

## Hanta-virüs Modelinden Elde Edilen Lojistik Diferansiyel Denklem

Zarife Gökçen Karadem<sup>1,\*</sup>, Mevlüde Yakıt Ongun<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik A.B.D., Doğu Yerleşkesi, 32260, Isparta, Türkiye

<sup>2</sup> Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Doğu Yerleşkesi, 32260, Isparta, Türkiye

\*yazışılan yazar e-posta: [zgokcenkaradem@gmail.com](mailto:zgokcenkaradem@gmail.com)

Alınış: 26 Kasım 2015, Kabul: 11 Nisan 2016

**Özet:** Kesirli mertebeden Hanta-virüs modeli olarak alınan lineer olmayan diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{aligned} {}_c D_{0,t}^\alpha X(t) &= (b - c)X(t) + bY(t) - \frac{X^2(t)}{K} - \left(\frac{1 + aK}{K}\right)X(t)Y(t) \\ {}_c D_{0,t}^\alpha Y(t) &= -cY(t) - \frac{Y^2(t)}{K} - \left(\frac{1 - aK}{K}\right)X(t)Y(t) \end{aligned} \quad (1)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada  ${}_c D_{0,t}^\alpha$  kesirli türev (Caputo) operatörünü göstermektedir. (1) sistemini ayrıklaştırmak için Grünwald-Letnikov türev operatörü ve Standart Olmayan Sonlu Farklar (SOSF) Yöntemi uygulanacaktır. (1) sistemindeki bazı düzenlemeler ile kesirli mertebeden Lojistik denklem elde edilip, bulgular bazı grafikler ve tablolar yardımı ile desteklenecektir.

**Anahtar kelimeler:** Kesirli Diferansiyel Denklem, Hanta-virüs, Lojistik Diferansiyel Denklem.

## Logistic Differential Equations Obtained from Hanta-virus Model

**Abstract:** Fractional-order Hanta-virüs Model as received nonlinear differential equation system is

$$\begin{aligned} {}_c D_{0,t}^\alpha X(t) &= (b - c)X(t) + bY(t) - \frac{X^2(t)}{K} - \left(\frac{1 + aK}{K}\right)X(t)Y(t) \\ {}_c D_{0,t}^\alpha Y(t) &= -cY(t) - \frac{Y^2(t)}{K} - \left(\frac{1 - aK}{K}\right)X(t)Y(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Here,  ${}_c D_{0,t}^\alpha$  denotes the fractional derivative (Caputo) operator. The Grünwald-Letnikov operator and Nonstandart Finite Diference (SOSF) schemes will be applied to discretize the fractional-order nonlinear system (1). Fractional order logistic equation optioned with some adjustments in (1) system. The findings will be supported with the help of some of the graphs and tables.

**Key words:** Fractional diferantial equation, Hanta-virus, Logistic Differential Equation.

### 1. Giriş

Adi mertebeden türeve sahip Hanta-virüs modeli aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [1].

$$\frac{dM_s}{dt} = b(M_s + M_I) - cM_s - \frac{M_s(M_s + M_I)}{K} - aM_sM_I \quad (1)$$

$$\frac{dM_I}{dt} = -cM_I - \frac{M_I(M_s + M_I)}{K} + aM_sM_I \quad (2)$$

Lineer olmayan bu diferansiyel denklem sisteminde

$M_s$ : Hasta olmayan farelerin nüfusunu ( $M_s \geq 0$ ),

$M_I$ : Hastalıklı farelerin nüfusunu ( $M_I \geq 0$ ),

$a$ : Bulaşma oranını,

$b$ : Doğum oranını,

$c$ : Ölüm oranını,

$K$ : Çevre taşıma kapasitesini göstermektedir [1].

Bu modelde yayılma süreci olarak fare hareketi göz ardı edilir ve tüm nüfus duyarlı ve hastalıklı fareler olmak üzere iki durumdan oluşmaktadır.

(1)-(2) sisteminde  $M = M_s + M_I$  toplam nüfusu alınır;

$$\frac{dM}{dt} = (b - c)M - \frac{M^2}{K} \quad (3)$$

Lojistik diferansiyel denklemi elde edilir.

