



TABAKALI KOMPOZİT KİRİŞLERİN EĞİLME ANALİZİ

Mustafa Halûk SARAÇOĞLU^{1,*}, Mustafa Emin GÜRLEK²

¹ Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Kütahya, mhaluk.saracoglu@dpu.edu.tr, ORCID: 0000-0003-3842-5699

² Gediz Belediyesi, Özyurt Mahallesi, Cumhuriyet Caddesi, No: 4, Kütahya, mustafaemingurlek@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6248-4886

Geliş Tarihi:05.08.2018

Kabul Tarihi:27.03.2020

ÖZ

Bu çalışmada; tabakalı kompozit kirişlerin gerilme ve şekil değiştirme analizleri sonlu farklar yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Analizlerde farklı mesnet koşulları ve farklı yüklemeler etkisi altındaki kirişler, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine göre incelenmiştir. İncelenen bu kirişler farklı tabaka sayıları ve farklı oryantasyon açılarında sahiptirler. Tabakalı kompozit kirişler, düzlem gerilme problemi olarak ele alınmıştır. Gerilme ve şekil değiştirme analizleri yapılırken ilgili bünye bağıntıları ve denge denklemleri için bazı kabuller yapılmıştır. Üç boyutlu doğrusal olmayan şekil değiştirme ifadeleri, iki boyutlu ve doğrusal şekil değiştirme ifadelerine indirgenmiştir. Bu diferansiyel denklemlerin çözümü için merkezi sonlu fark ifadeleri kullanılmıştır. Her sonlu fark düğüm noktası için merkezi sonlu fark ifadesi yazılmıştır. Daha sonra bu ifadeler sınır şartlarına göre tekrar düzenlenmiştir. Elde edilen bünye bağıntıları ve denge denklemlerinin çözümü için açık kaynak kodlu olan DEV-C++ V 5.8.3 editörü kullanılarak bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Geliştirilen bu program kullanılarak sayısal uygulamalar yapılmıştır. Literatürde bulunan örnek problemler çözülerek geliştirilen bilgisayar programının doğruluğu test edilmiştir. Sonuç olarak tabaka dizilişleri ve sınır şartları farklı tabakalı kompozit kirişlerin yük altındaki gerilme ve şekil değiştirme davranışları ortaya konulmuştur. Elde edilen sonuçlar tablo ve grafiklerle sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: *Gerilme, Oryantasyon Açısı, Sonlu Farklar Metodu, Şekil Değiştirme, Tabakalı Kompozit Kiriş*

BENDING ANALYSIS OF LAMINATED COMPOSITE BEAMS

ABSTRACT

In this study; stress and displacement analysis of laminated composite beams were performed using finite difference method. In the analyses, different support conditions and beams under different loading conditions were investigated according to Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories. These examined beams have different lamination scheme and different orientation angles. Laminated composite beams are considered as plane stress problem. When stress and strain analyses were carried out, some assumptions were made for related constitutive links and equilibrium equations. The three-

dimensional non-linear deforming expressions were reduced to two-dimensional and linear strain expressions. The central finite difference relations were used to solve these differential equations. For each finite difference node a central finite difference statement was written. These expressions were then rearranged according to the boundary conditions. A software has been developed using the open-source DEV-C++ V 5.8.3 editor for solving the obtained constitutive and equilibrium equations. Numerical applications were performed using this developed program. The sample problems in the literature have been solved and the accuracy of the developed software has been tested. As a result, stress and displacement behaviour of laminated composite beams under loads which has different boundary conditions, lamination scheme and orientation angle were presented. The results were presented in tables and graphs.

Keywords: *Stress, Orientation Angle, Finite Difference Method, Strain, Laminated composite beam*

1. GİRİŞ

Günümüzde kompozit malzemeler inşaat ve yapı sektörü, uzay teknolojisi, otomotiv, savunma sanayi, spor malzemeleri gibi neredeyse artık her alanda kullanılmaktadır.

Bu çalışmada en eski ve en yaygın kullanım alanına sahip olan tabakalı kompozitler kullanılmıştır. Liflerle güçlendirilmiş kompozit malzemeler tabaka denilen ince katmanlardan oluşurlar. Kullanılan malzemede en büyük eğilme rijitliğine ulaşmak için iki veya daha fazla tabaka bir araya getirilerek tabakalı yapılar oluşturulur [1].

Kompozit malzemelerin son yıllarda yapı ve inşaat alanlarında kullanımının hızlı bir şekilde arttığı gözlemlenmektedir. Kompozit malzemelerden oluşan yapı elemanlarından bir tanesi de tabakalı kompozit kirişlerdir. Tabakalı kompozit kirişlerin yapısal davranışları ve karakteristik özellikleri ele alındığında statik ve dinamik yükler altında gösterecekleri davranışların çok iyi bilinmesi gerekir. Tabakalı kompozit kirişlerin analizi ile ilgili günümüze kadar bir takım teoriler ve sayısal çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Yapılan analizlerde genel olarak Euler-Bernoulli Kiriş teorisi ve Timoshenko Kiriş teorisi üzerinde durulmuştur. Ayrıca bu iki teoriden başka daha karışık olan Yüksek Mertebe Kiriş teorileri de analizlerde kullanılmıştır. Yapılan literatür çalışmalarında tabaklı kompozit kirişlerle ilgili en temel kaynaklar arasında Karama vd. [2], Reddy [3] ve Carrera vd. [4] bulunmaktadır.

