıda r değeri vardır.

$p_{r+1} = x$ diyelim.

$$x^{\frac{x}{x-1}} > p_{r+2} \cdot e^c$$

$$x.x^{\frac{1}{x-1}} > p_{r+2} \cdot e^c$$

$e^c \cdot p_{r+2} - p_{r+1} < x.(x^{\frac{1}{x-1}} - 1)$ eşitsizliğini sağlayan sonsuz sayıda r değeri vardır. (12)

(c>0) olduğu için,

$p_{r+2} - p_{r+1} < x.(x^{\frac{1}{x-1}} - 1)$ eşitsizliğini sağlayan sonsuz sayıda r değeri vardır.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x-1}} \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x-1}.\ln(x)} = 1 \quad \text{ve} \quad p_{r+1} = x \ \text{ için}$$

$p_{r+2} - p_{r+1} < x.(x^{\frac{1}{x-1}} - 1)$ eşitsizliği kullanılırsa,

$$\Delta = \lim_{r\to\infty} \inf\left(\frac{p_{r+2} - p_{r+1}}{\ln(p_{r+1})}\right) < 1$$ sonucu bulunur.

$A_r = \ln(p_{r+1}) - c$ olduğu için (c>0),

Δ değeri , (12) eşitsizliği ve $A_r - \ln(p_r) = \Omega \pm (\frac{1}{\sqrt{p_r}} \ln\ln\ln(p_r))$ [1] sonucu kullanılarak geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

1. H. G. Diamond *Generalized Euler constants* , with H. G. Diamond, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 145, 27-41, 2008.
2. P. Erdös, The difference of consecutive primes.Duke Math J., 6, 438-441, 1940.
3. D.A Goldston, J. Pintz, C.Y. Yıldırım, Primes in tubles I,Ann of Math.to appear.
4. E. Bombieri, H. Davenport, Small difference between prime numbers. Proc .Roy. Soc.Ser. A., 293, 1–18, 1966.
5. H. Maier, Small differences between prime numbers. Michigan Math. Journal., 351, 323–344, 1988.