Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi **21** (1-2), 47-53, 2005

PRETOPOLOJİK UZAYLAR KATEGORİSİNDE ∂-BAĞLANTILILIK

Muammer KULA

Erciyes Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü 38039 Kayseri

ÖZET

Bu çalışmada, verilen herhangi bir ε topolojik kategorisi ve ε nun herhangi bir X objesi için, ∂-bağlantılılık kavramı tanımlanarak bu kavram, Pretopolojik Uzaylar kategorisinde incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Bağlantılılık, Topolojik kategori, Yakınsak süzgeç Uzaylar, Pretopolojik uzaylar.

A NOTION OF ∂-CONNECTEDNESS IN THE CATEGORY OF PRETOPOLOGICAL SPACES

ABSTRACT

In this study, the notion of ∂-connectedness is defined for any given X object of ε, which is a topological category over sets, and this notion is characterized in the category of pretopological spaces.

Keywords: Connectedness, Topological category, Convergence space, Pretopological space.

E-posta: kula@erciyes.edu.tr

1. GİRİŞ

(X,τ) herhangi bir topolojik uzay olsun. (X,τ)'nun bağlantılı olması için gerek ve yeter şart X 'in boştan farklı her öz alt cümlesinin sınırı boştan farklıdır [1].

Baran [2] de kapalılık kavramını kapanış operatörlerini kullanmadan topolojik kategoriye genişletmiştir. Burada ise, [2] de ki kapalılık kavramı ve yukarıdaki teorem kullanılarak, bağlantılılık kavramı topolojik kategoriye genişletildi.

2. 1. Temel Tanım ve Teoremler

SET, objeleri cümleler ve dönüşümleri fonksiyonlar olan bir kategori olmak üzere;

Tanım 2.1.1. $\mathcal{E}$ ve **SET** kategorileri verilsin. Eğer $U:\mathcal{E}\to \mathrm{SET}$ fanktoru aşağıdaki şartları sağlıyorsa U ya topolojik fanktor ya da $\mathcal{E}$ na **SET** kategorisi üzerinde topolojik kategori denir.
1. U belirli (concrete) olmalıdır [1].
2. U küçük demetlere sahiptir. Yani, her $B\in \boldsymbol{O}_{\mathrm{SET}}$ için $U^{-1}(B)$ bir cümledir. Burada $U^{-1}(B)=\{\ X\in \mathbf{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\ |\ U(X)=B\ \}$ şeklinde tanımlanır ve B üzerindeki demet olarak adlandırılır [2].
3. Her U - kaynağı için yani SET 'de $g_i:\mathrm{B}\to U(X_i)$ ailesi için $\mathcal{E}$ 'da $\bar{f}_i:X\to X_i$ ailesi vardır öyle ki $U(\bar{f}_i)=g_i$ dır ve eğer $U(h_i:Y\to X_i)=g_i\circ k:U(Y)\to \mathrm{B}=U(X)\to U(X_i)$ ise bu taktirde $k:UY\to UX=\mathrm{B}$ nin en az bir $\bar{k}:Y\to X$ kaldırması vardır, yani $U(\bar{k})=k$ dır ve $\bar{f}_i\circ\bar{k}=h_i$ dir. Bunu diağramla gösterelim.

$$\mathcal{E} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{SET}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\bar{f}_i"] & X_i \\ Y \arrow[u, dashed, "\bar{k}"] \arrow[ur, "h_i"'] & \end{tikzcd} \xrightarrow{\quad U \quad} \begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "g_i"] & U(X_i) \\ U(Y) \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "U(h_i)"'] & \end{tikzcd}$$

Bu son şartın anlamı, her U - kaynağı bir başlangıç kaldırmaya (initial lift) sahiptir. Keyfi bir U - kaynağının başlangıç kaldırmasının varlığı, keyfi U -kavşağı (U -sink) için bitiş kaldırmasına (final lift) denktir (Bitiş kaldırma, başlangıç kaldırmanın dualidir) [3-4].
A bir cümle ve $\sigma\subset \mathrm{P}(\mathrm{A})$ olsun. $[\sigma]=\{\ \mathrm{B}\subset\mathrm{A}\ |$ en az bir $\mathrm{C}\in\sigma$ vardır öyle ki $\mathrm{C}\subset\mathrm{B}\ \}$ şeklinde tanımlansın [5].