Toplam nüfus için taşıma kapasitesi  $M^* = (b - c)K$  ve taşıma kapasitesinin kritik değeri ise  $K_c = \frac{b}{a(b-c)}$  şeklinde ifade edilir.

Eğer  $b > c$  ise, (3) denklemi için  $M^* = 0$  kararsız denge noktasına sahiptir ve

$M^* = K(b - c)$  global asimptotik kararlı bir denge noktasıdır. Bununla birlikte,

$M_I = 0$  olduğunda (1) denklemi (3) denklemine dönüşür.

(1)-(2) sistemi lineer olmayan bir diferansiyel denklem olduğundan kapalı formda genel çözümlerini bulmak oldukça güç olacağından, (1)-(2) sistemi ile aynı dinamik özellikleri sağlayan ve pozitiflik koşulunu da sağlayacak olan bir sayısal yaklaşım yöntemi kullanmak gerekmektedir. Bunun için Standart olmayan sonlu fark sayısal yönteminin farklı h adım uzunlukları için diğer klasik yaklaşım yöntemlere göre daha duyarlı ve yakınsak sonuçlar vereceği bilindiğinden tercih sebebi olacaktır [3].

## 2. Adi Mertebeden Lojistik Diferansiyel Denklem için Denge Noktası

Farklı parametreler için (3) denkleminin dinamikleri bilinmektedir ve aşağıdaki durumları mevcuttur:

- i.  $b = c$ ; (3) denklemi  $\frac{dM}{dt} = -\frac{M^2}{K}$  haline dönüşür.  $M^* = 0$  tek denge noktasıdır.
- ii.  $b \neq c$ ; (3) denklemi  $\frac{dM}{dt} = (b - c)M[1 - (\frac{M}{K(b-c)})]$  haline dönüşür.  
 $b < c$  ise, denklem tek bir kararlı denge noktasına sahiptir.  $M^* = 0$

$b > c$  ise denklemin iki denge noktası vardır.  $M^* = 0$  kararsız,  $M^* = K(b - c)$  kararlı denge noktasıdır.

(3) denkleminin  $M^* = 0$  ve  $M^* = K(b - c)$  denge noktaları kullanılarak, (1)-(2) sisteminin negatif olmayan denge noktaları için aşağıdakiler söyleyebilir.

$b \leq c$  ise, (1)-(2) denklemlerinin tek bir denge noktası vardır;  $(0,0)$

$b > c$  durumunda;

$K(b - c) - \left(\frac{b}{a}\right) \leq 0$  ise (1)-(2) denkleminin iki denge noktası vardır;  $(0,0)$  ve

$(K(b - c), 0)$ .

$K(b - c) - \left(\frac{b}{a}\right) > 0$  ise, (1)-(2) denkleminin üç denge noktası vardır;  $(0,0)$  ve

$(K(b - c), 0)$  ve  $\left(\left(\frac{b}{a}\right), K(b - c) - \left(\frac{b}{a}\right)\right)$ .

Sonuç olarak: (1)-(2) denklemleri ile verilen modelin aşağıdaki kararlılık koşullarını sağladığı [4] de verilmiştir.

- i. Eğer  $b \leq c$  ise sistemin tek denge noktası  $(0,0)$  dır ve global asimptotik kararlıdır.
- ii. Eğer  $b > c$  ve  $K \leq \frac{b}{a(b-c)}$  ise sistemin iki denge noktası vardır: Kararlı  $(0,0)$  noktası ve global asimptotik kararlı  $(K(b - c), 0)$  noktası.
- iii. Eğer  $b > c$  ve  $K > \frac{b}{a(b-c)}$  ise sistemin üç denge noktası vardır: Kararsız  $(0,0)$  ve  $(K(b - c), 0)$  noktaları ve global asimptotik kararlı  $\left(\left(\frac{b}{a}\right), K(b - c) - \left(\frac{b}{a}\right)\right)$  noktası.