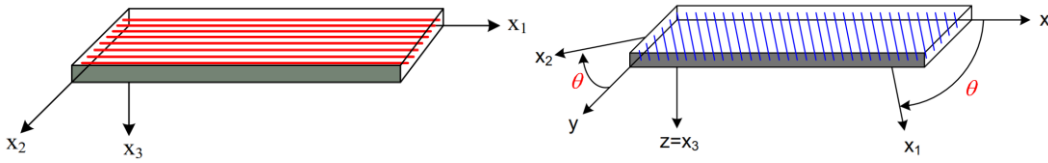
Literatürde konu ile ilgili farklı yöntemler kullanılarak yapılan çalışmalar mevcuttur. Yük altındaki tabakalı kompozit kirişte statik analizler yapılarak oluşacak gerilme ve şekil değiştirme hesapları yapılmıştır[5-13]. Bunun yanında kiriş ekseninde yükler uygulanarak bazı stabilite analizleri yapılan çalışmalar da mevcuttur[14-17]. Ayrıca tabakalı kompozit kirişlerin dinamik davranışlarını ortaya koyan çalışmalar da mevcuttur[14,16-21,]. Loja ve Barbosa [18], tabakalı kompozit kirişlerin statik ve dinamik davranışlarını incelemiş; Boay ve Wee [14], eğilme, burkulma ve serbest titreşim analizlerini, Nguyen vd. [16] ise statik, burkulma ve titreşim analizlerini gerçekleştirmişlerdir. Sayyad ve Ghugal [17], kompozit tabakalı yapılarda eğilme, burkulma ve serbest titreşim davranışları ile ilgili ve bunların analizleri için gerekli teoriler hakkında geniş bir literatür taraması yaparak çalışmalarında 515 adet referans göstermişlerdir.

Tabakalı kompozit kirişler izotrop ve ortotrop kirişlere göre daha iyi mekanik özelliklere sahiptir. Araştırmacılar konu ile ilgili farklı problemleri ve çözüm yöntemlerini kullanmışlardır. Bu çalışmada tabakalı kompozit kirişlerin statik analizi sonlu farklar metodu kullanılarak yapılmıştır.

2. MATERYAL VE METOD

Tabakalı kompozit kirişler liflerle güçlendirilmiş tabakalardan oluşmaktadır. Bu tabakalar ise matris malzemesi ve liflerden oluşur. Bu tabakalarda en büyük dayanım lif yönlerindedir, life dik doğrultuda daha düşük değerlere sahiptir. Liflerle güçlendirilmiş tek yönlü tabaka ortotrop malzeme gibi davranır.

Lif eksenini ile global eksen arasındaki açı oryantasyon açısıdır (Şekil 1). Bu oryantasyon açısı $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ arasında değişmektedir [3]. Liflerle güçlendirilmiş tek yönlü tabaka ve Oryantasyon açısı (θ) Şekil 1’de gösterilmektedir.



Şekil 1. Liflerle güçlendirilmiş tek yönlü tabaka ve Oryantasyon açısı (θ).

Tabakalı kompozit kirişler farklı oryantasyon açısına sahip tabakaların bir araya getirilmesiyle oluşurlar.

Düşey yükü yüklenmiş kirişte yer değiştirme tarif edilirken x ekseninde u , y ekseninde v , z ekseninde w kullanılır. u_0 , v_0 ve w_0 ise orta düzlemin yer değiştirmeleridir. Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre yer değiştirmeler şu şekildedir.

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial}{\partial x} w_0 \quad v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial}{\partial y} w_0 \quad w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (1)$$

Timoshenko kiriş teorisine göre yer değiştirmeler ise şu şekildedir.

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \phi_x(x, y) \quad v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \phi_y(x, y) \quad w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (2)$$

Burada ϕ_x ve ϕ_y sırasıyla y ve x eksenlerine göre dönmeyi tanımlar. Düzlem gerilme problemiyle ilgili lineer bünye bağıntıları k’nci ortotrop tabaka için şu şekildedir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Bu eşitliklerde σ_{11} lif eksenine paralel yöndeki aksel gerilmeyi, σ_{22} lif eksenine dik ve tabaka düzlemindeki aksel gerilmeyi, σ_{12} ise tabaka düzleminde dik olan kayma gerilmesini ifade eder. Burada ϵ değerleri ise k’nci tabaka için ilgili eksenlerdeki şekil değiştirmelerdir. Gerilme ve şekil

değiştirme arasındaki ilişkiyi $Q_{ij}^{(k)}$ indirgenmiş malzeme matrisi kurar. $Q_{ij}^{(k)}$, k tabakasının Poisson Oranları, Elastisite Modülleri ve Kayma Modülü kullanılarak aşağıdaki eşitlikten elde edilebilirler.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad \nu_{21} = \frac{E_2}{E_1}\nu_{12} \quad (4)$$

Burada; E_1 lif yönündeki, E_2 ise life dik yöndeki Elastisite Modülleridir. G_{12} ise x_1-x_2 düzlemindeki kayma modülüdür. ν_{12} ve ν_{21} ise ilgili yönlerdeki Poisson oranlarıdır. Kompozit tabakalı kirişlerde lif eksenleri kiriş eksenine göre farklı yönelmiş ortotrop tabakalardan oluştuğu için hepsi aynı (x,y,z) koordinat eksenine dönüştürülmelidir. Bu dönüşüm işlemi yapıldıktan sonra her bir tabakaya ait gerilme ile şekil değiştirme arasındaki ilişki şu şekildedir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Elde edilen bünye bağıntılarındaki dönüştürülmüş indirgenmiş malzeme matrisi elemanlarının açık ifadeleri EK-A 'da verilmiştir.

Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre eğilme rijitlik matrisi elemanları D_{ij} ve Timoshenko kiriş teorisine göre uzama rijitlik matrisi elemanları A_{ij} şu şekilde hesaplanır.

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_{k+1} - z_k) \quad (6)$$

Burada k. tabakanın üst koordinatı z_k ve $(k+1)$. tabakanın üst koordinatı z_{k+1} şeklinde gösterilmiştir. Buna göre tabaka kalınlığı $h_k = z_{k+1} - z_k$ şeklindedir. Dönüştürülmüş eğilme rijitlik matris elemanları ve dönüştürülmüş uzama rijitlik matrisi elemanları EK-B'de gösterilmiştir. Eşdeğer elastisite modülü E_{xx}^b ve eşdeğer kayma modülü G_{xz}^b şu şekilde hesaplanır.

$$E_{xx}^b = \frac{12}{D_{11}^* h^3} \quad G_{xz}^b = \frac{1}{A_{55}^* h} \quad (7)$$

Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre yer değiştirme fonksiyonları cinsinden denge denklemleri şu şekildedir

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E_{xx}^b I_{yy}} \quad (8)$$

Timoshenko kiriş teorisine göre yer değiştirme fonksiyonları cinsinden denge denklemleri şu şekildedir

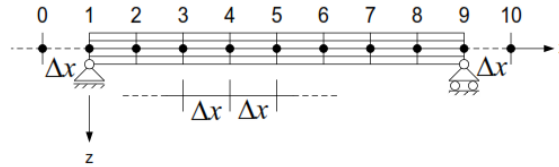
$$KG_{xz}^b bh \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \hat{q} = 0 \quad E_{xx}^b I_{yy} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - KG_{xz}^b bh \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) = 0 \quad (9)$$

2.1. Sonlu Farklar Yöntemi ile Kiriş Analizi

Statik eğilme altındaki kompozit tabakalı kiriş için, eğrilik ve eğilme momenti arasındaki ilişkiyi gösteren diferansiyel denklem aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d^2 w_0}{d x^2} = -\frac{M(x)}{E_{xx}^b I_{yy}} \quad E_{xx}^b I_{yy} \frac{d^4 w_0}{d x^4} = \hat{q} \quad (10)$$

Örnek olarak iki ucu mafsallı bir kiriş sonlu farklara bölünürse Şekil 2’deki gibi olur [1].



Şekil 2. Sonlu fark ağı oluşturulmuş kiriş.

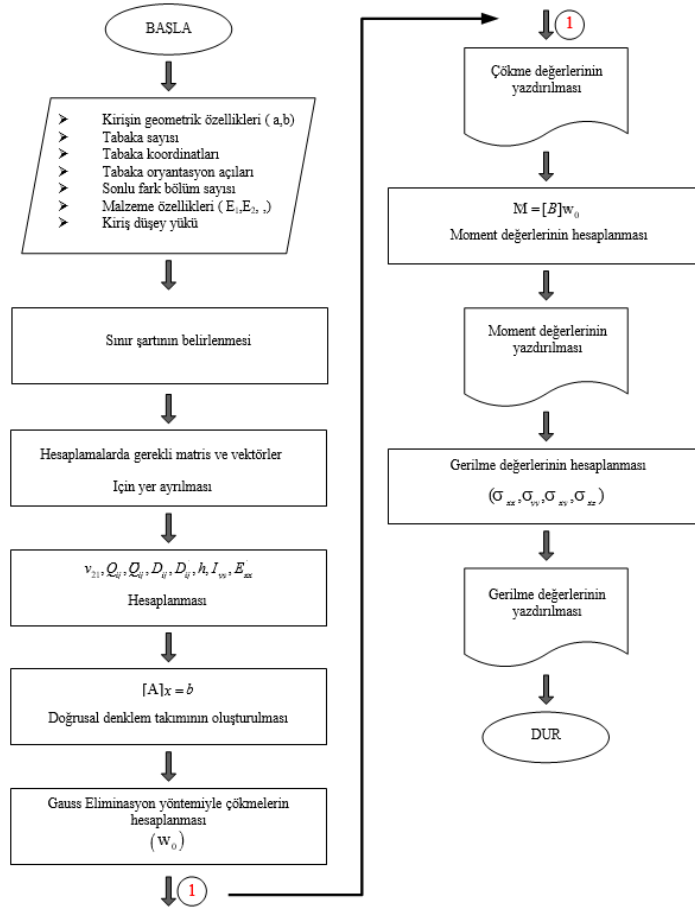
Eğrilik ve eğilme momenti arasındaki ilişkiyi gösteren Eş. 10 ‘daki diferansiyel denklem düzenlenerek sonlu farklar yöntemi uygulanabilir. Dördüncü mertebeden türevin sonlu fark ifadesi sınır şartları da uygulandıktan sonra, matris formunda doğrusal denklem takımı şeklinde düzenlenir. Öncelikle çökmelerin önünde yer alan katsayılardan bir A katsayı matrisi, çökmelerin bulunduğu bir x vektörü ve karşı taraf bilinenler b vektörü oluşturulur.