Tanım 2.1.2. Eğer $[\sigma]=\sigma$ ise $\sigma\subset \mathrm{P}(\mathrm{A})$ ya A üstünde bir yığın (stack) denir. Yani σ süper cümle altında kapalıdır [6].
α, A üzerinde boş olmayan bir yığın olsun. Eğer $\mathrm{B},\mathrm{C}\in\alpha$ iken $\mathrm{B}\cap\mathrm{C}\in\alpha$ oluyorsa
α ya A üzerinde süzgeç (filter) denir.

α yığınının (süzgeç), öz yığın (süzgeç) (proper) olması için gerek ve yeter şart $\phi \notin \alpha$, yani $\alpha \neq [P(A)]$ olmasıdır. Aksi durumda α ya öz olmayan yığın (süzgeç) (improper) denir. A üzerinde yığın ve süzgeçlerin cümlesi sırasıyla $S(A)$ ve $F(A)$ ile gösterilir. Eğer α ve $\beta \in F(A)$ ise bu taktirde $\alpha \cap \beta = \{ B \subset A \mid B \in \alpha$ ve $B \in \beta \}$ da bir süzgeçtir. Yani $[\alpha \cap \beta] = \alpha \cap \beta$ dır. $\alpha \cap \beta \subset [\alpha \cap \beta]$ süzgecin tanımından dolayı açıktır [7].
Şimdi $[\alpha \cap \beta] \subset \alpha \cap \beta$ olduğunu gösterelim. $B \in [\alpha \cap \beta]$ alalım. En az bir $G \in \alpha \cap \beta$ vardır öyle ki $G \subset B$ dir. $G \in \alpha \cap \beta$ olduğundan $G \in \alpha$ ve $G \in \beta$ dır. α ve β süzgeç olduğundan $B \in \alpha$ ve $B \in \beta$ dır [6].

Tanım 2.1.3. A bir cümle ve $L : A \to PS(A)$ her bir $a \in A$ için $L(a)$, A nın a noktasına 'yakınsayan' boş olmayan tüm yığınların cümlesi olacak şekilde tanımlanan bir fonksiyon olsun [6].

Tanım 2.1.4. A bir cümle ve $L : A \to PS(A)$ yukarıda tanımlanan fonksiyon olsun. Eğer L aşağıdaki şartları sağlıyorsa (A, L) çiftine Pretopolojik uzay denir.

(1) Her $a \in A$ için $[a] \in L(a)$, burada $[a] = \{ B \subset A \mid a \in B \}$ dir.

(2) α ve β, A üstünde yığınlar ve $\alpha \subset \beta$ olsun. Eğer $\alpha \in L(a)$ ise $\beta \in L(a)$ dır.

(3) $L(a)$ da ki bütün süzgeçlerin kesişimi N_a olmak üzere $N_a \in L(a)$ dır [6].

(A, K) dan (B, L) ye bir f dönüşümü, $f : A \to B$ fonksiyondur öyle ki eğer $\alpha \in K(a)$ ise $f(\alpha) \in L(f(a))$ dır. Yani f süreklidir.

Burada $[f\alpha] = \{ U \mid U \subset B$ ve en az bir $C \in \alpha$ için $U \supset f(C) \}$ şeklinde tanımlanır [6].

Tanım 2.1.5. Dönüşümleri Tanım 2.1.4 de ki gibi tanımlanan sürekli fonksiyonlardan oluşan ve nesneleri yerine de Pretopolojik uzaylar alınarak elde edilen sınıfa Pretopolojik uzayların kategorisi denir ve PrT ile gösterilir. PrT bir topolojik kategoridir [6, 8].