### 2.1. Biyolojik Önem

Bir önceki bölümdeki bilgiler ışığında modelin biyolojik önemine dair aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.

Ölüm oranı doğum oranından yüksek olduğunda, tüm fareler sonunda ölecektir. Düşük taşıma kapasitesinde hastalıklı olan ve olmayan herhangi bir fare nüfusu, sonunda  $K(b - c)$  hastalıklı olmayan farelere yakınsayacaktır. Taşıma kapasitesi,  $\left(K_c = \frac{b}{a(b-c)}\right)$  eşik değeri olduğunda ise eğer başlangıçta hastalıklı olmuş fareler varsa fare alt nüfusları bir arada yaşayacak ve sonunda hastalıklı olmayanlar  $\left(\frac{b}{a}\right)$  ya, hastalıklı olan fareler ise  $K(b - c) - (b/a)$  ya yaklaşacaktır. Eğer başlangıçta hastalıklı olmuş fareler yoksa, tüm fare nüfusu hastalıklı olmayan olacaktır ve sonunda  $K(b - c)$  fareye yaklaşacaktır [4].

### 3. Standart Olmayan Sonlu Fark Yaklaşımının Kurulması

Bu bölümde, (1)-(2) sisteminin yaklaşık çözümleri için standart olmayan sonlu fark yöntemi kullanılacak olduğundan, bu yaklaşım yöntemi ilgili bazı temel kavramlar

verilecektir. Amaçlanan yöntem, aşağıdaki (P1)-(P3) dinamik özelliklerini koruyacak şekilde kurulmalıdır.

(P1): Pozitiflik :Yöntem negatif başlangıç değerleri ile negatif çözümleri kabul etmez.

(P2): Kararlılık: Yöntem doğru denge noktasına yaklaşan çözümleri üretir.

(P3): Periyodik olmama: Yöntem periyodik çözümlere sahip değildir. [4]

Aşağıdaki durumlardan herhangi biri varsa bir sonlu fark yönteminin standart olmadığı söylenir.

- i.  $\left(\frac{dy}{dt}\right) = r(y)$  şeklinde verilen bir denklemdaki  $r(y)$  nin linner olmadığı durumlar için ayrıklaştırma işleminde, tüm lineer olmayan terimler, birkaç ayrık noktanın uygun fonksiyonu ile lokal olmayan bir yol ile ayrıklaştırılır.
- ii. Ayrık türev ifadesindeki  $\Delta t = h$  adım uzunluğu, negatif olmayan  $\phi(h)$  denominator fonksiyonu ile değiştirilir.  $h \rightarrow 0^+$  olmak üzere  $\phi(h) = h + O(h^2)$  dır.

Aşağıda verilen Durum 1 ve Durum 2, verilen sistemin SOSF yöntemi ile ayrıklaştırılmasındaki iki farklı durumdur.

### 3.1. Durum I:

Türevler için ileri fark yaklaşımını kullanılarak (1)-(2) sisteminin ilk denkleminde,

$bM - cM_s$  terimini,  $(b - c)M_s + bM_I$  olarak yazıp:

$$M_s M_I \rightarrow M_s^n M_I^n, \quad M_s M \rightarrow M_s^{n+1} M^n, \quad M_s M_I \rightarrow M_s^{n+1} M_I^n$$

ve ikinci denklemden ise

$$M_I M \rightarrow M_I^{n+1} M^n, \quad M_s M_I \rightarrow M_s^n M_I^{n+1}$$

ayrıklaştırması yapılarak (1)-(2) denklem sistemi:

$$\frac{M_s^{n+1} - M_s^n}{h} = (b - c)M_s^n + bM_I^n - \frac{M_s^{n+1} M^n}{K} - aM_s^{n+1} M_I^n \quad (4)$$

$$\frac{M_I^{n+1} - M_I^n}{h} = -cM_I^n - \frac{M_I^{n+1} - M^n}{K} - aM_s^{n+1} M_I^n \quad (5)$$