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{0_2} \\ w_{0_3} \\ w_{0_4} \\ w_{0_5} \\ w_{0_6} \\ w_{0_7} \\ w_{0_8} \end{Bmatrix} = \Delta x^4 \begin{Bmatrix} \left(\frac{\hat{q}}{E_{xx}^b I_{yy}} \right)_2 \\ \left(\frac{\hat{q}}{E_{xx}^b I_{yy}} \right)_3 \\ \left(\frac{\hat{q}}{E_{xx}^b I_{yy}} \right)_4 \\ \left(\frac{\hat{q}}{E_{xx}^b I_{yy}} \right)_5 \\ \left(\frac{\hat{q}}{E_{xx}^b I_{yy}} \right)_6 \\ \left(\frac{\hat{q}}{E_{xx}^b I_{yy}} \right)_7 \\ \left(\frac{\hat{q}}{E_{xx}^b I_{yy}} \right)_8 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Oluşturulan bu lineer denklem takımı Gauss Eliminasyon yöntemi ile çözümlenerek bilinmeyen x vektörü, yani tabakalı kompozit kirişin orta düzleminin düşey çökme değerleri sonlu fark ağ noktaları için elde edilmiş olur. Bu değerler kullanılarak moment ve gerilme değerleri de elde edilir [1].

2.2. Konu ile İlgili Hazırlanan Bilgisayar Programı

Tabakalı kompozit kirişlerin eğilme analizi için oluşturulan bünye bağıntıları ve denge denklemlerinin çözümü için açık kaynak kodlu olan DEV-C++ V 5.8.3 editörü kullanılarak bir bilgisayar programı geliştirilmiştir [1]. Bu program verileri kullanıcıdan alarak analizleri yapmakta ve elde edilen sonuçları dosyaya yazdırmaktadır. Veri olarak; kompozit tabakalı kirişin uzunluğu ve genişliği, kirişin yüksekliği boyunca tabaka sayısı ve tabakaların koordinatları, tabakaların derece cinsinden oryantasyon açıları, kirişin uzunluğu boyunca sonlu fark bölüm sayısı, malzeme özellikleri, yük değeri, kirişin sınır şartları kullanıcıdan alınır. Daha sonra hesaplamalarda gerekli matris ve vektörler için yer ayrılarak malzeme özelliklerinden rijidlikler ve eşdeğer elastisite modülü ve eşdeğer kayma modülü hesaplanır. Bu değerler kullanılarak doğrusal denklem takımı oluşturulur ve Gauss eliminasyon yöntemi ile çözümlenerek her bir sonlu fark düğüm noktasındaki düşey çökme değeri elde edilir. Elde edilen bu değerler kullanılarak eğilme momenti ve gerilme değerleri elde edilir ve sabit diskteki sonuç dosyasına bu değerler yazdırılarak program sonlanır. Geliştirilmiş olan bilgisayar programına ait akış diyagramı Şekil 3'teki gibidir.



Şekil 3. Konu ile ilgili hazırlanan bilgisayar programına ait akış şeması.

3. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu bölümde, bu çalışmanın doğruluğunu teyit etmek için sayısal örnekler çözülmüş ve kompozit tabakalı kirişlerin düşey yer değiştirmeleri ve kesitte oluşan gerilmeler araştırılmıştır. Ele alınan kirişler eşit tabaka kalınlıklarına, farklı tabaka dizilimlerine, farklı sınır şartlarına (iki ucu mafsallı, iki ucu ankastre, konsol) ve farklı açıklık/yükseklik oranına sahiptir. Her bir örnek ile ilgili dikkate alınan üç tip malzeme özellikleri Çizelge 1 'de verilmiştir.

Hesaplanan sonuçların sonlu fark bölüm sayısının artırılmasıyla doğru çözüme daha da yaklaşacağı bilinmektedir. Ele alınan sayısal örneklerde sonlu fark bölüm sayısı n=100 olarak alınmıştır.

Yük altındaki kirişlerin düşey yer değiştirme, gerilme ve moment değerleri boyutsuz hale getirilirken aşağıdaki bağıntılar kullanılmıştır.

$$\bar{w} = \frac{w_{\max} E_2 h^3}{q a^4 10^{-2}} \quad \bar{\sigma} = \sigma \frac{h^2}{q a^2} \quad \bar{M} = M \frac{1}{q a^2} \quad (12)$$

Çizelge 1. Kompozit tabakalı kirişlerin malzeme özellikleri.

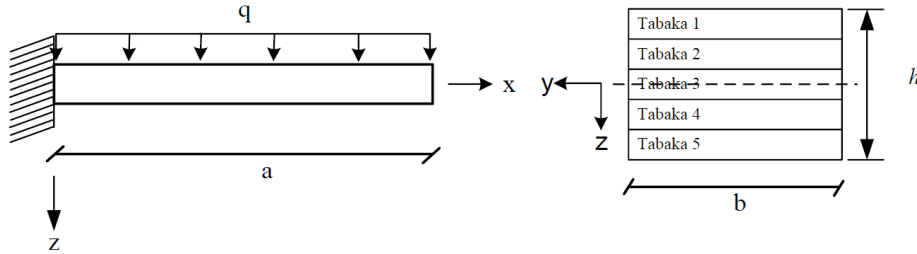
Örnek	Malzeme ismi	Malzeme özellikleri
3.1.1	MAL 1 [22]	$E_1 = 25 \times 10^6 \text{ psi}$ $E_2 = 1,5 \times 10^6 \text{ psi}$ $G_{12} = 0,75 \times 10^6 \text{ psi}$ $\nu_{12} = 0,28$
3.1.2, 3.2.1	MAL 2 [3]	$E_1/E_2 = 25$ $G_{12} = G_{13} = 0,5 E_2$ $G_{23} = 0,2 E_2$ $\nu_{12} = 0,25$
3.2.2	MAL 3[13]	$E_1/E_2 = \text{değişken}$ $G_{12} = G_{13} = 0,6 E_2$ $G_{23} = 0,5 E_2$ $\nu_{12} = 0,25$