2.2. Kapalı Alt Objeler

Tanım 2.2.1. X bir cümle ve $p \in X$ olsun. $V_p^\infty X$ sonsuz wedge çarpımı, X in sayılabilir ayrık kopyalarını alarak ve bunların p noktasında çakışması ile elde edilir. $X^\infty = X \times X \times X \times \ldots$, X in sayılabilir kartezyen çarpımı olsun. $A_p^\infty : V_p^\infty X \to X^\infty$ i $A_p^\infty(x_i) = (p, p, \ldots, x_i, p, \ldots)$ şeklinde tanımlansın. Burada x_i sonsuz wedgenin i inci bileşenin elemanıdır ve $(p, p, \ldots, x_i, p, \ldots)$ de ki x_i ise i inci yerdedir. $\nabla_p^\infty : V_p^\infty X \to X$ tüm i ler için $\nabla_p^\infty(x_i) = x$ ile tanımlansın [7-8].

$U : \mathcal{E} \to$ **SET** topolojik fanktor ve X de $\mathcal{E}$ nun bir nesnesi olsun.

$\phi \neq M \subset X$ ve X / M bölüm uzayı ile $q : U(X) = B \to B / M = (B \setminus M) \cup \{*\}$ U -kavşağının son (final) kaldırmasını göstereceğiz. Burada q, $B \setminus M$ nin elemanlarını kendisine ve M yi de * götüren bir fonksiyondur [7-8].

p B nin bir elemanı olsun. Şimdi aşağıda ki tanımı verebiliriz.

Tanım 2.2.2.
(1) p nin kapalı olması için gerek ve yeter şart $\left\{ A_p^\infty : V_p^\infty B \to UX^\infty = B^\infty \text{ ve } \nabla_p^\infty : V_p^\infty B \to UDB = B \right\}$ U - kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır [7-8].
(2) $M \subset X$ in kapalı olması için gerek ve yeter şart $*$ ın X / M de kapalı veya $M = \phi$ olmasıdır [7-8].
(3) $M \subset X$ in açık olması için gerek ve yeter şart M^c nın kapalı olmasıdır [9].

Uyarı $\mathcal{E}$ =**Top** alırsak, Tanım 2.2.2 deki kapalılık ve açıklık kavramları sırasıyla klasik kapalılık ve açıklık kavramlarına indirgenir [1,8].

Teorem 2.2.3. $\mathcal{E} =$ **PrT** ve $(A, L) \in \mathbf{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ olsun. $\phi \neq M \subset A$ nın kapalı olması için gerek ve yeter şart $a \notin M$ şartını sağlayacak şekilde ki her bir $a \in A$ için $\alpha \cup [M]$ öz süzgeç olacak şekilde $\alpha \in L(a)$ mevcutsa, $\bigcap_{b \in M} N_b \not\subset [a]$ olmalıdır ($N_b = \bigcap_{\alpha \in K(b)} \alpha$) [8].

Önerme 2.2.4. $\mathcal{E} =$ **PrT** ve $(A, L) \in \mathbf{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ olsun.
(1) A daki tüm kapalı alt cümlelerinin keyfi adetteki kesişimleri kapalıdır.
(2) A daki açıkların keyfi adetteki birleşimleri açıktır.

İspat: İspatı [9] de verilmiştir.

Tanım 2.2.5. $\mathcal{E}$ bir topolojik kategori, $X \in \mathbf{O}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ve $M \subset X$ olsun.
(1) M nin kapanışı, X in M yi ihtiva eden tüm kapalı alt cümlelerinin kesişimidir ve $\overline{M}$ ile gösterilir ($\overline{M} = \cap \left\{ E \subset X : E \supset M \text{ , } E \textit{ kapalı} \right\}$) [9].

(2) M nin tüm açık alt cümlelerinin birleşimine M nin içi denir ve $\overset{o}{M}$ ile gösterilir ($\overset{o}{M} = \cup \left\{ H \subset X : M \supset H \text{ , } H \textit{ açık} \right\}$) [9].

(3) M nin sınırı, $\partial(M) = \overline{M} \setminus \overset{0}{M}$ şeklinde tanımlanır [9].