haline gelir ve (4) -(5) denklemlerini taraf tarafa toplanması ile

$$\frac{M^{n+1} - M^n}{h} = (b - c)M^n - \frac{M^n M^{n+1}}{K} \quad (6)$$

Şeklinde (3) denkleminin ayrık hali elde edilir. Yeniden bir düzenleme ile (4)-(6) denklemleri

$$M_s^{n+1} = \frac{K[M_s^n + (b - c)hM_s^n + bhM_I^n]}{K + aKhM_I^n + h(M_s^n + M_I^n)} \quad (7)$$

$$M_I^{n+1} = \frac{K[(1 - ch)K + [(1 - ch)(1 + aK) + abhK]h(M_s^n + M_I^n)]M_I^n}{[K + h(M_s^n + M_I^n)][K + aKhM_I^n + h(M_s^n + M_I^n)]} \quad (8)$$

$$M^{n+1} = \frac{K[1 + (b - c)h]M^n}{K + hM^n} \quad (9)$$

şeklini alır. Pozitif başlangıç koşulları ile  $b > c$  için  $M_s^n$  ve  $M^n$  için Denklem (7) ve (9) un sağ tarafının negatif iterasyonu kabul etmediği açıktır. (8) denklemi için  $M_I^n$  açık değildir. (7)-(9) sistemi tüm  $h \leq \left(\frac{1}{c}\right)$  için doğru dinamikleri sergiler.  $h \leq \left(\frac{1}{c}\right)$  koşulunun, bu sistem için bütün adım aralıklarının en büyük değerinde, düşük ölüm oranını gösterdiği gözlenir.

### 3.2. Durum II:

$h \leq (1/c)$  ile pozitif sınırlanan (8) denklemi için (ii) kullanarak aşağıdakileri söyleyebiliriz.

$0 < h < 1$  için  $e^{-ch} = 1 - ch + O(h^2)$  veya  $h = \left(\frac{1 - e^{-ch}}{c}\right) + O(h^2)$  için

$$\phi(h) = \frac{1 - e^{-ch}}{c} \quad (10)$$

(7)- (9) denklemlerinde  $h$  yerine  $\phi(h)$  yazarak (1)-(3) için SOSF Yöntemini ile

$$M_s^{n+1} = \frac{K[M_s^n + (b - c) \phi(h)M_s^n + b \phi(h)M_I^n]}{K + aK \phi(h)M_I^n + \phi(h)(M_s^n + M_I^n)} \quad (11)$$

$$M_I^{n+1} \quad (12)$$

$$= \frac{K[(1 - c \phi(h))K + [(1 - c \phi(h))(1 + aK) + ab \phi(h)K] \phi(h)(M_s^n + M_I^n)]M_I^n}{[K + \phi(h)(M_s^n + M_I^n)][K + aK \phi(h)M_I^n + h \phi(h)M_s^n + M_I^n]} \quad (13)$$

$$M^{n+1} = \frac{K[1 + (b - c) \phi(h)]M^n}{K + \phi(h)M^n} \quad (13)$$

elde edilir. (i) ve (ii) açısından (11) ve (13) yöntemi standart değildir. Hatta tüm  $h \geq 0$  için  $1 - c\phi(h) = e^{-ch} > 0$  olur. (11)-(13) denklemlerinde (10) denkleminde verilen  $\phi(h)$  seçildiği görülmektedir. Elde edilen yöntem (P1)-(P3) özelliklerine göre kararlıdır [4].

## 4. Kesirli İntegral ve Kesirli Türev

Tanım 4.1.

$t > 0$  olmak üzere,  $f(t)$  fonksiyonunun  $\beta \in R^+$  mertebeden kesirli integrali

$$I^\beta f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s) ds \text{ ile tanımlanır ve}$$

$t > 0$  olmak üzere,  $f(t)$  fonksiyonunun  $\alpha \in (n - 1, n)$  mertebeden kesirli türevi  $D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t)$  ile tanımlanır [8]. ( $D = \frac{d}{dt}$ )