3.1. Euler Bernoulli Kiriş Teorisine Göre Çözülen Örnekler

Üç adet tabakalı kompozit kirişin uygulama örneği Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre analizi sonlu faklar yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Elde edilen analiz sonuçları literatürde yapılan çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

3.1.1. Euler Bernoulli örnek 1

Üzerinde 1,5 libre/inç düzgün yayılı yük bulunan bir ucu ankastre diğer ucu serbest Şekil 4’te görülen kompozit tabakalı kirişin, farklı oryantasyon açılarına göre uç noktasındaki çökme değerleri hesaplanmıştır [22]. Bu kirişe ait malzeme özellikleri Çizelge 1 ‘deki gibidir. Konsol kirişin boyu $a = 12$ inç, kesitin genişlik b ve yükseklik h değeri 1 inçtir.



Şekil 4. Beş tabakadan oluşturulmuş simetrik kompozit tabakalı kiriş.

Farklı oryantasyon açılarına göre hesaplanan kirişin uç nokta çökme değerleri literatürle karşılaştırılarak Çizelge 2 ‘de gösterilmiştir.

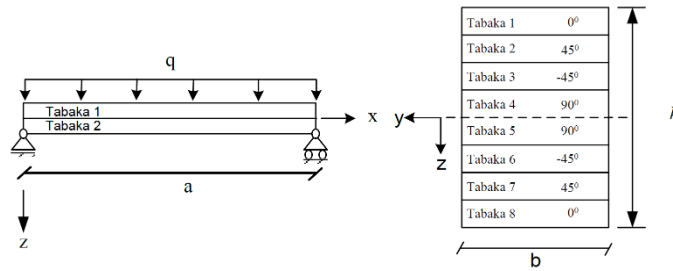
Çizelge 2. Farklı oryantasyon açılarında sahip kompozit konsol kirişin uç nokta çökme değerleri.

Tabakalar	Bu çalışma (w)	(Staab [22]) (w)
$[0^0]_5$	0,00186	0,00186
$[90^0]_5$	0,03110	0,03086
$[0^0/45^0/90^0/45^0/0^0]$	0,00231	0,00219
$[90^0/0^0/45^0/0^0/90^0]$	0,00723	0,00721
$[0^0/90^0/45^0/90^0/0^0]$	0,00233	0,00232

Hesaplanan uç nokta çökme değerleri referans [22] ile verilen analitik çözümlerle hemen hemen aynı sonuçları vermiştir.

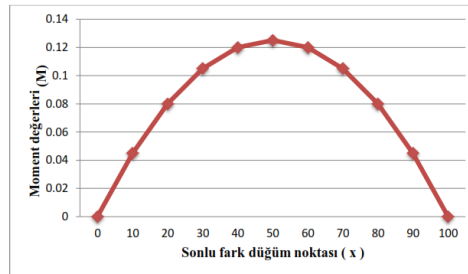
3.1.2. Euler Bernoulli örnek 2

Üzerinde 1 libre/inç düzgün yayılı yük bulunan iki ucu basit mesnetli simetrik tabakalı ($0^0/45^0/-45^0/90^0$)_s Şekil 5 'te görülen kompozit kirişin boyutsuz eğilme momenti ve gerilme değerleri sonlu farklar yöntemine göre hesaplanmıştır. Bu kirişe ait malzeme özellikleri Çizelge 1 'deki gibidir. Konsol kirişin boyu $a = 1$ inç, kesitin genişlik b ve yükseklik h değeri 0,1 inçtir.



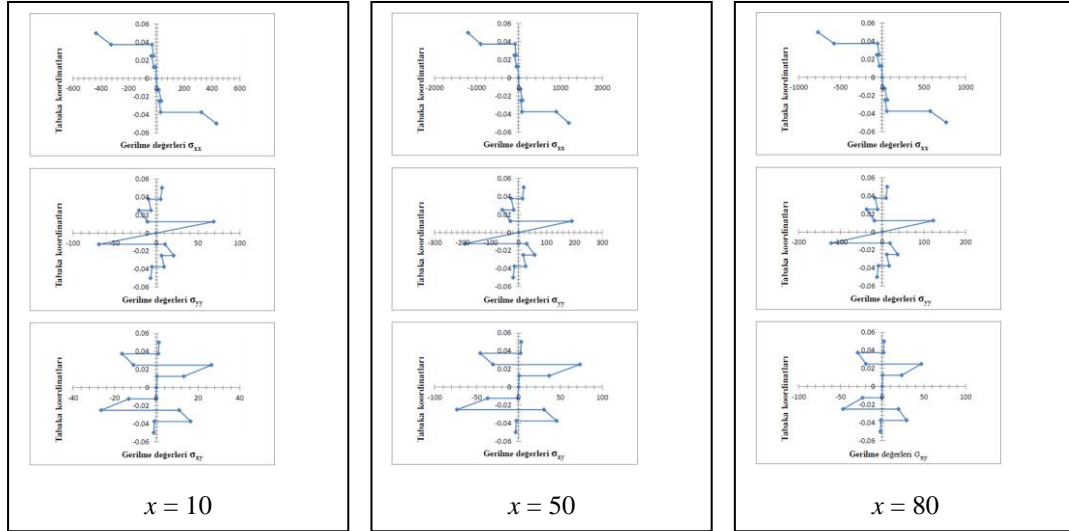
Şekil 5. Simetrik tabakalı kompozit kiriş ($0^0/45^0/-45^0/90^0$)_s.