Uyarı
(1) $\mathcal{E}$ =**Top** alırsak, Tanım 2.2.5 deki tanımlar klasik M nin kapanışı, içi ve sınırı kavramlarına indirgenir [10-12].
(2) $\mathcal{E}$ = **PrTp** ise M nin kapanışı Dikranjan ve Giuli [12] anlamında kapanış operatörüdür ve bu operatör idempotent, çarpımsal ve kalıtsaldır [1, 13].

Önerme 2.2.6. (A, L) **PrT** da bir obje ve $M \subset A$ olsun**.** Bu takdirde;
(1) $\overline{M}$ kapalıdır.
(2) $\overset{o}{M}$ açıktır.
(3) M kapalıdır ancak ve ancak $\overline{M} = M$ dir.
(4) M açıktır ancak ve ancak $\overset{o}{M} = M$ dir.
(5) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ dır.
(6) $\overset{o}{\overset{o}{M}} = \overset{o}{M}$ dir.

(7) $\partial(\mathrm{M})=\phi$ olması için gerek ve yeter şart $\overline{\mathrm{M}}=\overset{\mathrm{o}}{\mathrm{M}}$ dir.

İspat: İspatı [9] de verilmiştir.

3. ∂ **-bağlantılılık**

SET, objeleri cümleler ve dönüşümleri fonksiyonlar olan bir kategori, ε **SET** üzerinde topolojik kategori ve X de ε 'nun bir objesi olsun.

Tanım 3.1. X 'in ∂-bağlantılı olması için gerek ve yeter şart X 'in boştan farklı her öz alt cümlesinin sınırı boştan farklı olmasıdır.

Uyarı $\mathcal{E}=$ **Top** alırsak, ∂-bağlantılılık kavramı, giriş kısmında ifade edilen Teoremin (3) şıkkına göre klasik bağlantılılık kavramına indirgenir.

Burada Pretopolojik uzayların kategorisi olan PrT de, ∂-bağlantılı objeler karakterize edilecektir.

Teorem 3.2. (A,L) **PrT** da bir obje olsun**.** Bu takdirde aşağıda ki ifadeler denktir.

(1) (A,L) ∂-bağlantılıdır.

(2) A nın boştan farklı herhangi bir M öz alt cümlesi için aşağıdaki şartlardan en az biri sağlanır.

(i) En az bir $\mathrm{a}\in\mathrm{M}^c$ için $\alpha\cup[\mathrm{M}]$ öz süzgeç olacak şekilde $\exists\,\alpha\in\mathrm{L}(\mathrm{a})$ mevcut ve $\bigcap_{\mathrm{b}\in\mathrm{M}}\mathrm{N}_\mathrm{b}\subset[\mathrm{a}]$ olmalıdır ($\mathrm{N}_\mathrm{b}=\bigcap_{\alpha\in\mathrm{K}(\mathrm{b})}\alpha$).

(ii) En az bir $\mathrm{b}\in\mathrm{M}$ için $\alpha\cup\left[\mathrm{M}^c\right]$ öz süzgeç olacak şekilde $\exists\,\alpha\in\mathrm{L}(\mathrm{b})$ mevcut ve $\bigcap_{\mathrm{a}\in\mathrm{M}}\mathrm{N}_\mathrm{a}\subset[\mathrm{b}]$ olmalıdır ($\mathrm{N}_\mathrm{a}=\bigcap_{\alpha\in\mathrm{K}(\mathrm{a})}\alpha$).

İspat : (1) $\Rightarrow$ **(2)** Kabul edelim ki (A,L) ∂-bağlantılı ve A nın boştan farklı en az bir M öz alt cümlesi için (i) ve (ii) şartları sağlanmasın. Yani bu M öz alt cümlesi için aşağıdaki (1) ve (2) şartları doğru olsun.