## 5. Kesirli Mertebeden Hanta-virüs Modeli

Bu bölümde kesirli mertebeden Hanta-virus modeli [1] ele alınmıştır. Sistem, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler ile şöyle verilir:

$${}_c D_{0,t}^\alpha X(t) = (b - c)X(t) + bY(t) - \frac{X^2(t)}{K} - \left(\frac{1 + aK}{K}\right)X(t)Y(t) \quad (14)$$

$${}_c D_{0,t}^\alpha Y(t) = -cY(t) - \frac{Y^2(t)}{K} - \left(\frac{1 - aK}{K}\right)X(t)Y(t) \quad (15)$$

$$X(t_0) = X_0, \quad Y(t_0) = Y_0 \quad (16)$$

Burada  ${}_c D_{0,t}^\alpha$  Caputo anlamında [8] başlangıç noktasına göre kesirli türev operatörünü gösterir.

${}_c D_{0,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{(t-s)^\alpha} ds$  olmak üzere  $\Gamma(\cdot)$  Gama fonksiyonudur. Bu modelde rakiplerin varlığı yönünden kesirli türev ekosistemdeki homojen olmayan karakterleri tanımlamak için kullanılmıştır.

$\alpha$  sistemdeki yarışçı türlerin varlığını göstermektedir.  $\alpha = 1$  olduğunda  ${}_c D_{0,t}^\alpha$ , klasik adi mertebeden türevdir ( $x'(t)$ ).  $0 < \alpha < 1$  iken rakibin nüfusları değişir.  $\alpha > 1$  durumunda ise, rakip ya da yabancı türlerin yoğunluğu nüfuslarında artacaktır [5].

### 5.1. Grünwald Letnikov Operatörü

$w_j^{(\alpha)} = (-1)^j \binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)}$  olmak üzere The Grünwald-Letnikov (GL) operatörü;

${}_{GL}D_{0,t}^\alpha f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_N^{-\alpha} \sum_{j=0}^N w_j^{(\alpha)} f(t - jh_N)$  olarak tanımlanır.

$$w_0^{(\alpha)} = 1 \quad w_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha)}, \quad j = 1, 2, \dots$$

$0 < \alpha < 1$  olduğunda GL ile Caputo tanımı arasında aşağıdaki ilişki vardır [7 - 8].

$${}_c D_{0,t}^\alpha f(t) = {}_{GL}D_{0,t}^\alpha (f(t) - f(0))$$

### 5.2. Modelin Ayrıklaştırılması

(14)-(15) kesirli mertebeden lineer olmayan sistemi ayrıklaştırmak için GL operatör ile birlikte uygulanan bazı SOSF yöntemi önerilecektir. SOSF yöntemi ilk olarak adi diferansiyel denklemler için Mickens tarafından tanımlandı [2].

Aşağıda,  $x(t_n)$  ve  $y(t_n)$  yaklaşımlarının yerine  $x_n$  ve  $y_n$  kullanıldı. Ayrıca kolaylık olması için

$$\tilde{x}_{n-1} = \begin{cases} w_n^{\alpha-1} x_0, & n = 1 \\ w_n^{\alpha-1} x_0 - \sum_{j=2}^n w_n^\alpha x_{n-j} & n \geq 2 \end{cases}$$

$\tilde{y}_{n-1}$  için benzer şekilde

$$X_n = \sum_{j=1}^n w_n^\alpha x_{n-j}, \quad Y_n = \sum_{j=1}^n w_n^\alpha y_{n-j}, \quad \text{yazılabilir.}$$

### 5.3. SOSF Yöntemi:

Ayrıklaştırma için,

$$X(t) \rightarrow X(t_{n-1}), Y(t) \rightarrow Y(t_{n-1}), X^2(t) \rightarrow X(t_n)X(t_{n-1}), \\ X(t)Y(t) \rightarrow X(t_n)Y(t_{n-1})$$

Kolaylık olması açısından;

$$X(t_n) \rightarrow X_n, Y(t_n) \rightarrow Y_n, X(t_{n-1}) \rightarrow X_{n-1}, Y(t_{n-1}) \rightarrow Y_{n-1}, Y(t_{n-1}) \rightarrow Y_{n-1}$$

$$X_n + x_n - w_0^{\alpha-1}X_0 = \phi(h)\bar{X}, Y_n + y_n - w_0^{\alpha-1}Y_0 = \phi(h)\bar{Y}$$