Kirişte oluşan eğilme momenti değerleri Eş. 12 kullanılarak boyutsuz hale getirilmiş ve Şekil 6 'da gösterilmiştir.



Şekil 6. İki ucu basit mesnetli tabakalı kompozit kirişin ($0^0/45^0/-45^0/90^0$)_s moment değerleri.

Sonlu fark düğüm noktalarında elde edilen eğilme momenti değerleri kirişin kalınlığı boyunca aynıdır. Orta noktada oluşan maksimum eğilme momenti değeri (0,125) referans [3] ile hesaplanmış ve aynı değeri vermiştir. Örnek olarak sonlu fark düğüm noktalarındaki eğilme momenti değerleri kullanılarak $x=50$, $x=10$ ve $x=80$ düğüm noktalarındaki σ_{xx} , σ_{yy} ve σ_{xy} gerilme değerleri hesaplanmıştır. Hesaplanan değerler Eş. 12 kullanılarak boyutsuz hale getirilmiş ve Şekil 7 'de gösterilmiştir.



Şekil 7. İki ucu basit mesnetli tabakalı kompozit kirişin ($0^0/45^0/-45^0/90^0$)_s boyutsuz gerilme değerleri.

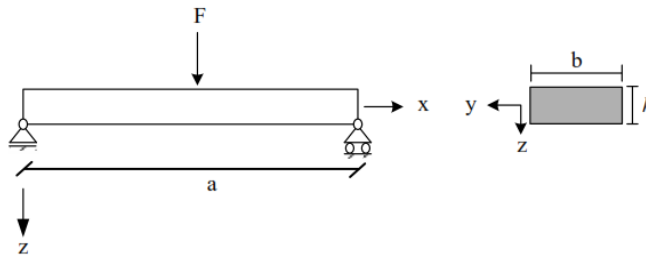
Üzerinde düzgün yayılı yük bulunan iki ucu basit mesnetli simetrik tabakalı ($0^0/45^0/-45^0/90^0$)_s kompozit kirişin, maksimum gerilmeleri, maksimum momentin bulunduğu $x = 50$ orta noktasında oluşmaktadır (Şekil 6). Kiriş kalınlığı boyunca gerilme dağılımı benzer özellikler göstermektedir. Oluşan gerilme değerleri ise x koordinatına bağlı olarak farklıdır.

3.2. Timoshenko Kiriş Teorisine Göre Çözülen Örnekler

Tabakalı kompozit kirişlerin analizini kesme kuvvetinin etkisini de dikkate alan Timoshenko kiriş teorisine göre sonlu faklar yöntemi kullanılarak üç adet uygulama örneği çözülmüştür. Çözülen örneklerde kayma düzeltme katsayısı $K = 1,2$ olarak alınmıştır. Elde edilen analiz sonuçları literatürde yapılan çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

3.2.1. Timoshenko örnek 1

Üzerinde 1 libre tekil yük bulunan iki ucu basit mesnetli Şekil 8 'de görülen kompozit tabakalı kirişin, a/h oranlarına göre orta noktasındaki boyutsuz çökme değerleri hesaplanmıştır [3]. Bu kirişe ait malzeme özellikleri Çizelge 1 'deki gibidir. Kirişin boyu $a = 1.0$ inç, kesitin genişlik b ve yükseklik h değeri $0,1$ inçtir.



Şekil 8. Üzerinde tekil yük bulunan iki ucu basit mesnetli kompozit tabakalı kiriş.

Kirişin a/h oranlarına göre hesaplanan boyutsuzlaştırılmış orta nokta çökme değerleri literatürle karşılaştırılarak Çizelge 3 'te gösterilmiştir.

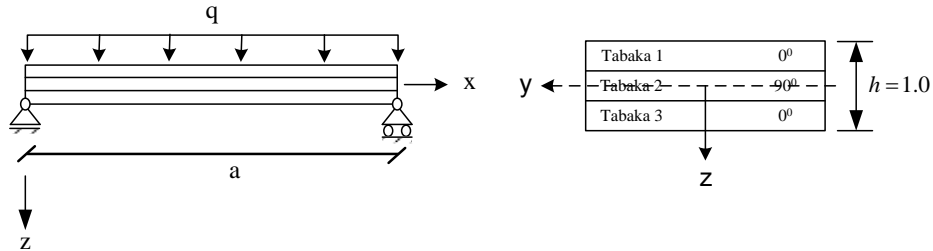
Çizelge 3. Üzerinde tekil yük bulunan iki ucu basit mesnetli kompozit tabakalı kirişlerin a/h oranlarına göre orta nokta \bar{w} boyutsuz çökme değerleri.

a/h	Bu çalışma (\bar{w})			(Reddy [3]) (\bar{w})		
	100	20	10	100	20	10
$(0^0)_s$	1,006	1,150	1,600	1,001	1,150	1,600
$(90^0)_s$	25,020	25,380	26,505	25,015	25,375	26,500
$(0^0/90^0)_s$	0,143	1,348	1,991	1,143	1,348	1,991
$(45^0/-45^0)_s$	14,319	14,524	15,167	14,316	14,522	15,165

Hesaplanan orta nokta boyutsuz çökme değerleri referans [3] ile verilen analitik çözümlerle hemen hemen aynı sonuçları vermiştir.