(1) $\forall\mathrm{a}\in\mathrm{M}^c$, $\forall\alpha\in\mathrm{L}(\mathrm{a})$ için $\alpha\cup[\mathrm{M}]$ öz olmayan süzgeç veya $\bigcap_{\mathrm{b}\in\mathrm{M}}\mathrm{N}_\mathrm{b}\not\subset[\mathrm{a}]$ olsun ($\mathrm{N}_\mathrm{b}=\bigcap_{\alpha\in\mathrm{K}(\mathrm{b})}\alpha$).

(2) $\forall\mathrm{b}\in\mathrm{M}$, $\forall\alpha\in\mathrm{L}(\mathrm{b})$ için $\alpha\cup\left[\mathrm{M}^c\right]$ öz olmayan süzgeç veya $\bigcap_{\mathrm{a}\in\mathrm{M}}\mathrm{N}_\mathrm{a}\not\subset[\mathrm{b}]$ olsun ($\mathrm{N}_\mathrm{a}=\bigcap_{\alpha\in\mathrm{K}(\mathrm{a})}\alpha$).

Bu takdirde;

I.Durum : $\forall\mathrm{a}\in\mathrm{M}^c$, $\forall\alpha\in\mathrm{L}(\mathrm{a})$ için $\alpha\cup[\mathrm{M}]$ öz olmayan süzgeç ve $\forall\mathrm{b}\in\mathrm{M}$, $\forall\alpha\in\mathrm{L}(\mathrm{b})$ için $\alpha\cup\left[\mathrm{M}^c\right]$ öz olmayan süzgeç olsun. Bu taktirde M hem açık hem de kapalı olur. Gerçekten; herhangi bir $\mathrm{a}\notin\mathrm{M}$ için $\alpha\cup[\mathrm{M}]$ öz süzgeç olacak şekilde $\alpha\in\mathrm{L}(\mathrm{a})$ mevcut olmadığından (kabulden) M kapalıdır (Teorem 2.2.3) ve $\overline{\mathrm{M}}=\mathrm{M}$ (Önerme 2.2.6) olur. Benzer olarak M^c da kapalıdır (kabulden ve

Teorem 2.2.3 den) ve $\overset{0}{\mathrm{M}} = \mathrm{M}$ olur (Önerme 2.2.6). Buradan $\partial(\mathrm{M}) = \overline{\mathrm{M}} \setminus \overset{0}{\mathrm{M}} = \mathrm{M} \setminus \mathrm{M} = \phi$ dur (Tanım 2.2.5). Bu ise (A, L) ‘nin ∂ -bağlantılı olmasıyla çelişir.

II.Durum : $\forall \mathrm{a} \in \mathrm{M}^c$, $\forall \alpha \in \mathrm{L(a)}$ için $\alpha \cup [\mathrm{M}]$ öz olmayan süzgeç ve $\forall \mathrm{b} \in \mathrm{M}$ için $\bigcap_{\mathrm{a} \in \mathrm{M}} \mathrm{N_a} \not\subset [\mathrm{b}]$ olsun. Bu takdirde M hem açık hem de kapalıdır. Gerçekten; herhangi bir $\mathrm{a} \in \mathrm{M}^c$ için $\alpha \cup [\mathrm{M}]$ öz süzgeç olacak şekilde $\alpha \in \mathrm{L(a)}$ mevcut olmadığından (kabulden) M kapalıdır (Teorem 2.2.3) ve $\overline{\mathrm{M}} = \mathrm{M}$ (Önerme 2.2.6) olur. M açık yani M^c kapalıdır. Çünkü; herhangi bir $\mathrm{b} \in \mathrm{M}$ için $\alpha \cup [\mathrm{M}^c]$ öz süzgeç olacak şekilde $\alpha \in \mathrm{L(b)}$ mevcut değilse açık olarak M^c kapalıdır. Herhangi bir $\mathrm{b} \in \mathrm{M}$ için $\alpha \cup [\mathrm{M}^c]$ öz süzgeç olacak şekilde $\alpha \in \mathrm{L(b)}$ mevcutsa, $\forall \mathrm{b} \in \mathrm{M}$ için $\bigcap_{\mathrm{a} \in \mathrm{M}} \mathrm{N_a} \not\subset [\mathrm{b}]$ olduğundan M^c kapalıdır (kabulden ve Teorem 2.2.3 den) ve $\overset{0}{\mathrm{M}} = \mathrm{M}$ olur (Önerme 2.2.6). Buradan $\partial(\mathrm{M}) = \overline{\mathrm{M}} \setminus \overset{0}{\mathrm{M}} = \mathrm{M} \setminus \mathrm{M} = \phi$ dur (Tanım 2.2.5). Bu ise (A, L) ‘nin ∂ -bağlantılı olmasıyla çelişir.