Burada  $\phi(h)$  payda fonksiyondur ve farklı şekillerde seçilebilir.

$$\bar{X} = (b - c)X_{n-1} + bY_{n-1} - \frac{(X_{n-1} + Y_{n-1})X_n}{K} - \alpha X_n Y_{n-1}$$

$$\bar{Y} = -cY_{n-1} - \frac{(X_{n-1} + Y_{n-1})Y_n}{K} + \alpha X_n Y_{n-1}$$

$$w_n^{\alpha-1}x_0 - X_n = \tilde{x}_{n-1} + \alpha x_{n-1}$$

$$w_n^{\alpha-1}y_0 - Y_n = \tilde{y}_{n-1} + \alpha y_{n-1}$$

Sonuç olarak SOSF Yöntemi;

$$X_n = \frac{K[\tilde{x}_{n-1} + (\alpha - c\phi(h))X_{n-1} + b\phi(h)(X_{n-1} + Y_{n-1})]}{K + \phi(h)(X_{n-1} + Y_{n-1}) + \alpha\phi(h)KY_{n-1}}$$

$$Y_n = \frac{K[\tilde{y}_{n-1} + (\alpha - c\phi(h))Y_{n-1} + \alpha\phi(h)(X_n Y_{n-1})]}{K + \phi(h)(X_{n-1} + Y_{n-1})}$$

*Yardımcı Teorem 5.3.1.*  $0 < \alpha < 1$  ve  $w_j^{(\alpha)}$ ;  $(1 - \xi)^\alpha$  nın kuvvet serisi açılımındaki katsayılar  $w_n^{(\alpha)}$  olmak üzere ( $n = 1, 2, \dots$ ) için

a)  $-1 < w_1^{(\alpha)} < 0$ .

b)  $0 < w_1^{(\alpha-1)} < 1$  [6].

*Sonuç 5.3.2.*

$a, b, c, K > 0$ ,  $b \leq c$  ve  $0 < h < (a/c)^{\frac{1}{a}}$  olmak üzere;  $X_0 \geq 0$  ve  $Y_0 \geq 0$  için  $X_n$  ve  $Y_n$  iterasyonları negatif değildir.

#### 5.4. Kesirli Mertebeden Lojistik Denklem

(14)-(15) denklemlerinin taraf tarafa toplanması ile lojistik denklem elde edilir.

$$D^\alpha M(t) = (b - c)M - \frac{M^2}{K}$$

SOSF Yöntemi kullanılarak;

$$M_n + m_n - w^{(\alpha-1)}M_0 = \phi(h)(b-c)M_{n-1} - \frac{\phi(h)}{K}M_{n-1}M_n$$

$$M_n = \frac{\phi(h)(b-c)M_{n-1} + \widetilde{m}_n}{1 + \frac{\phi(h)}{K}M_{n-1}}$$

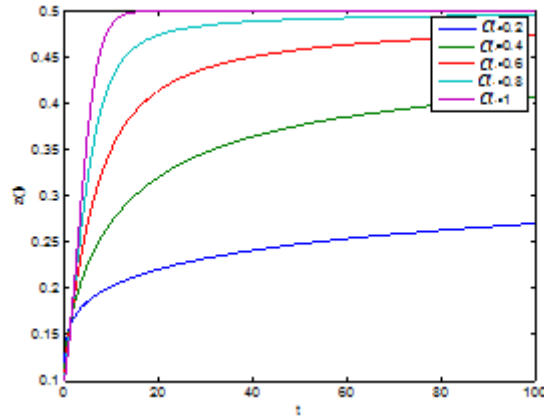
$$\widetilde{m}_n = w^{(\alpha-1)}M_0 - m_n, m_n = \sum_{j=1}^n w_j^{(\alpha)}M_{n-j}$$