3.2.2. Timoshenko örnek 2

Üzerinde 1 libre/inç düzgün yayılı yük bulunan üç eşit tabakadan oluşmuş iki ucu basit mesnetli Şekil 9 'da görülen kompozit tabakalı kirişin, farklı elastisite modülü oranları ve a/h oranlarına göre orta nokta boyutsuz çökme değerleri hesaplanmıştır [13]. Bu kirişe ait malzeme özellikleri Çizelge 1 'deki gibidir. Kirişin boyu a = değişken, kesitin genişlik b ve yükseklik h değeri 1.0 inçtir.



Şekil 9. Üç eşit tabakadan oluşmuş iki ucu basit mesnetli kompozit tabakalı kiriş.

Farklı elastisite oranları ve a/h oranlarına göre hesaplanan kirişin boyutsuzlaştırılmış orta nokta çökme değerleri literatürle karşılaştırılarak Çizelge 4 'te gösterilmiştir.

Hesaplanan orta nokta çökme değerlerinin, a/h değerleri ve elastisite oranları arttıkça azaldığı görülmüştür. Hesaplanan sonuçların referans [13] ile verilenlerle hemen hemen aynı olduğu görülmüştür.

Çizelge 4. İki ucu basit mesnetli, farklı elastisite oranları ve a/h oranlarına sahip kompozit tabakalı kirişin Timoshenko kiriş teorisine göre orta nokta \bar{w} boyutsuz çökme değerleri.

	Bu çalışma					(Özütok ve Madenci [13])				
	E ₁ /E ₂					E ₁ /E ₂				
	3	10	20	30	40	3	10	20	30	40
5	6,395	2,673	1,867	1,598	1,464	6,294	2,667	1,867	1,598	1,464
10	5,600	1,879	1,073	0,804	0,669	5,500	1,873	1,073	0,804	0,669
20	5,40	1,680	0,875	0,605	0,471	5,301	1,675	0,874	0,605	0,471
30	5,365	1,643	0,838	0,569	0,434	5,264	1,637	0,837	0,568	0,434
40	5,352	1,631	0,825	0,557	0,421	5,251	1,625	0,824	0,556	0,421
50	5,346	1,625	0,819	0,551	0,410	5,246	1,619	0,818	0,550	0,415

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada; farklı sınır şartları ve farklı yüklemeler etkisi altındaki tabakalı kompozit kirişlerin gerilme ve şekil değiştirme analizleri, Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine göre sonlu farklar yöntemi kullanılarak yapılmıştır.

Kompozit kirişin lifli tabakalardan oluştuğu kabul edilmiştir. Bu lifler $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ arasında değişen oryantasyon açısına sahiptirler. Ayrıca bu liflerin oluşturduğu tabakalı kompozit kirişin rijitlikleri tabaka dizilişine göre değişmektedir.

Tabakalı kompozit kirişin şekil değiştirmesi kiriş kalınlığı boyunca sürekli olmasına rağmen, gerilmelerin her bir tabakada malzeme katsayılarına bağlı olarak farklılık gösterdiği görülmüştür.

Yük altında şekil değiştiren tabakalı kompozit kirişin yer değiştirme tarifi, Euler- Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine göre farklılık göstermektedir. Timoshenko kiriş teorisine göre yapılan hesaplarda, Euler-Bernoulli kiriş teorisinden farklı olarak kayma deformasyonlarını da dikkate alınmıştır. Kesitte oluşacak momentlerle beraber kesme kuvvetleri de hesaplanmıştır.

Elde edilen denge denklemleri sonlu fark yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Bu diferansiyel denklemlerin çözümü için merkezi sonlu fark bağıntısı kullanılmıştır. Çökme ile yük arasındaki ilişkiyi veren dördüncü mertebeden diferansiyel denklemin çözümü için bir sonlu fark ağı oluşturulmuştur. Her sonlu fark düğüm noktası için merkezi sonlu fark ifadesi yazılmıştır. Bu ifadeler sınır şartlarına göre tekrar düzenlenmiştir. Daha sonra çözüm için oluşturulan lineer denklem takımına gauss eliminasyon yöntemi uygulanarak çökmeler hesaplanmıştır. Çökmeler ile ikinci mertebeden merkezi sonlu fark ifadesi sınır şartlarına uyarlanarak çarpılmış ve moment değerleri elde edilmiştir. Son olarak her sonlu fark düğüm noktasındaki gerilme değerleri, tabakaların alt ve üst yüzeylerinde ayrı ayrı hesaplanmıştır.

Elde edilen bünye bağıntıları ve denge denklemlerinin çözümü için DEV-C++ editörü kullanılarak bilgisayar programı geliştirilmiştir. Geliştirilen bilgisayar programı ile örnekler çözülmüştür.

Sonlu fark bölüm sayısının artırılmasıyla elde edilen sonuçlar doğru çözüme daha da yaklaşmaktadır. Bu çalışmada sonlu fark bölüm sayısı $n=100$ alınarak örnekler çözülmüştür.

Çözülen örnekler için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- Düzgün yayılı yüklerle yüklenmiş farklı tabaka dizilişlerine sahip 5 tabakalı kompozit konsol kirişin uç noktasındaki çökme değerleri Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre hesaplanmıştır.
- Üzerinde düzgün yayılı yük bulunan iki ucu basit mesnetli, simetrik tabakalı kompozit kirişin, eğilme momenti ve gerilme değerleri Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre hesaplanmıştır.
- Üzerinde tekil yük bulunan iki ucu basit mesnetli, farklı tabaka sayıları ve oryantasyon açılarına sahip simetrik tabakalı kompozit kirişlerin orta nokta çökme değerleri Timoshenko kiriş teorisine göre hesaplanmıştır.
- Üzerinde düzgün yayılı yük bulunan iki ucu basit mesnetli simetrik kirişin, farklı elastisite modülü ve a/h oranlarına göre orta nokta çökme değerleri Timoshenko kiriş teorisine göre hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlara göre elastisite modülü ve a/h oranı arttıkça çökme değerlerinin azaldığı görülmüştür.