III.Durum : $\forall \mathrm{a} \in \mathrm{M}^c$ için $\bigcap_{\mathrm{b} \in \mathrm{M}} \mathrm{N_b} \not\subset [\mathrm{a}]$ olsun ve $\forall \alpha \in \mathrm{L(b)}$ için $\alpha \cup [\mathrm{M}^c]$ öz olmayan süzgeç olsun. Bu takdirde M hem açık hem de kapalıdır. Gerçekten; herhangi bir $\mathrm{a} \in \mathrm{M}^c$ için $\alpha \cup [\mathrm{M}]$ öz süzgeç olacak şekilde $\alpha \in \mathrm{L(a)}$ mevcut değilse açık olarak M kapalıdır. Herhangi bir $\mathrm{a} \in \mathrm{M}^c$ için $\alpha \cup [\mathrm{M}]$ öz süzgeç olacak şekilde $\alpha \in \mathrm{L(a)}$ mevcutsa, $\forall \mathrm{a} \in \mathrm{M}^c$ için $\bigcap_{\mathrm{b} \in \mathrm{M}} \mathrm{N_b} \not\subset [\mathrm{a}]$ olduğundan (kabulden) M kapalıdır (Teorem 2.2.3) ve $\overline{\mathrm{M}} = \mathrm{M}$ (Önerme 2.2.6) olur. $\forall \mathrm{b} \in \mathrm{M}$, $\forall \alpha \in \mathrm{L(b)}$ için $\alpha \cup [\mathrm{M}^c]$ öz olmayan süzgeç olduğundan, M^c açık olarak kapalıdır (Teorem 2.2.3) ve $\overset{0}{\mathrm{M}} = \mathrm{M}$ olur (Önerme 2.2.6). Buradan $\partial(\mathrm{M}) = \overline{\mathrm{M}} \setminus \overset{0}{\mathrm{M}} = \mathrm{M} \setminus \mathrm{M} = \phi$ dur (Tanım 2.2.5). Bu ise (A, L) ‘nin ∂ -bağlantılı olmasıyla çelişir.

IV.Durum : $\forall \mathrm{b} \in \mathrm{M}$, $\forall \mathrm{a} \in \mathrm{M}^c$ için $\bigcap_{\mathrm{b} \in \mathrm{M}} \mathrm{N_b} \not\subset [\mathrm{a}]$ ve $\bigcap_{\mathrm{a} \in \mathrm{M}} \mathrm{N_a} \not\subset [\mathrm{b}]$ olsun. Bu takdirde M hem açık hem de kapalıdır. Gerçekten; herhangi bir $\mathrm{a} \in \mathrm{M}^c$ için $\alpha \cup [\mathrm{M}]$ öz süzgeç olacak şekilde $\alpha \in \mathrm{L(a)}$ mevcut değilse açık olarak M kapalıdır. Herhangi bir $\mathrm{a} \in \mathrm{M}^c$ için $\alpha \cup [\mathrm{M}]$ öz süzgeç olacak şekilde $\alpha \in \mathrm{L(a)}$ mevcutsa, $\forall \mathrm{b} \in \mathrm{M}$ için $\bigcap_{\mathrm{b} \in \mathrm{M}} \mathrm{N_b} \not\subset [\mathrm{a}]$ olduğundan (kabulden) M kapalıdır (Teorem 2.2.3) ve $\overline{\mathrm{M}} = \mathrm{M}$ (Önerme 2.2.6) olur. Benzer olarak M^c kapalı (Teorem 2.2.3) ve $\overset{0}{\mathrm{M}} = \mathrm{M}$ olur (Önerme 2.2.6). Buradan $\partial(\mathrm{M}) = \overline{\mathrm{M}} \setminus \overset{0}{\mathrm{M}} = \mathrm{M} \setminus \mathrm{M} = \phi$ dur (Tanım 2.2.5). Bu ise (A, L) ‘nın ∂ -bağlantılı olmasıyla çelişir.