$\alpha = 1$  iken  $\widetilde{m}_n = M_{n-1}$  ve

$$M_n = \frac{[1 + \phi(h)(b-c)]M_{n-1}}{1 + \frac{\phi(h)}{K}M_{n-1}}$$

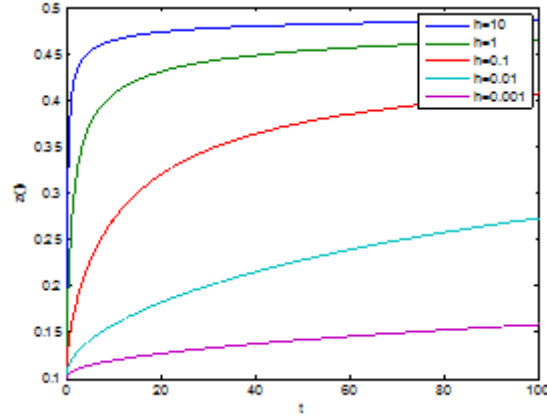
elde edilir.

Şekil 5.1'de  $h=0.1$  için farklı  $\alpha$  mertebelerine karşılık gelen kesirli mertebeden lojistik diferansiyel denklemin grafiği, Şekil 5.2 de  $\alpha = 0.4$  için farklı adım uzunluklarına sahip durumların grafiği ve son olarak da Şekik 5.3 de ise,  $\alpha = 0.6, h = 0.1$  için farklı  $\phi(h)$  payda fonksiyonlarının seçimi ile oluşan kesirli mertebeden diferansiyel denklemin grafikleri gösterilmiştir.

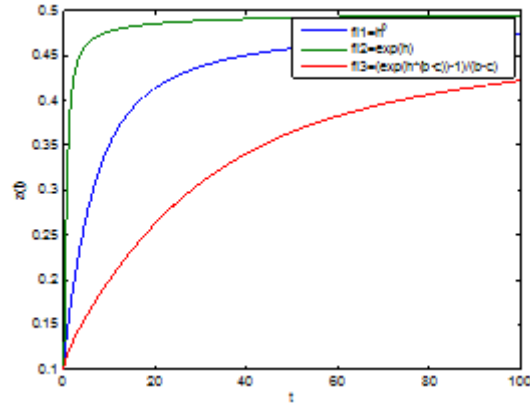


Şekil.5.1.  $h=0,1$  için Açık SOSF yöntemi





Şekil 5.2.  $\alpha = 0,4$  için Açık SOSF yöntemi



Şekil 5.3.  $\alpha = 0,6$  için Açık SOSF yöntemi

## Teşekkür

3997-YL1-14 No`lu Proje ile bu çalışmayı maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkür ederiz.

## 6.Kaynaklar

- [1] Abramson G., Kenkre V.M., 2002. Spatio-temporal patterns in the Hantavirus infected, *Physcial Rewiew E*, 66, 011912.
- [2] Mickens,R.E., 2007. Calculation of denominator functions for nonstandart finite difference schemes for differential equations satisfying a positivity condition, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 23 (3) : 672-691.
- [3] Chen M., Clemence D.P.,2006. Stability properties of a nonstandard finite difference scheme for a hantavirus epidemic model, *Journal of Difference Equations and Applications*, 12 (12), 1243-1256.
- [4] Chen M., Clemence D.P., 2007. Analysis of and numerical schemes for a mouse population model in Hantavirus epidemics, *Journal of Difference Equations and Applications*, 12 (9), 887-899.
- [5] Abdullah F.A.,2011, Simulations of the spread of the Hantavirus using fractional differential equations, *Matematika*, 27, 149-158
- [6] Matignon D.,1996, Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. *Computational Engineering in Systems Applications*, 2: 817-823.
- [7] Lubich CH.,1986. Discretized Fractional Calculus, *SIAM Journal on Mathematical Analysis (SIMA)* 17 (3): 704-719.

- [8] Podlubny I., 1999. Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications. *Academic Press*, San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto, p.368.

*Mevlüde YAKIT ONGUN e-posta: [mevludeyakit@sdu.edu.tr](mailto:mevludeyakit@sdu.edu.tr)*