Hesaplanan sonuçlardan literatürde bulunanlar karşılaştırılmış ve elde edilen sonuçların benzer çıktığı görülmüştür. Timoshenko kiriş teorisinde kesme kuvvetinin etkisi de dâhil edildiği için elde edilen yer değiştirme sonuçlarının Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre elde edilen yer değiştirme sonuçlarından daha fazla olduğu görülmüştür.

KAYNAKÇA

- [1] Gürlek, M.E., (2018), Tabakalı Kompozit Kirişlerin Sonlu Farklar Metodu İle Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kütahya, 92s.
- [2] Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S., (2003), Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. International Journal of Solids and Structures, 40(6), 1525-1546.
- [3] Reddy, J. N., (2004), Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. (2nd ed.). Boca Raton: CRC Press, 81-244.
- [4] Carrera, E., Giunta, G., Petrolo, M., (2011), Beam structures : classical and advanced theories. (1st ed.). New Delhi, India: John Wiley & Sons, Ltd, 9-42.
- [5] Dökmeci, M, C., (1973), Stress and strain analysis in elastic laminated composite beams. Journal of Elasticity, 3 (1), 27-43.
- [6] Khedir, A.A., Reddy, J.N., (1997), An exact solution for the bending of thin and thick cross-ply laminated beams. Composite Structures, 37, 195-203.

- [7] Tahani, M., (2007), Analysis of laminated composite beams using layerwise displacement theories. *Composite Structures*, 79, 535-547.
- [8] Catapano, A., Giunta, G., Belouettar, S., and Carrera, E., (2011), Static analysis of laminated beams via a unified formulation. *Composite Structures*, 94, 75-83.
- [9] Chen, W., Li, L., and Xu, M., (2011), A modified couple stress model for bending analysis of composite laminated beams with first order shear deformation. *Composite Structures*, 93, 2723-2732.
- [10] Aguiar, R. M., Moleiro, F., and Mota Soares, C. M., (2012), Assessment of mixed and displacement-based models for static analysis of composite beams of different cross-sections. *Composite Structures*, 94, 601-616.
- [11] Vo, T. P., Thai, H., (2012), Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories. *Composite Structures*, 94, 2513-2522.
- [12] Afshin, M., Taheri-Behrooz, F., (2015), Interlaminar stresses of laminated composite beams resting on elastic foundation subjected to transverse loading. *Computational Materials Science*, 96, 439-447.
- [13] Özütok, A., Madenci E., (2017), Static analysis of laminated composite beams based on higher-order shear deformation theory by using mixed-type finite element method, *International Journal of Mechanical Sciences*, 130, 234-243.
- [14] Boay, C. G., Wee, Y. C., (2008), Coupling effects in bending, buckling and free vibration of generally laminated composite beams. *Composites Science and Technology*, 68, 1664-1670.
- [15] Abadi, M. M., Daneshmehr, A. R., (2014), An investigation of modified couple stress theory in buckling analysis of micro composite laminated Euler–Bernoulli and Timoshenko beams. *International Journal of Engineering Science*, 75, 40-43.
- [16] Nguyen, T-K., Nguyen, N-D., Vo, T. P, and Thai, H-T., (2017), Trigonometric-series solution for analysis of laminated composite beams. *Composite Structures*, 160, 142-151.
- [17] Sayyad, A. S., Ghugal, Y. M., (2017), Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature. *Composite Structures*, 171, 486-504.
- [18] Loja, M. A. R., Barbosa, J. I., Soares, C. M. M., (2001), Static and dynamic behaviour of laminated composite beams. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 1 (4), 545-560.
- [19] Aydoğdu, M., (2005), Vibration analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by Ritz method. *International Journal of Mechanical Sciences*, 47, 1740-1755.

- [20] Jun, L., Hongxing, H., and Rongying, S., (2008), Dynamic finite element method for generally laminated composite beams. International Journal of Mechanical Sciences, 50, 466-480.
- [21] Manoach, E., Warminski, J., Mitura, A., and Samborski, S., (2013), Dynamics of a laminated composite beam with delamination and inclusions. European Physical Journal Special Topics, 222 (7), 1649-1664.
- [22] Staab, G. H., (2015), Lamina Composites (2nd ed.). USA: Elsevier Inc., 294-295.

EKLER

EK-A dönüştürülmüş indirgenmiş malzeme matrisi elemanlarının açık ifadeleri

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)\end{aligned}$$

EK-B dönüştürülmüş eğilme rijitlik matris elemanları

$$\begin{aligned}D_1 &= D_{22}D_{66} - D_{26}D_{26} \\ D_2 &= D_{16}D_{26} - D_{12}D_{66} \\ D_3 &= D_{12}D_{26} - D_{22}D_{16} \\ D^* &= D_{11}D_1 + D_{12}D_2 + D_{16}D_3 \\ D_{11}^* &= (D_{22}D_{66} - D_{26}D_{26})/D^* \\ D_{12}^* &= (D_{16}D_{26} - D_{12}D_{66})/D^* \\ D_{16}^* &= (D_{12}D_{26} - D_{22}D_{16})/D^* \\ A &= A_{44}A_{55} - A_{45}A_{45} \\ A_{44}^* &= A_{55}/A \\ A_{55}^* &= A_{44}/A \\ A_{45}^* &= -A_{45}/A\end{aligned}$$