Sonuç olarak dört ihtimalde de çelişkiye düştük. Buradan kabulümüz yanlış şartımız doğrudur.

(2) $\Rightarrow$ (1) Kabul edelim ki şartımız doğru ve (A, L) ∂ -bağlantılı olmasın. Bu takdirde en az bir boştan farklı N öz alt cümlesinin sınırı boştur. Yani $\partial(\mathrm{N}) = \overline{\mathrm{N}} \setminus \overset{0}{\mathrm{N}} = \phi$ dır. Bunun olması için $\overline{\mathrm{N}} = \overset{0}{\mathrm{N}}$ yani N ‘nin hem açık hem de kapalı olması gerekir ki (Önerme 2.2.6), kabulümüz gereği bu mümkün olamaz. Çünkü; N kapalı olduğundan (Teorem 2.2.3) herhangi bir $\mathrm{a} \notin \mathrm{N}$ için $\alpha \cup [\mathrm{N}]$ öz süzgeç olacak şekilde $\alpha \in L(a)$ mevcut olmayabilir. Fakat kabulümüz gereği bu mümkün değildir. Herhangi bir $a \notin N$ için $\alpha \cup [N]$ öz süzgeç olacak şekilde $\alpha \in L(a)$ mevcut ve $\bigcap_{b\in M} N_b \not\subset [a]$ olabilir. Fakat yine kabulümüz gereği bu mümkün olmaz. Dolayısıyla N nin kapalı olması mümkün değildir. Benzer olarak N^c da kapalı değildir (kabulden ve Teorem 2.2.3 den). Yani N açık da olamaz. A 'nın kendisinden ve boştan farklı hiç bir alt cümlesi hem açık hem de kapalı olamaz. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır.

KAYNAKLAR

1. Munkres, J.R., Topology: A First Course, Prentice Hall Inc., New Jersey, 1975.
2. Baran, M., The Notion of Closedness in Topological Categories, Comment. Math. Univ. Carolinae, 34, 383-395, 1993.
3. Herrlich, H., Topological Functors, Gen. Top. Appl., 4, 125-142, 1975.
4. Brümmer, G.C.L., A Categorical Study of Initialy in Uniform Topology, Ph.D. Thesis, Univ. of Cape Town, 1971.
5. Mielke, M.V., Geometric Topological Completions with Universal Final Lifts, Top. and Appl., 9, 277-293, 1985.
6. Schwartz, F., Connections Beetween Convergence and Nearness, Lecture Notes in Math. No.719, Springer-Verlag, 345-354, 1978.
7. Baran, M., Closure Operators in Convergence Spaces, Acta. Math. Hunger., 87, 33-45, 2000.
8. Baran, M. and Kula, M., A note on Separation and Compactness in Categories of Convergence Spaces, Applied General Topology, 4, 1-13, 2003.
9. Kula, M., Topolojik Kategorilerde Bağlantılılık, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, 2003.
10. Clementino, M. M. and Tholen, W., Separation Versus Connectedness, Topology and its Applications, 75, 143-181, 1997.
11. Collins, P.J., Concordant Mappings and the Concordant-Dissonant Factorization of an Arbitrary Continous Function, Proceedings of the A.M.S, 27, 587-591, 1971.
12. Dikranjan, D. and Giuli, E., Closure operators I, Topology Appl., 27, 129-143, 1987.
13. Baran, M., Separation Properties, Indian J. Pure and Appl. Math., 23 (5), 333-341, 1992.